

文章编号: 1000-0887(2000) 12-1265-06

# 非线性数值流形方法的变分原理与应用<sup>\*</sup>

骆少明, 张湘伟, 蔡永昌

(汕头大学 工学院 机电系, 广东 汕头, 515063)

(本刊编委张湘伟来稿)

**摘要:** 针对非线性力学问题, 根据数值流形方法的特点及相应的位移模式, 得到了面向物理覆盖的非线性数值流形方法的变分原理, 详细推导了基于变分原理的非线性数值流形方法的理论计算公式, 建立了非线性数值流形方法的理论体系和控制方程. 作为实际应用, 给出了相应的数值算例, 结果表明, 求解精度和效益令人满意.

**关键词:** 变分原理; 数值流形方法; 非线性分析; 塑性流动

**中图分类号:** O176      **文献标识码:** A

## 引 言

通过借用现代数学中流形分析所使用的有限覆盖的概念, 数值流形方法也引进了有限覆盖技术, 并且其有限覆盖由可以分离的数学覆盖和物理覆盖组成, 建立了把有限元方法、非连续变形分析方法和解析方法包含在内的一种全新的统一计算方法, 从而可以成功地统一处理连续和非连续的力学问题, 成为数值技术的主要发展方向之一, 具有极其深远的发展前景和应用价值. 而目前的分析大多局限于线性分析<sup>[1]</sup>或仅对一些特殊问题进行处理<sup>[2]</sup>, 而工程实际中经常遇到的是非线性问题(几何非线性或材料非线性问题), 因此, 必须建立起完整的非线性数值流形方法(nonlinear numerical manifold method, NNMM)的理论体系, 才能使数值流形方法得到更广泛的应用. 本文从非线性理论体系入手, 根据数值流形方法的特点及相应的位移模式, 得到了面向物理覆盖的非线性数值流形方法的变分原理, 详细推导了基于变分原理的非线性数值流形方法的理论计算公式, 建立了非线性数值流形方法的控制方程. 作为实际应用, 给出了相应的数值算例. 计算结果表明, 非线性数值流形方法具有较高的求解精度和求解效益, 是一种高效的数值分析方法, 经过扩展, 该方法可以广泛应用于工程实际的各个领域.

## 1 塑性流动理论的基本方程与变分原理

采用 Euler 描述法, 假定在某一瞬时  $t$ , 物体在静力条件下平衡, 设应力状态和加载历史是已知的, 在外力已知边界  $\Gamma_p$  上, 外力增量为  $dp_i$ , 在位移已知边界  $\Gamma_u$  上, 位移增量为  $du_i$ , 并假

\* 收稿日期: 2000\_03\_09; 修订日期: 2000\_08\_29

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(994396)

作者简介: 骆少明(1966—), 男, 湖北嘉鱼人, 副教授, 工学博士, 重庆大学机械工程博士后科研流动站研究人员, 主要研究方向为力学中的数值方法及数值流形的无单元化方法;  
张湘伟(1950—), 男, 山西闻喜人, 教授, 工学博士, 博士生导师, 汕头大学校长.

定所有这些增量很小, 一切方程是线性的, 于是有:

1) 平衡方程:

$$d\sigma_{j,j} = 0; \quad (1)$$

2) 应变位移关系:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}); \quad (2)$$

3) 应力增量  $d\sigma_{ij}$  和应变增量  $d\varepsilon_{ij}$  之间保持线性关系;

4) 已知外力边界条件:

$$d\sigma_{jn_j} = dp_i \quad (\text{在 } \Gamma_p \text{ 上}); \quad (3)$$

5) 已知位移边界条件:

$$du_i = du_i \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}). \quad (4)$$

塑性流动理论的最小势能原理可表述为<sup>[3]</sup>:

在一切满足应变位移关系式(2)和位移已知边界条件式(4)的  $du_i$  中, 使泛函

$$\Pi_{\Phi} = \int_{\Omega} [A(d\varepsilon_{ij}) - dF_i du_i] d\Omega - \int_{\Gamma_p} dp_i du_i d\Gamma \quad (5)$$

最小的  $du_i$  必为位移增量的精确解。

对应变硬化材料, 应力应变关系是:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{(1-2\nu)}{3E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \alpha^* H \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} d\lambda, \quad (6)$$

应变能增量密度函数  $A(d\varepsilon_{ij})$  为

$$A(d\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{6(1-2\nu)} d\varepsilon_{kk} d\varepsilon_{ll} + G d\varepsilon'_{kl} d\varepsilon'_{kl} - \alpha^* \frac{G \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} d\varepsilon_{mn} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} d\varepsilon_{kl}}{\frac{1+\nu}{EH} + \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}} \quad (7)$$

