

文章编号: 1000-0887(2000 12_1279_06)

LQG 量测反馈最优控制的精细积分^{*}

钟万勰, 蔡志勤

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 对于线性二次型高斯(LQG 量测反馈最优控制问题, 提出了精细积分法。根据分离性原理, LQG 控制问题可以分成为最优状态反馈控制问题以及最优状态估计问题, 即: 离线计算的两套黎卡提微分方程的求解以及状态向量的时变微分方程的在线积分解。该算法不仅适用于求解二点边值问题及其相应的黎卡提微分方程, 也适用于求解状态估计的时变微分方程。精细积分高精度的特点, 对控制和估计都是有利的。数值算例表明了算法的高精度及有效性。

关键词: 精细积分; LQG 量测反馈控制; 黎卡提(Riccati)微分方程; 时变微分方程
中图分类号: O232 文献标识码: A

引 言

线性系统量测反馈控制的基本方程可表达为

$$\dot{x} = Ax + Bw + B_2u, \quad (1)$$

$$y = Cx + v, \quad (2)$$

其中 x 为 n 维状态向量, y 为 q 维量测向量, u 为 m 维控制输入向量, w, v 分别为 l, q 维的白噪声随机高斯分布向量。 A, B, B_2, C 为恰当维数的给定矩阵, 时不变, 可控、可测。白噪声向量过程 $w(t)$ 与 $v(t)$ 为互不相关, 分别具有强度 W 与 V

$$\left. \begin{aligned} E[v(t_1)v^T(t_2)] &= V\delta(t_2 - t_1), \quad E[w(t_1)w^T(t_2)] = W\delta(t_2 - t_1), \\ E[w] &= 0, \quad E[v] = 0, \quad E[v(t_1)w^T(t_2)] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 E 是取期望(均值)之意, W 为 $l \times l$ 正定阵, V 为 $q \times q$ 正定阵。初始状态 $x(0)$ 的条件可表示为

$$E[x(0)] = \hat{x}_0, \quad E[(x(0) - \hat{x}_0)(x(0) - \hat{x}_0)^T] = P_0 \quad (4)$$

皆为给定。并且 $v(t), w(t)$ 与初始状态 $x(0)$ 无关。

对于 LQG 调节器问题, 可以构成为分别求解最优状态反馈控制问题以及求解最优状态估计问题, 再将其综合的体系。最优状态反馈控制是由时间的终端条件逆向求得的黎卡提微分方程解给出的; 最优状态估计可以是 Kalman-Bucy 滤波, 是由时间的初始条件正向求得的黎卡提微分方程解给出的, 称为分离性原理^[1~5]。根据此原理, 就成为求解二套黎卡提微分方程的

* 收稿日期: 2000_02_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19732020)

作者简介: 钟万勰(1934—, 男, 浙江德清人, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士;

蔡志勤(1961—, 女, 浙江宁波人, 博士后, 副教授。

系统

$$\dot{P}(t) = BWB^T + AP + PA^T - PC^T V^{-1}CP, P(0) = P_0, \quad (5)$$

$$\dot{S}(t) = -Q - SA - A^T S + SB_2 R^{-1} B_2^T S, S(t_f) = S_f \quad (6)$$

而对状态的估计 $\hat{x}(t)$, 应求解

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + PC^T V^{-1}(y - C\hat{x}) + B_2 u, \hat{x}(0) = x_0, \quad (7)$$

$$\dot{x}(t) = [A - B_2 K(t)]x, u = -Kx, K = R^{-1} B_2^T S(t) \quad (8)$$

K 称为增益阵, $P(t)$ 及 $S(t)$ 分别是黎卡提微分方程(5)和(6)的解。

虽然分离性原理在理论上已经比较成熟,但其计算方面却还很不够。计算力学对常微分方程的求解提出了精细积分法,既可用于初值问题的求解^[6,7],又可用于二点边值问题及其相应的黎卡提微分方程求解^[8]。即使方程(8)已是时变微分方程组,其精细积分法也已找到^[9],卡尔曼_布西(Kalman_Bucy)滤波的精细积分见文献[10]。在文献[9]和[10]中,充分利用最优控制中黎卡提微分方程和状态向量方程的解析特点,给出的精细积分数值结果,是计算机上的精确解。控制理论尤其讲究计算其反馈控制向量 u , LQG 量测反馈的控制向量计算当然更是受到关注。本文给出其精细积分求解算法。

