

文章编号: 1000-0887(2000) 11-1101-08

# 求解层间界面反平面剪切破坏的 剪切梁模型( I ) ——基本特性\*

沈新普<sup>1</sup>, 泽鲁·穆荣日<sup>2</sup>

(1. 东北大学 理学院 力学系, 沈阳 110006; 2. 波兰科学院 基础技术所, 华沙 波兰)

(吕和祥推荐)

**摘要:** 在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下引起的裂纹及裂纹扩展导致的层间界面失效, 是岩土工程层间界面及砌体结构中界面上典型的失效方式。运用弹性力学和断裂力学的理论原理, 提出了能够反映上述层间界面断裂失效问题力学特性的剪切梁模型。文中采用具有应力软化特性的“粘性裂纹”(内聚力裂纹)模型来表述层间裂纹前方损伤过程区的本构行为。对通过粘性层结合在一起的两个弹性板, 在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为作了解析分析计算, 研究了层间界面裂纹扩展规律。

**关键词:** 层间界面; 粘性层; 反平面剪切; 剪切梁; 破坏; 失稳; 损伤

**中图分类号:** O342 **文献标识码:** A

## 引 言

在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下层间裂纹及其扩展所导致的层间失效是复合材料、岩石等工程中重要的结构失效模式, 有关层间裂纹的综述可见于 Garg<sup>[1]</sup> 及 Hutchinson 和 Suo<sup>[2]</sup> 等的文章。以往的研究多数采用 Griffith 能量准则下的混合裂纹模型研究层间裂纹。本文采用“粘性裂纹”<sup>[3]、[4]</sup> 模型研究层间裂纹。这一模型假设在宏观裂纹前方存在一个损伤过程区。在损伤过程区的这部分层间材料发生弹塑性变形, 并发生损伤, 从而引起塑性软化。当层面上作用有压应力时, 则裂纹面上会发生摩擦滑动, 从而损伤区的扩展和摩擦滑动两种耗散机制并存, 并且会产生耦合效应。

侧压力作用下的层间剪切失效的力学研究目前尚无文献报道。这一问题包括如下几个方面: ①层间裂纹面上的摩擦与磨损规律。②循环载荷作用下, 损伤区的演化及局部的温度效应。③层间裂纹的扩展、失稳及其对结构整体的影响等。

本文为本研究第一部分, 仅研究侧压力作用下反平面剪切单调载荷引起的层间裂纹的扩展规律。针对反平面剪切问题, 提出了能够反映层间界面断裂失效问题力学特性的剪切梁模型, 对剪切梁在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为作了解析分析计算, 给出对应

\* 收稿日期: 1999\_08\_08; 修订日期: 2000\_09\_20

基金项目: 欧盟资助课题( INCO\_Copernicus, ERBIC 15 CT970706 ); 东北大学青年科学基金资助课题( 856049 )

作者简介: 沈新普( 1963~ ), 男, 河北省清河县人, 副教授, 博士。

裂纹稳定扩展阶段的应力及位移分布结果。对损伤区与自由端边界相互作用产生的失稳点的特性和失稳路径上的结构行为,可参见本研究(II)。

## 1 问题的描述及剪切梁模型

本小节首先给出反平面剪切问题的弹性力学描述,之后提出“剪切梁”的概念。

如图 1(a) 所示,对一对受反平面剪切作用的梁,梁间为“粘性层(内聚力层)”。由于问题的对称性,取上部的梁为研究对象,几何尺寸标于图 1 中。均布侧压力  $q_z = \sigma_n$  作用于梁的上表面,在梁的  $x = 0$  一端作用有剪切载荷  $\tau(0) = \tau_{yx}(0)A$ , 这里  $A = bt$ , 另一端  $x = L$  为自由端,假设梁的宽度  $b$  远大于厚度  $t$ , 忽略梁的弯曲效应,从而近似认为梁的反平面剪切状态下的平面应变梁。这样梁内只有非零剪应力  $\tau_{yx}$  和  $\tau_{yz}$  及侧压力  $q_z = \sigma_n = \text{const}$  作用,其他应力分量为零,从而梁的平衡方程为:

$$\partial \tau_{yx} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial z = 0 \quad (1)$$