而对理想塑性材料, 应力应变关系是<sup>[4]</sup>:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{(1-2\nu)}{3E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \alpha^* H \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} d\lambda, \quad (8)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0, d\lambda \rightarrow 0} \frac{d\lambda}{\beta} = d\lambda > 0; \quad (9)$$

应变能增量密度函数  $A(d\varepsilon_{ij})$  为

$$A(d\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{6(1-2\nu)} d\varepsilon_{kk} d\varepsilon_{ll} + G d\varepsilon'_{kl} d\varepsilon'_{kl} - \alpha^* \frac{G \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} d\varepsilon_{mn} \right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}} \quad (10)$$

## 2 非线性数值流形方法的变分原理

将求解域剖分为  $N$  个流形单元, 每个流形单元是若干个物理覆盖的交集<sup>[5]</sup>。在相邻的单元上, 位移是连续的, 这样, 势能泛函(5)式可写成:

$$\Pi_{\Phi}^* = \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{\Omega_m} (A^{(m)}(d\varepsilon_{ij}) - dF_i du_i^{(m)}) d\Omega - \int_{\Gamma_p^{(m)}} dp_i du_i^{(m)} d\Gamma \right\}, \quad (11)$$

上标  $m$  表单元号,  $\sum$  表对单元求和。

数值流形方法中, 单元是物理覆盖的交集。不妨设第  $m$  号单元是物理覆盖  $U_{e(1)}, U_{e(2)},$

...,  $U_{e(q)}$  的交集, 则位移增量模式可通过权函数  $w_{e(r)}(x, y)$  表示为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} du_1(x, y) \\ du_2(x, y) \end{Bmatrix} &= \sum_{r=1}^q w_{e(r)} \begin{Bmatrix} du_{1e(r)}(x, y) \\ du_{2e(r)}(x, y) \end{Bmatrix} = \\ &= \sum_{r=1}^q \sum_{j=1}^n [T_{e(r)j}(x, y)] \{ \Delta D_{e(r)j} \} = \\ &= \sum_{r=1}^q [T_{e(r)}(x, y)] \{ \Delta D_{e(r)} \}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} [T_i(x, y)] &= (T_{i1} \quad T_{i2} \quad \dots \quad T_{in}) = \\ &= \begin{bmatrix} t_{1,1}(x, y) & t_{1,2}(x, y) & t_{1,3}(x, y) & \dots & t_{1,2n-1}(x, y) & t_{1,2n}(x, y) \\ t_{2,1}(x, y) & t_{2,2}(x, y) & t_{2,3}(x, y) & \dots & t_{2,2n-1}(x, y) & t_{2,2n}(x, y) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T_{i1}(x, y) \\ T_{i2}(x, y) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$[T_{ij}(x, y)] = [t_{j,1}(x, y) \quad t_{j,2}(x, y) \quad t_{j,3}(x, y) \quad \dots \quad t_{j,2n-1}(x, y) \quad t_{j,2n}(x, y)],$$

而  $\{ \Delta D_{e(r)} \} = [\Delta d_{i1} \quad \Delta d_{i2} \quad \dots \quad \Delta d_{in}]^T$  是广义位移增量。

对(11)式进行变分, 得到

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\Phi}^* &= \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{\Omega_m} \left[ \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} \delta d \epsilon_{ij}^{(m)} - F_i \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} \right] d \Omega - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Gamma_p^{(m)}} dp_i \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} d \Gamma \right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

式中的  $q(m)$  表第  $m$  个单元是  $q$  个物理覆盖的交集。

对  $\partial A / \partial d \epsilon_{ij}$  而言, 它对  $i, j$  是对称的, 因此有

$$\int_{\Omega_m} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} \delta d \epsilon_{ij}^{(m)} = \int_{\Omega_m} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ji}^{(m)}} \delta d \epsilon_{ji}^{(m)}. \tag{15}$$

利用 Green 公式, (15)式可改写成

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} \delta d \epsilon_{ij}^{(m)} d \Omega &= \\ &= \int_{\Gamma^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} n_j^{(m)} \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} d \Gamma - \\ &= \int_{\Omega_m} \left[ \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} \right]_{,j} \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} d \Omega. \end{aligned} \tag{16}$$