1 控制下的卡尔曼_布西滤波方程

对于两套黎卡提微分方程(5)与(6),可以采用变分、区段(时段)混合能方法推导整套精细积分的公式与算法^[6-8]。逐步积分的步长记为 η , 积分的时刻为

$$t_0 = 0, \dots, t_k = k\eta, \dots, t_f = k_f\eta \quad (9)$$

t_k 为当前的时刻。当然 S_k 与 P_k 都可精细地计算,并且对任一个 k 这两个阵早已离线算好^[9,10]。

为了实时积分 \hat{x} , 将式(8)中的 u 代入(7)式有

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - B_2 R^{-1} B_2^T S) \hat{x} + PC^T V^{-1} \xi(t), \quad (10)$$

$$\xi(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (11)$$

ξ 称为新息向量^[11], 它也是一种白噪声(但已是一个样本), 且

$$E[\xi(t)\xi^T(t+\tau)] = V \delta(\tau), E[\xi_j] = 0$$

式(10)就是控制下的卡尔曼_布西滤波方程。对该方程求解便成为 LQG 量测反馈最优控制问题的关键。

2 精细积分的实现

方程(10)是卡尔曼_布西滤波估计向量 $\hat{x}(t)$ 的线性非齐次微分方程。将新息 ξ 的白噪声向量当成为外界输入, 于是(10)的齐次方程与(8)相同。对于方程(8)的求解, 虽然由于 $S(t)$ 阵是时变的而成为时变的微分方程组, 文献[9]中已给出了其初值响应矩阵的精细积分, 即其 $F_s^{-1}(t)F_s(0)$, 本文将记之以 $\Phi(t, 0)$ 。但非齐次方程的积分需要脉冲响应函数 $\Phi(t, t_0)$ 。用于当前步长为 η 的逐步积分, 需要 $\Phi(t+\eta, t)$ ($\Phi(t, t) = I$)。这些矩阵都是可用精细积分计算的(见附录)。

根据常微分方程理论, 非齐次方程(10)的解为

$$\hat{x}(t) = \Phi(t, t_0) \hat{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, t_d) f(t_d) dt_d, f(t_d) = P(t_d) C^T V^{-1} \xi(t_d),$$

式中 t_d 是积分变量。将此公式用于每一个时间步 (t_k, t_{k+1}) , 采用梯形 (Newton-Cotes 近似积分法

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = & \Phi(t_k + \eta, t_k) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + \int_k^{k+\eta} \Phi(t_k + \eta, t_d) \cdot \mathbf{P}(t_d) \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \xi(t_d) dt_d \approx \\ & \Phi(t_k + \eta, t_k) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k + [\Phi(t_k + \eta, t_k) \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k) + \\ & \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k+1})] \eta / 2. \end{aligned} \quad (12a)$$

该式也可写为(隐式格式

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = & \mathbf{v}_k - \mathbf{N}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad \mathbf{N}_k = (\eta/2) \cdot \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}, \\ \mathbf{v}_k = & \Phi(t_k + \eta, t_k) \cdot [\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k) \cdot (\eta/2)] + \\ & \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_{k+1} \cdot (\eta/2), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由此解出

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{N}_k)^{-1} \mathbf{v}_k.$$

这就是运用精细积分的控制下的卡尔曼-布西滤波方程的逐步积分公式。由于与量测值有关, 因此需要实时执行。实时计算的工作量应予减少到最低限度, 因此, 式(12)还应区分出离线计算的部分。 $\mathbf{S}_k, \mathbf{P}_k, \Phi(t_k + \eta, t_k)$ (见文献[9, 10] 以及附录),

$$\mathbf{P}_{V,k} = \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \cdot (\eta/2), \quad \mathbf{N}_k = \mathbf{P}_{V,k+1} \cdot \mathbf{C}, \quad (\mathbf{I} + \mathbf{N}_k)^{-1}$$

应当对所有的 k 都预先计算好, 存起来以备调用。

3 数值算例

数例 1 有一维系统:

$$\begin{aligned} n = 1, \quad A = -0.8, \quad Q = 0.64, \quad B_2 R^{-1} B_2 = 25.0; \quad t_f = 0.4, \quad S_f = 0.01; \\ W = 1.0, \quad V = 1.0, \quad B = 0.8, \quad C = 5.0; \quad P_0 = 0.01; \end{aligned}$$