用  $w = w(x, z)$  表示梁中沿  $y$  轴的位移,并且应用 Hooke 定律,有:

$$\tau_{yz} = -G_2(\partial w / \partial z), \quad \tau_{xy} = -G_1(\partial w / \partial x) \quad (2)$$

则(1)式化为:

$$G_1(\partial^2 w / \partial x^2) + G_2(\partial^2 w / \partial z^2) = 0, \quad (3)$$

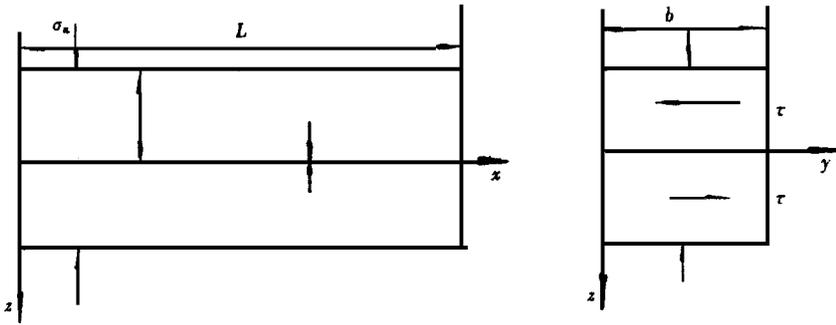


图 1 由粘性层(内聚力层)结合的一对梁

式中  $G_1, G_2$  分别为沿  $x$  轴和沿  $z$  轴的剪切模量。梁的力边界条件为:底部(即层间界面上)  $z = 0, \tau_{yz} = -\tau_f$ , 上表面  $z = t, \tau_{yz} = 0$ , 加载端  $x = 0, \tau_{xy}(0) = f_0(y, z)$ , 自由端  $x = L, \tau_{xy}(L) = 0$ 。

假设  $\tau_{yz}$  沿  $z$  轴的分布为线性分布,即:

$$\tau_{yz} = \tau_f(x) \left[ (z/t) - 1 \right], \quad (4)$$

式中  $\tau_f(x)$  表示层间界面  $z = 0$  上的剪切力。以  $\tau$  表示  $\tau_{xy}$ , 即  $\tau_{xy} = \tau$  则式(1)化为

$$\partial \tau / \partial x + \tau_f / t = 0 \quad (5)$$

以上我们用弹性力学的方法建立了简化的反平面剪切问题的平衡方程式(5),下面我们要说明,式(5)的平衡方程也可以采用本文提出的“剪切梁”模型(如图 2 示)来实现。

在“剪切梁”模型中位移沿  $z$  向均布,  $w = w(x)$ , 即  $\partial w / \partial z = 0$ , 且梁为弹性梁,

$$\tau = -Gdw/dx \quad (6)$$

弹性梁中的应力  $\tau$  与梁下底面的粘性夹层中的应力  $\tau_f$  形成自平衡系统<sup>[5]</sup>, 即有如下关系式成立:

$$A d\tau/dx + b\tau_f = 0, \quad (7)$$

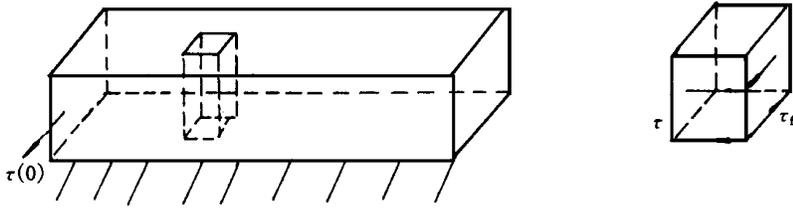


图2 剪切梁示意图

式中  $A = bt$  式(7) 的位移形式为:

$$d^2w/dx^2 - b\tau_f/AG = d^2w/dx^2 - \tau_f/tG = 0 \quad (8)$$

比较式(5) 和式(7), 我们可以得出结论: 上述剪切梁模型与侧压作用下的反平面剪切层间界面问题是等效的。另外还要指出, 剪切梁不是真梁, 并不具备梁的所有特性。

