

文章编号: 1000-0887(2000) 12-1211-04

# 超声速边界层中小幅值 T<sub>S</sub> 波的数值研究<sup>\*</sup>

袁湘江<sup>1,2</sup>, 周 恒<sup>1</sup>

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072; 2. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000)  
(我刊编委周恒来稿)

摘要: 对来流马赫数  $Ma_\infty = 4.5$  的平板边界层中, 幅值  $A$  分别为来流速度的 0.01, 0.001, 0.000 1 倍的扰动波传播的物理过程进行了直接数值模拟。计算采用 NND 格式。模拟中发现即使扰动幅值尚小时, 流场中即已出现小激波。

关键词: 直接数值模拟; 小激波; 可压缩边界层  
中图分类号: V211.1 文献标识码: A

## 引 言

近来, 超声速边界层的转捩问题由于其在技术上的重要性越来越受到人们的重视。直到现在, 理论分析大多限于线性范围, 详细的实验仍然非常少。一些人试图将不可压缩边界层流体动力稳定性的非线性理论推广到可压缩边界层, 但在我们看来, 这种做法是成问题的。主要问题是: 首先, 没有细致实验观察帮助理论工作者建立理论模型; 其次, 在超声速边界层, 尤其是高超声速边界层中, 甚至在扰动幅值还很小时都有可能由扰动引发小激波, 小激波的存在将会在流场中产生间断, 于是使得任何的解析方法都难以应用。

人们可以利用实验手段或数值模拟的方法来考察小激波在超声速边界层中是否确实存在, 以及它可能产生的影响。然而, 对超声速流动, 特别是对小激波的检测, 实验工作十分困难。因此, 我们对来流马赫数  $Ma = 4.5$  的二维超声速边界层进行了数值研究。

## 1 基本方程

考虑一超声速平板边界层, 设  $x, y$  分别是流向和法向的坐标。于是, 守恒形式的 N<sub>S</sub> 方程可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T,$$

\* 收稿日期: 2000\_03\_03; 修订日期: 2000\_09\_15  
基金项目: 国家 95 攀登计划资助项目(19732005)  
作者简介: 袁湘江(1962—), 男, 安徽濉溪人, 研究员, 博士;  
周 恒(1929—), 男, 福建浦城人, 教授, 院士。

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E_t + p)u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho uv \\ (E_t + p)v \end{bmatrix}, E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \\ + q_x \end{bmatrix}, F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} \\ + q_y \end{bmatrix},$$

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2), \tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left[ 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right],$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left[ -\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} \right], \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right],$$

$$q_x = k \frac{\partial T}{\partial x}, q_y = k \frac{\partial T}{\partial y}.$$

在这里  $u, v$  分别是  $x$  和  $y$  方向的速度,  $p$  表示压力,  $\rho$  是密度,  $T$  是温度,  $\mu$  是粘性系数,  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yx}$  是应力分量,  $\gamma$  是气体常数,  $k$  是热传导系数. 粘性系数  $\mu$  满足 Sutherland 公式

## 2 数值计算和结果

在利用边界层外缘的流动参量对上述方程进行无量纲化后, 首先计算基本层流场. 我们从平板前缘开始, 进口边界条件采用马赫数  $Ma_\infty = 4.5$  的均匀来流. 其它的边界条件包括出口处的无反射条件, 在  $y = 0$  时的绝热壁面, 以及在  $y = 100\delta$  处均匀来流条件, 这里  $\delta$  是  $x = 1000$  处的动量厚度, 而  $100\delta$  则已离壁面足够远. 最后一个条件被表示为该处的物理量在  $y$  方向的梯度为 0. 在  $x$  方向上, 基本流的计算区域总长度是 1250, 大约为 75 个 T\_S 波波长之后. 计算的初场由边界层的相似解给出. 当流场达到定常时, 计算结束.

然后选择由  $x = 1030$  截面到  $x = 1250$  截面之间作为直接数值模拟的计算区域. 在  $x = 1030$  处, 雷诺数大约是 1500, 在该处引入频率  $\omega = 0.37822$  的 T\_S 波形式的扰动. 其形状通过基于该处基本流的局部流动剖面, 利用 O\_S 方程的特征值问题解出, 幅值分别取为 0.0001、0.001 和 0.01.

在数值计算中, 首先利用 Stager 方法将守恒型方程(1)中的通量项进行分裂, 然后采用有效的捕捉激波格式. 使用能捕捉激波的格式是由于流场中引入的扰动可能产生小激波. 对方程(1)中的粘性项采用中心型差分格式. 尽管基本流动不存在激波, 但为了使计算精度在有扰动与无扰动两种情况下相互一致, 都使用同一的捕捉激波格式. 时间导数采用三阶精度的 R\_K 方法计算.

首先, 我们采用能最有效捕捉激波的格式之一的 NND 格式. 对一阶导数, 它可以表示成

$$\left( \frac{\partial f^+}{\partial x} \right)_j \approx \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[ f_j^+ + \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta f_{j+1/2}^+, \Delta f_{j-1/2}^+) \right] - \left[ f_{j-1}^+ + \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta f_{j-1/2}^+, \Delta f_{j-3/2}^+) \right] \right\},$$

$$\left( \frac{\partial f^-}{\partial x} \right)_j \approx \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[ f_{j+1}^- - \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta f_{j+3/2}^-, \Delta f_{j+1/2}^-) \right] - \left[ f_j^- - \frac{1}{2} \min \text{mod}(\Delta f_{j+1/2}^-, \Delta f_{j-1/2}^-) \right] \right\},$$

其中上标+ 和- 分别表示正、负通量.