取 $\hat{x}_0 = 1.0$, y 为迭加有 Gaussian 白噪声的量测, 试计算 $\hat{x}(t)$ 及 u 。

数例 2 考虑四维系统:

$$n = 4, \quad t_f = 16, \quad S_f = \text{diag}[10.0, 10.0, 10.0, 10.0],$$

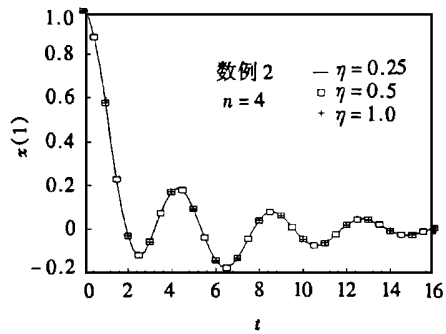
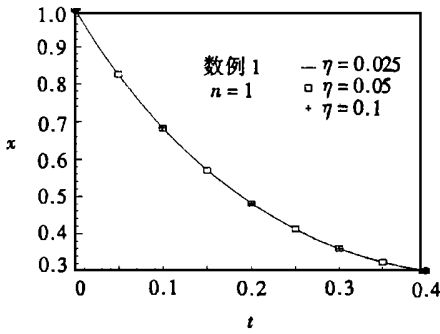
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [0, 0, 0, 0.5], \quad \mathbf{V} = [1], \quad \mathbf{P}_0 = \text{diag}[0.1, 0.1, 0.1, 0.1],$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [1.0, 1.0, 0, 0]^T,$$

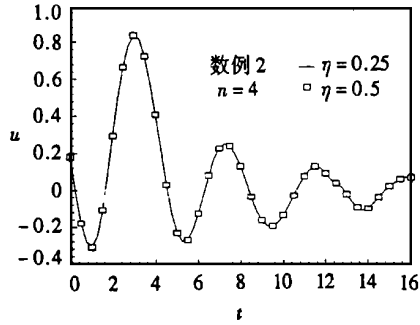
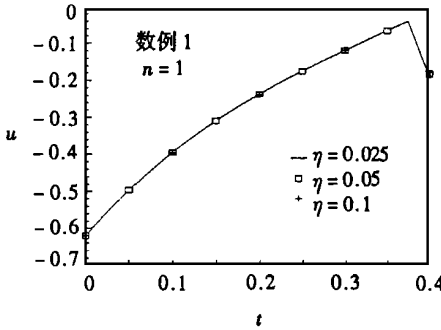
y 为迭加有 Gaussian 白噪声的量测, 要求计算 $\hat{x}(t)$ 与 u 。



注: 新息 $\xi = 0$

图 1

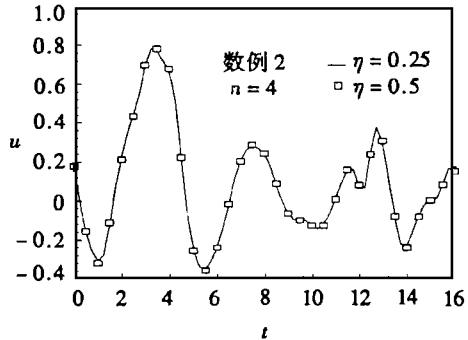
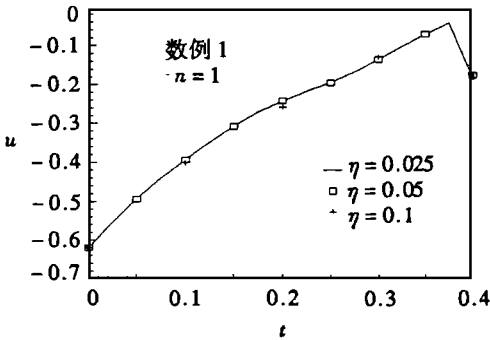
图 2



注: ξ 约为 $C\hat{x}$ 的 1/10

图 3

图 4



注: ξ 与 $C\hat{x}$ 约为同量级

图 5

图 6

状态估计向量 $\hat{x}(t)$ 及最优控制律 u 经精细积分计算, 结果见图 1~ 6

作为另一种检验, 可以验证计算结果是否满足如下特定情况: 设 y 为确定性量测 $y_k = Cx_k$, 其中 x_k 为齐次方程(8) 在第 k 个时间点 t_k 的解, 按照式(12) 的表示, 即

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} = C\Phi(t_k + \tau, t_k)x_k,$$