接下来我们简要地给出厚度为  $h$  的粘性界面层的弹塑性本构关系, 这些关系在模型用于数值计算时是必要的。

用  $\gamma_f$  表示剪应变, 则

$$\gamma_f = w/h, \quad \tau_f = G_f \gamma_f = G_f w/h = Kw, \quad (9)$$

这里  $G_f$  表示界面层材料的剪切模量。侧压下已经剪裂的裂纹面上的滑动摩擦力为  $\tau_s = \mu\sigma_n$ ,  $\mu$  为滑动摩擦系数, 剪切位移的全量及率形式为

$$w = w^e + w^s, \quad u = u^e + u^s \quad (10)$$

侧压下已经剪裂的裂纹面上的临界滑动条件为:

$$F^s(\sigma_n, \tau_f) = \|\tau_f\| - \mu\sigma_n \leq 0 \quad (11)$$

初始未损伤界面层材料临界损伤条件为:

$$F^s(\sigma_n, \tau_f) = \|\tau_f\| - \mu\sigma_n - \tau_{fc}^0 \leq 0, \quad (12)$$

式中  $\tau_{fc}^0$  是对应于  $\sigma_n = 0$  时的抗剪强度, 而在张应力条件下, 损伤临界面是圆弧形, 如图 3 (a) 示, 其相应的方程式为:

$$F_t^d = \left[ \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{t0}} \right) + \left( \frac{\tau_n}{\tau_{fc}^0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \leq 0 \quad (13)$$

忽略扩容的影响, 滑动势函数的形式为:

$$\Phi = \tau_f - \alpha = 0, \quad (14)$$

式中  $\alpha$  是材料参数。关于接触扩容条件的讨论可见文<sup>[6]</sup>。由以上各式可得, 滑动位移增长的率方程为:

$$u^{\mathcal{D}} = \mathcal{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_f} = \mathcal{M} > 0, \quad F^s \leq 0, \quad \mathcal{M} F^s = 0, \quad (15)$$

式中  $\mathcal{M}$  是大于零的乘子, 对于单调载荷条件, 对式(15) 积分可得剪切滑动位移全量形式, 为

$$w^{\mathcal{D}} = \lambda^{\mathcal{P}} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_f} = \lambda^{\mathcal{P}} > 0, \quad F^s \leq 0, \quad \lambda^{\mathcal{P}} F^s = 0 \quad (16)$$

当有卸载及反向摩擦滑动发生时, 摩擦滑动的历史将被记录下来。图 3 给出了应力位移关系及临界滑动条件。

对于给定的  $\sigma_n$ , 剪应力首先达到峰值强度  $\tau_{fc}$ , 之后进入塑性软化阶段, 一直下降到滑动摩擦力值  $\tau_s = \mu\sigma_n$ , 达到完全损伤阶段, 宏观裂纹形成, 相应的公式为:

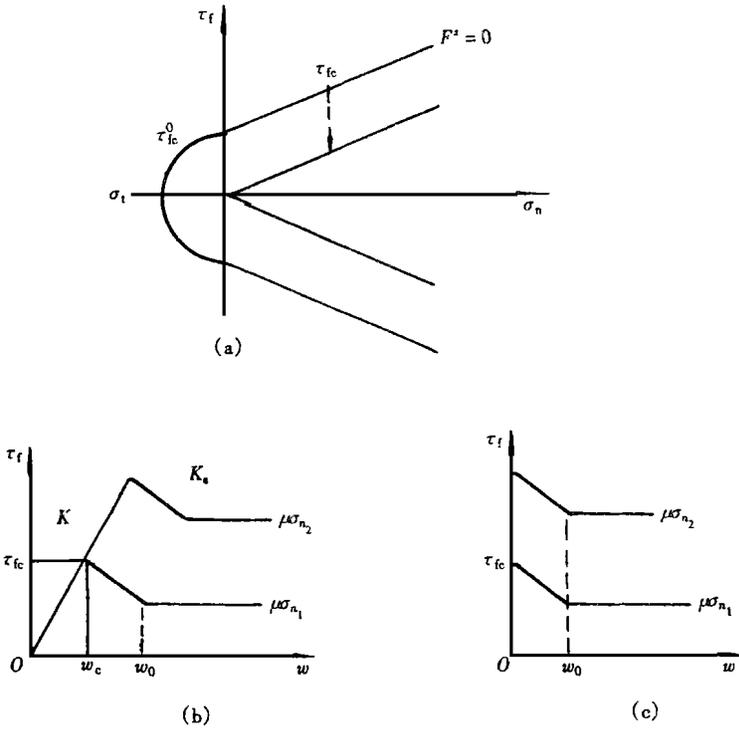


图 3 弹性及刚塑性界面层材料的本构关系和临界没动准则示意图

$$\left. \begin{aligned} \tau_f = Kw, 0 < w < w_c = \frac{\tau_{fc}}{K}, \tau_f = \tau_{fc} - K_s(w - w_c), \\ w_c < w < w_0 = w_c + \frac{\tau_{fc} - \tau_s}{K_s}, \tau_f = \tau_s = \mu\sigma_n, w_0 < w, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中  $K_s$  是界面层材料的弹性软化模量。

裂纹扩展过程中,总的耗散能可以分为损伤耗散和摩擦滑动耗散两部分,即:

$$W = W^d + W^p, \quad (18)$$

$$\text{式中 } W^p = w^s \tau_s, W^d = \int_{w_c}^w (\tau_f - \mu\sigma_n) dw. \quad (19)$$

如图 4 中所示,  $W^p$  为平行四边形  $OEF$  所围部分,  $W^d$  为四边形  $AHGB$  所围部分。

## 2 刚塑性损伤界面层模型下界面裂纹的解析解

### 2.1 刚塑性损伤界面层模型

首先设界面层的刚度  $K = G_f/h = \infty$ , 也就是忽略界面层的弹性性能的影响, 图 3c 给出了刚性损伤界面层材料的本构模型。

为简便起见,以梁的高度  $t$  为基准, 将所有的长度单位量纲一化:

$$x = x/t, w = w/t, h = h/t, s = s/t, L = L/t, \quad (20)$$

式中“-”表示具有长度单位的变量。量纲一化后的平衡方程式(7)及式(8)化为:

$$d\tau/dx + \tau = 0, d^2w/dx^2 - \tau/G = 0. \quad (21)$$

给定梁的加载端  $x = 0$  处的剪应力载荷为  $\tau(0)$ , 相应的剪切移为  $w(0)$ , 则界面层中的损伤区将从加载端开始扩展开来, 整个单调加载过程包括以下几个阶段:

- 1) 损伤过程区自  $x = 0$  加载端起始阶段;
- 2) 宏观裂纹出现, 并与损伤区一起向  $x = L$  自由端稳定扩展;
- 3) 损伤区前峰到达自由端并与自由端发生相互作用, 裂纹失稳扩展。