$$\Delta f_{j+1/2}^+ = f_{j+1}^+ - f_j^+, \Delta f_{j-2/3}^+ = f_{j-1}^+ - f_{j-2}^+,$$

$$\min \operatorname{mod}(a, b) = \begin{cases} a, & |a| < |b|, \\ b, & |b| < |a|, \\ 0, & a \times b < 0 \end{cases}$$

NND 格式是二阶精度, 总的说来, 它对于稳定性的计算精度是不够的, 而且, 在某些点上, 它的精度会降低到一阶。但不幸的是, 就我们所知, 象 NND 格式那样有效捕捉激波的格式中还没有高于二阶精度的。其次, NND 格式还具有很强的适用性这一特点, 这正是我们研究新问题所希望的。

然而, 为了抑制激波附近的非物理振荡, 大部分捕捉激波的二阶精度格式都带有某种所谓的限制器, 如上面提到的  $\min \operatorname{mod}$  算子。带有这样一个算子的结果是使格式的具体形式会根据当前局部流场的条件而发生变化。这意味着, 只要流动是不定常的, 那么在任一固定点上格式的具体形式在时间推进的每一时间步上, 都有可能发生变化, 而且, 在某些点处, 格式精度变为一阶。这将产生数值噪音, 污染模拟的扰动。由于在某些点处, 基本流计算所使用格式的具体形式不完全与引入扰动后的格式形式一致, 基本流场也将被污染。

由于这些问题, 我们不能简单的通过从引入扰动后计算的流场瞬时参量中减去扰动引入前计算的基本流场参量的方式, 获得有关扰动的有用信息, 而须利用在一个周期内流场参量的时间平均量代替基本流场参量, 而这与以前已算出的有所不同。对于我们研究的第一种情况, 即扰动幅值为 0.0001 时, 由于上述过程, 引入的模拟扰动被污染得十分严重, 以至我们不能得到模拟扰动演化的光滑曲线。但对另外两种情况, 我们可得到它们大致光滑的演化曲线, 如图 1 所示。图中为了比较起见, 初始扰动幅值已被正规化, 以具有相同的值。由图 1 可以得知, 初始幅值为 0.01 的扰动衰减率明显大于初始幅值为 0.001 的扰动衰减率。对于不可压缩流动, 只要幅值不大于 0.01, 差别不会这么大。

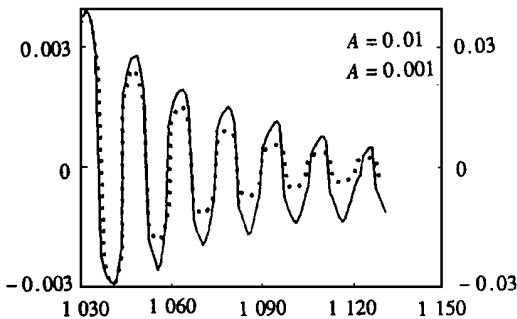


图 1 密度扰动演化曲线

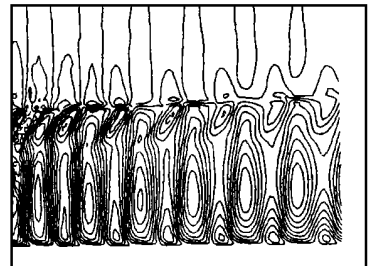


图 2 马赫数等值线

仍从该图中可以得出扰动的群速度大于它的相速度, 这是由于图中已显示出超过 6 个波形, 而受迫的时间周期仅相当于 5 个  $T_S$  波周期。

图 2 所示是初始幅值为 0.01 条件下, 临界层附近的等马赫线图。从图中可以看到, 临界层附近存在着小激波, 但它的强度相当弱, 因而不太明显。然而, 可以从跨过临界层时, 周期扰动的压力和密度的相位发生偏离这个事实中得到这个结论, 因为, 它意味着熵的跳跃。但小激波只在第一个波周期内清晰可辨, 而在以后的波周期内变得越来越弱, 其原因现在还不很清楚。一种可能是二阶精度格式的数值耗散太大, 另一种可能是小激波自身的耗散机制。此外, 在幅值为 0.001 时, 数值模拟的扰动幅值衰减率与求解特征问题所得到的衰减率也有差别, 其原因很可能是 NND 格式精度还不够高。

### 3 结 论

从我们在计算中已发现的现象来看,在超声速边界层中当有扰动时会出现小激波,这一点是清楚的。因此,在人们建立超声速边界层的流体动力稳定性的非线性理论前,还须要作更多的数值模拟工作。但如我们已在上面说明,NND格式对稳定性问题精度不够高。因此,十分清楚,最优先考虑的应该是发展一种一方面能捕捉小激波而不产生非物理振荡,另一方面,其精度又足以满足稳定性的计算要求的高精度格式。显然,这不是一件容易的事情。出于同样的原因,在解释对超声速条件下的转捩或湍流所做的任何数值模拟的结果时,应该慎重。

#### [参 考 文 献]

- [1] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. 空气动力学学报, 1988, 6(2): 143—164.

## A Numerical Study for Small Amplitude T<sub>S</sub> Waves in a Supersonic Boundary Layer

YUAN Xiang\_jiang<sup>1,2</sup>, ZHOU Heng<sup>1</sup>

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;

2. Research and Development Center of Aerodynamics of China,  
Mianyang, Sichuan 621000, P R China)

**Abstract:** The propagation of the disturbance waves in a boundary layer at Mach number= 4.5 is studied by direct numerical simulation (DNS), using NND scheme, and different amplitudes  $A = 0.01, 0.001, 0.0001$  of the disturbance have been assumed. The numerical result shows that there might be shocklets induced in the boundary layer, even when the amplitude of disturbance wave is still small.

**Key words:** direct numerical simulation; shocklet; compressible boundary layer