考虑到位移在相邻单元  $m$  和  $m'$  之间的连续性, 可得到

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\Phi}^* &= \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{\Omega_m} \left[ - \left[ \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} \right]_{,j} - dF_i \right] \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} d \Omega + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Gamma_p^{(m)}} \left[ \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} n_j^{(m)} - dp_i \right] \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} d \Gamma \right\} + \\ &\quad \sum_{(mm')} \int_{\Gamma^{(mm')}} \left[ \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m)}} n_j^{(m)} + \frac{\partial A^{(m')}}{\partial d \epsilon_{ij}^{(m')}} n_j^{(m')} \right] \sum_{q(m)} [T_{mi}] \{ \delta \Delta D_m \} d \Gamma. \end{aligned} \tag{17}$$

由于  $\{ \delta \Delta D_m \}$  在  $\Omega_m$  中和  $\Gamma_p^{(m)}$  及  $\Gamma^{(mm')}$  上均为独立的变量, 所以在  $\delta \Pi_{\Phi}^* = 0$  的条件下, 给出下述关系:

1) 在每一个物理覆盖内, 非线性数值流形方法的平衡方程

$$\left[ \frac{\partial A^{(m)}}{\partial d\varepsilon_j^{(m)}} \right]_j [T_{mi}] + dF_i [T_{mi}] = 0; \quad (18)$$

2) 在每一个物理覆盖的外力已知边界上

$$\frac{\partial A^{(m)}}{\partial d\varepsilon_j^{(m)}} n_j^{(m)} [T_{mi}] - dp_i [T_{mi}] = 0; \quad (19)$$

3) 相邻流形单元之间的交界面上, 有

$$\frac{\partial A^{(m)}}{\partial d\varepsilon_j^{(m)}} n_j^{(m)} [T_{mi}] + \frac{\partial A^{(m')}}{\partial d\varepsilon_j^{(m')}} n_j^{(m')} [T_{mi}] = 0 \cdot \quad (20)$$

这就是基于流动理论的非线性数值流形方法的变分原理。

### 3 非线性数值流形方法控制方程的建立

流形单元定义成物理覆盖的交集, 设第  $m$  个流形单元由物理覆盖  $U_{e(1)}, U_{e(2)}, \dots, U_{e(q)}$  的交集构成, 则

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{u}^{(m)T} &= [du_1^{(m)} \quad du_2^{(m)}], \\ \left\{ \begin{aligned} du_1^{(m)} \\ du_2^{(m)} \end{aligned} \right\} &= \sum_{q^{(m)}} [T_m(x, y)] \{ \Delta D_m \}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中  $\{ \Delta D_m \}$  是广义位移增量,  $[T_m(x, y)]$  由(13) 式定义。

应变增量与广义位移增量关系可表成

$$d\varepsilon = \mathbf{B}^m \Delta D_m, \quad (22)$$

其中  $\Delta D_m = (\Delta D_{e(1)} \quad \Delta D_{e(2)} \quad \dots \quad \Delta D_{e(q)})^T$

是广义位移增量列阵;

$$\mathbf{B}^m = (B_{e(1)} \quad B_{e(2)} \quad \dots \quad B_{e(q)})$$

是应变矩阵, 其分量为:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{1,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial t_{1,2m}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{2,1}}{\partial y} & \frac{\partial t_{2,2}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial t_{2,2m}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{1,1}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial t_{1,2m}}{\partial y} + \frac{\partial t_{2,2m}}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \quad (23)$$

而应力应变关系可写成:

$$\Delta \sigma = \mathbf{D}_\varphi \Delta \varepsilon = \mathbf{D}_\varphi \mathbf{B}^m \Delta D_m \cdot \quad (24)$$

将上述各式代入(11) 式, 可得到

$$\Pi_{\Phi}^* = \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \Delta D_m^T \mathbf{K}_\varphi^{(m)} \Delta D_m - \Delta D_m^T \Delta R^{(m)} \right\}, \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{K}_\varphi^{(m)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_\varphi \mathbf{B} d\Omega, \quad (26)$$

$$\Delta R^m = \int_{\Omega} [T_m(x, y)]^T dF d\Omega + \int_p [T_m(x, y)]^T dp d\Gamma \cdot \quad (27)$$

$\mathbf{K}_\varphi^{(m)}$  就是数值流形方法的刚度矩阵,  $\Delta R^{(m)}$  为数值流形方法的外荷载增量矢量, 而

$\frac{1}{2} \Delta \mathbf{D}_m^T \mathbf{K}_{\varphi}^{(m)} \Delta \mathbf{D}_m$  即是流形单元  $m$  的应变能量增量密度。