综合运用以上给出的平衡方程, 本构关系, 边界条件, 可以解析求解出对应以上三个阶段的各量的表达式。

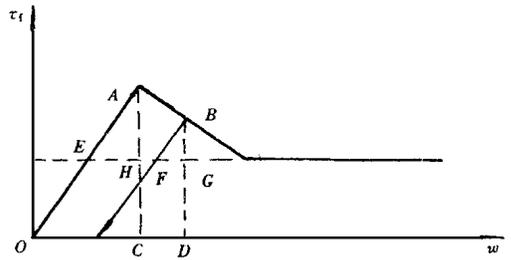


图 4 能量耗散示意图

以下本文直接给出阶段 2 的剪应力及位移场的解析解, 关于阶段 1 和阶段 3 的分析可见本研究第二部分。

### 2.2 裂纹稳定扩展时界面层上剪应力及位移的解析解

对应裂纹及损伤区的稳定扩展, 沿界面层全长的应力状态分为 3 个区, 1. 摩擦滑动区  $0 \leq x \leq S_1$ ; 2. 损伤软化区  $S_1 \leq x \leq S_2$ ; 3. 刚性区。在刚性区, 应力及位移皆为 0, 下面将给出剪应力及位移在摩擦滑动区和损伤软化区的解。

#### 2.2.1 摩擦滑动区的应力及位移解

由界面层中剪应力在摩擦滑动区和损伤区交界点上的边界条件, 可得:

$$[w] = [w'] = [w''] = 0 \quad (\text{当 } 0 \leq x \leq S_1), \quad (22)$$

表中“[ ]”表示间断值,  $w'$  和  $w''$  表示  $w$  对坐标  $x$  的一阶及二阶导数,  $S_1$  表示滑动区与损伤区交界点的坐标, 由于采用了刚塑性本构模型, 界面层上损伤区靠近自由端一侧的外边缘  $S_2$  点两侧的剪应力  $\tau_f(S_2)$  呈不连续变化, 即  $\tau_f(S_2^-) = \tau_{fc}$ ,  $\tau_f(S_2^+) = 0$ 。在摩擦滑动区  $0 \leq x \leq S_1$  内的界面层上的剪切力为:

$$\tau_f = \tau_s = \mu \sigma_n \quad (23)$$

将上式代入式 (21) 并积分可求得对应摩擦滑动区的剪应力和位移场为:

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= -\frac{\mu \sigma_n}{G} \left[ \frac{x^2}{2} - S_1 x + \frac{S_1^2}{2} \right] + \frac{\tau(S_1)}{G} (S_1 - x) + w(S_1), \\ \tau(x) &= \mu \sigma_n (x - S_1) + \tau(S_1), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中  $\tau(S_1)$  和  $w(S_1)$  分别是  $x = S_1$  点上的剪应力和位移值, 实际上  $w(S_1)$  就是 COD 准则中的裂纹最大张开位移值。从损伤软化本构方程可得:

$$w(S_1) = \frac{\tau_{fc} - \mu \sigma_n}{K_s} = \frac{\tau_{fc}^0}{K_s} = w_c, \quad \tau(S_1) = \tau(0) - \mu \sigma_n S_1 \quad (25)$$

#### 2.2.2 损伤软化区的应力及位移解

在损伤软化区  $S_1 \leq x \leq S_2$  内, 界面层上的应力位移关系为

$$\tau_f = \tau_{fc} - K_s (w - w_c) \quad (26)$$

将上式代入式 (21) 可得该区平衡方程, 为:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{K_s}{G} w = \frac{\tau_f}{tG} \quad (27)$$

求解二阶非齐次常微分方程得:

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= c_1 \cos(r_s x) + c_2 \sin(r_s x) + \frac{\tau_{fc}}{K_s}, \\ \tau(x) &= Gr_s [c_1 \sin(r_s x) - c_2 \cos(r_s x)], \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中

$$r_s = \sqrt{\frac{K_s}{G}} \quad (29)$$

$c_1, c_2$  为积分常数, 可通过不同分区的边界条件确定。

由  $x = S_2$  点处的边界条件

$$\tau(S_2) = 0, w(S_2) = 0 \quad (30)$$

可求得

$$c_1 = \frac{\tau_{fc}}{K_s} \cos(r_s S_2), c_2 = \frac{\tau_{fc}}{K_s} \sin(r_s S_2) \quad (31)$$