则有

$$\hat{x}_{k+1} = x_{k+1}^*$$

计算结果也证实了这一结论. 见图 1~ 2

(13)

图 3~ 6 中给出的最优控制向量 u 计算结果, 其量测 y 迭加有不同量级的高斯白噪声。若噪声小些, 为信号的十分之一左右, 计算结果表明, 不同步长的数据在同样的时间点上吻合很好, 见图 3~ 4; 即使对于较大的量测噪声, 其与信号约同量级时, 不同步长的数据在同样的时间点上仍吻合很好, 见图 5~ 6, 说明精细积分对时间步长是不敏感的。计算结果表明, 相应的状态估计向量亦有上述特点。

4 结 论

对于 LQG 量测反馈最优控制问题, 本文的数值结果仍表明了精细积分高精度的特点, 即使对于状态估计的时变系数微分方程, 以及两套黎卡提微分方程的求解, 将精细积分与分离性原理相结合, 同样达到了高精度的效果。LQG 量测反馈最优控制的计算与目前广泛关注的 H_∞ 控制是密切相关的, 进一步用于 H_∞ 控制等方面具有很大潜力。

附录 单步脉冲响应函数 $\Phi(t_k + \eta, t_k)$ 的精细计算

对于时段 $(t_k, t_k + \eta)$, 可将文献[9]中的公式用于 t_k 为开始, $t_k + \eta$ 为结束时间的时段。将结束时间 $t_{k+1} = t_k + \eta$ 处的黎卡提微分方程的解矩阵 S_{k+1} 用以组成虚拟时段 $(S_{k+1}, 0, I)$ 当成 (E_2, G_2, F_2) ; 而将单步长的混合能矩阵 $[E(\eta), G(\eta), F(\eta)]$ 当成 (E_1, G_1, F_1) , 按文献[9]中的时段合并公式有

$$S_k = E(\eta) + F^T(\eta)[S_{k+1}^{-1} + G(\eta)]^{-1}F(\eta), \quad (A.1)$$

$$F_s(t_k) = [I + G(\eta)S_{k+1}]^{-1}F(\eta), \quad F_s(t_{k+1}) = I \quad (A.2)$$

运用文献[9]中的相应公式有

$$x_{k+1} = F_s^{-1}(t_{k+1}) \cdot F_s(t_k) x_k = F_s(t_k) x_k$$

该式对任意 k 皆成立, 因此单步 η 脉冲响应函数为

$$\Phi(t_k + \eta, t_k) = F_s(t_k), \quad (A.3)$$

由(A.2)式即可算得。

$E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ 以及黎卡提微分方程的解矩阵 S_{k+1} 皆可由文献[9]给出的精细积分法算出。因此对任意 k , (A.3) 皆可精细计算。

[参 考 文 献]

- [1] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [2] Green M, Limebeer D J N. Linear Robust Control [M]. Prentice Hall, 1995.
- [3] Meirovitch L. Dynamic and Control of Structures [M]. J Wiley & Sons, 1990.
- [4] Doyal J C, Glover K, Khargoneker P P, et al. State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Trans Automat Control, 1989, 34(8): 831—847.
- [5] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [6] 钟万勰, 等. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.
- [7] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- [8] 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分法[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(2): 113—119.
- [9] 钟万勰. 线性二次最优控制的精细积分法[J]. 自动化学报, 2000, 26(5).
- [10] 钟万勰. 卡尔曼_布西滤波的精细积分[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(2): 191—200.
- [11] 陆恺, 田蔚风. 最优估计理论及其在导航中应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1990.

Precise Integration Method for LQG Optimal Measurement Feedback Control Problem

ZHONG Wan_xie, CAI Zhi_qin

(State Key Laboratory of Structure Analysis, Dalian University
of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: By using the precise integration method, the numerical solution of linear quadratic Gaussian (LQG) optimal control problem was discussed. Based on the separation principle, the LQG control problem decomposes, or separates, into an optimal state_feedback control problem and an optimal state estimation problem. That is the off_line solution of two sets of Riccati differential equations and the on_line integration solution of the state vector from a set of time_variant differential equations. The present algorithms are not only appropriate to solve the two_point boundary_value problem and the corresponding Riccati differential equation, but also can be used to solve the estimated state from the time_variant differential equations. The high precision of precise integration is of advantage for the control and estimation. Numerical examples demonstrate the high precision and effectiveness of the algorithm.

Key words: precise integration; LQG measurement feedback control; Riccati differential equation; time_variant differential equation