进一步, 可将(27)式组集成总体方程

$$\Pi_{\varphi}^* = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{D}^T \mathbf{K}_{\varphi} \Delta \mathbf{D} - \Delta \mathbf{D}^T \Delta \mathbf{R}, \tag{28}$$

$$\mathbf{K}_{\varphi} = \sum_{m=1}^N \mathbf{K}_{\varphi}^{(m)}, \quad \Delta \mathbf{R} = \sum_{m=1}^N \Delta \mathbf{R}^{(m)}, \tag{29}$$

其中  $\Delta \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi}$ ,  $\Delta \mathbf{R}$  分别为整体广义位移增量矢量, 刚度矩阵和外荷载增量矢量。由变分极值条件  $\delta \Pi_{\varphi}^* = 0$ , 可得到下述方程:

$$\mathbf{K}_{\varphi} \Delta \mathbf{D} = \Delta \mathbf{R} \tag{30}$$

这就是非线性数值流形方法的控制方程, 它是一个非线性方程组。

### 4 数值算例

设一个在左右两侧  $x$  方向承受均匀拉伸的圆孔方板(图1), 其拉应力为  $s = 140 \text{ MPa}$ 。选用线性强化材料, 其弹性模量  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ MPa}$ ,  $H = 3 \times 10^3 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ , 弹性极限  $\sigma_s = 170 \text{ MPa}$ , 按平面应力分析。考虑到对称性, 可取结构的四分之一作为分析模型。计算网络采用四节点四边形流形单元, 其流形单元和物理覆盖的节点划分如图1所示, 共40个流形单元、54个物理覆盖节点。覆盖节点上采用1阶的 Lagrange 插值函数。

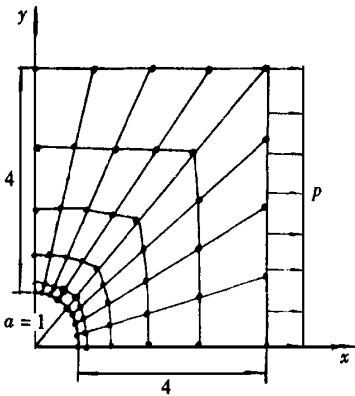


图1 圆孔板的网格划分

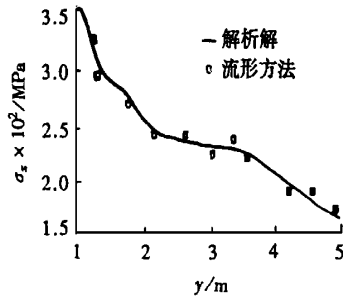


图2  $x = 0$  截面的  $\sigma_x$

用非线性流形方法分析得到的  $x = 0$  截面的  $x$  向应力  $\sigma_x$  与解析解的比较如图2所示。从图2可以看出, 在物理覆盖上使用一阶覆盖函数的流形方法, 即使采用图1所示的简单4节点4边形流形单元, 也能得到与理论分析基本相符的结果。这样的结果在有限元法里要用多节点的高次等参元才能得到。可见, 将数值流形方法用于非线性分析是一种十分有效和具有应用前景的方法。

### 5 结 语

数值流形方法是一个全新的数值分析方法, 本文将变分方法引入, 基于塑性流动理论推导了非线性数值流形方法的变分原理及相应的计算列式。这是对数值流形方法理论的一种拓

展,具有一定的理论意义,也是今后的主要研究方向之一。

### [参 考 文 献]

- [1] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报, 1998, **20**(1): 33—36.
- [2] 朱以文, 曾又林, 陈明祥. 岩石大变形分析的增量流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(1): 1—5.
- [3] 鹫津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法[M]. 老亮, 郝松林 译. 北京: 科学出版社, 1984, 30—56.
- [4] 张汝清. 固体力学变分原理及其应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1991, 29—45.
- [5] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民 译. 北京: 清华大学出版社, 1997, 3—22.

## The Variational Principles and Application of Nonlinear Numerical Manifold Method

LUO Shao\_ming, ZHANG Xiang\_wei, CAI Yong\_chang

(Mechatronic Engineering Department, Engineering College, Shantou  
University, Shantou, Guangdong 515063, P R China)

**Abstract:** The physical cover oriented variational principle of nonlinear numerical manifold method (NNMM) for the analysis of plastical problems is put forward according to the displacement model and the characters of numerical manifold method (NMM). The theoretical calculating formulations and the controlling equation of NNMM are derived. As an example, the plate with a hole in the center is calculated and the results show that the solution precision and efficiency of NNMM are agreeable.

**Key words:** variational principle; numerical manifold method; nonlinear analysis; plastical flow