将式(31)代入式(28)可得

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= \frac{\tau_{fc}}{K_s} \{1 - \cos[r_s(S_2 - x)]\}, \\ \tau(x) &= G r_s \sin[r_s(S_2 - x)] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

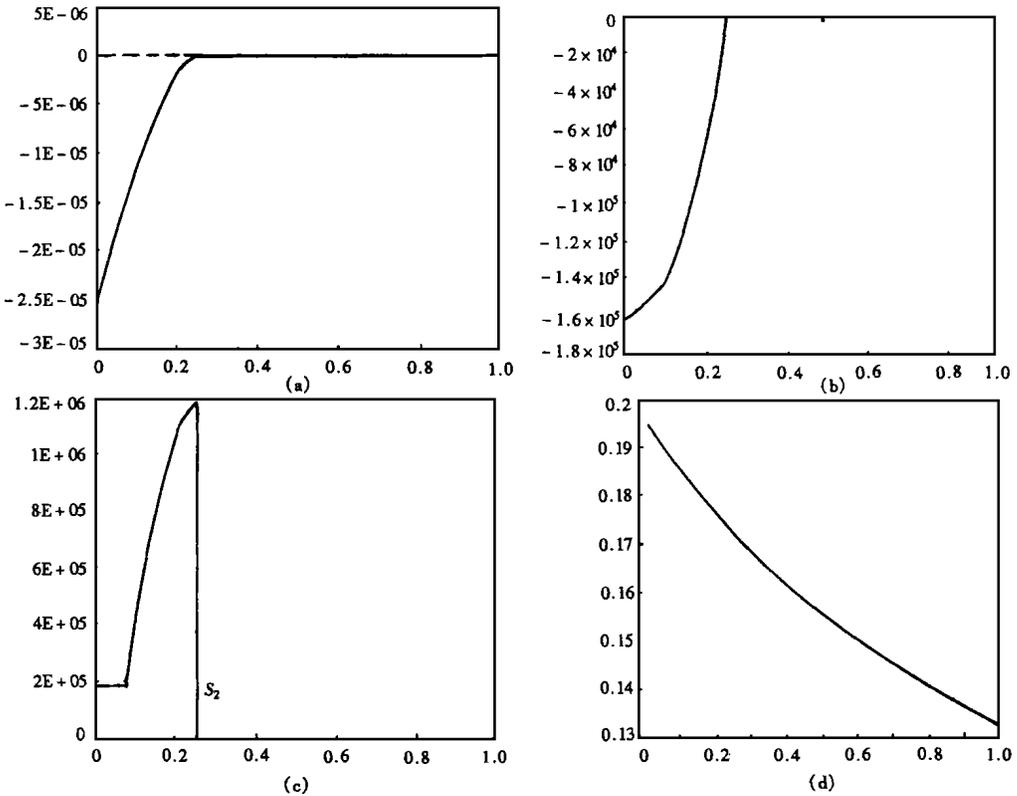


图 5 界面上 (a)  $w(x)$  的分布; (b)  $\tau(x)$  的分布; (c)  $\tau_f(x)$  的分布; (d)  $S_d$  随  $\eta$  的变化曲线

将式(32)第一式代入式(26)即得  $\tau_f(x)$  的表达式, 图 5(a), (b), (c) 分别给出了裂纹稳定扩展过程中给定载荷下  $w(x)$ ,  $\tau(x)$ ,  $\tau_f(x)$  的分布情况。从计算结果来看, 本文的裂纹前方损伤过程区内的应力分布没有弹性断裂理论所得值那样的奇异性, 但比弹塑性分析所得值有更高的应力集中, 比较符合岩石工程的实际, 表面了本文模型的合理性。

### 2.2.3 损伤区的几何尺寸

损伤区的几何尺寸是界面失效分析中的主要参数之一。利用  $x = S_1$  处的剪应力及位移的连续条件, 可以求得损伤区的几何尺寸, 为

$$S_d = S_2 - S_1 = \frac{1}{r_s} \cos^{-1} \left( \frac{\mu \sigma_n}{\tau_{fc}} \right) \quad (33)$$

从式(33)中可以看出, 对于给定的侧压力  $\sigma_n$  及材料特性, 损伤区的几何尺度在裂纹稳定扩展过程中是一个常数, 对于不同的侧压力  $\sigma_n$  和不同的材料特性, 损伤区几何尺寸是变化的, 设定  $\eta = \mu \sigma_n / \tau_{fc}^0$ , 图 5(d) 给出了  $S_d$  随  $\eta$  变化的曲线(给定  $r_s = 10$ )。  $\tau(0)$  和  $w(0)$  与  $S_1$  有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau(0)}{G} &= \tau_s \frac{\tau_{fc}}{K_s} \sin(r_s S_d) + \frac{\mu \sigma_n S_1}{G}, \\ w(0) &= -\frac{\mu \sigma_n S_1^2}{2G} + \frac{\tau}{G} S_1 + w(S_1), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

并且

$$w(s_1) = \frac{\tau_{fc}}{K_s} = \frac{\tau_{fc}^0}{K_s} = w_c, \quad \tau(S_1) = \tau(0) - \mu \sigma_n S_1 \quad (35)$$

## 3 结束语

本文提出了能够反映层间界面断裂失效问题力学特性的剪切梁模型, 给出了相应的本构关系及平衡方程及增量计算的有关基本公式。对通过粘性层结合在一起的两个弹性板, 在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为作了解析分析计算, 给出了对应裂纹稳定扩展阶段的应力及位移分布结果。从计算结果来看, 本文的裂纹前方损伤过程区内的应力分布没有弹性断裂理论所得值那样高的奇异性, 但比弹塑性分析所得值有更高的应力集中, 这比较符合岩石工程等的工程实际, 表明了本文模型的合理性。

### [参 考 文 献]

- [1] Garg A C. Delamination—a damage mode in composite structures[J]. *Engng Fract Mech*, 1988, **29** (2): 557—584.
- [2] Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking of layered materials[A]. In: W Hutchinson, T Y Wu Eds. *Adv Appl Mech [C]*. **29**. New York: Academic Press, 1991, 63—191.
- [3] Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture[A]. In: H L Dryden and Th von Karman, Eds. *Advances in Appl Mech [C]*. New York: Academic Press, 1962, 55—120.
- [4] Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits[J]. *J Mech Phys Solids*, 1960, **8**(1): 100—104.
- [5] Jarzabowski A, Mroz Z. On slip and memory rules in elastic, friction contact problems[J]. *Acta Mech*, 1994, **102**(1): 119—216.
- [6] Mroz Z, Stupkiewicz S. Hysteretic effects and progressive delamination at composite interfaces[A]. In: R Pyrz Ed. *IUTAM Symp on Microstructure Property Interactions in Composite Materials [C]*. Kluwer AC Publ, 1995, 247—264.

# Shear Beam Model for Interface Failure Under Antiplane Shear( I )—Fundamental Behavior

SHEN Xin\_pu<sup>1</sup>, Zenon Mroz<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanics, Northeastern University, Shenyang 110006, P R China;

2. Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland)

**Abstract:** The propagation of interlayer cracks and the resulting failure of the interface is a typical mode occurring in rock engineering and masonry structure. On the basis of the theory of elastoplasticity and fracture mechanics, the shear beam model for the solution of interface failure was presented. The concept of 'cohesive crack' was adopted to describe the constitutive behavior of the cohesive interfacial layer. Related fundamental equations such as equilibrium equation, constitutive equations were presented. The behavior of a double shear beam bonded through cohesive layer was analytically calculated. The stable propagation of interface crack and process zone was investigated.

**Key words:** interface layer; cohesive layer; anti\_plane shear; shear beam model; failure; instability; damage