

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0085_08

两压电介质之间的界面夹杂问题^{*}

高存法¹, 樊蔚勋²

- (1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871;
2. 南京航空航天大学 飞行器系, 南京 210016)

(本刊编委樊蔚勋来稿)

摘要: 应用 Stroh 理论, 研究了压电介质之间的刚性介电夹杂问题。首先该问题被化为 Hilbert 问题, 然后分别给出了压电介质内的复势函数解、夹杂内的电场解和夹杂尖端场的解析表达式。结果表明, 在夹杂尖端附近, 所有的场变量均呈现奇异性和振荡性, 且其强度取决于介质的材料常数和无限场远处的应变。此外, 结果还表明, 当从夹杂内部趋近夹杂尖端时, 夹杂内的电场也呈现奇异性和振荡性。

关键词: 压电材料; 界面夹杂; 复势; 尖端场; Stroh 公式

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

众所周知, 大部分材料都含有夹杂。夹杂的存在扰动了基体内的场变量, 从而降低工程结构的承载能力。因此, 研究基体内由夹杂引起的局部场非常重要。在不同种类的夹杂中, 扁平尖硬夹杂对基体的危害性最大。为了数学处理方便, 这种夹杂常被建模为“刚性线”(有时又称为硬裂纹或反裂纹)。与裂纹问题类似, 在过去几十年中, 刚性线问题已引起了人们的广泛关注。对于纯弹性介质的情形, 文献[1~8]分别研究了一均匀无限介质内的刚性线问题; 而文献[9~12]给出了两不同介质之间的界面刚性夹杂问题。可是, 据我们所知, 对于压电介质内的刚性线夹杂问题, 目前的研究还相对较少。最近, Liang 等人^[13]和 Chen^[14]分别研究了含刚性线夹杂电介质的平面问题和反平面问题。不久前, Deng 和 Meguid^[15]研究了位于两压电体之间的刚性线夹杂问题。但是, 在该研究中, 夹杂被假设为一导体, 从而简化了分析过程, 因为此时夹杂内部的电场可认为零。事实上, 在电子封装和智能复合材料的制做过程中, 所产生的界面夹杂通常为电介质。

本文研究位于两半无限压电介质之间介电夹杂问题。整个内容由五节组成, 在此简短引言后, 第一节概述了本文将要应用的 Stroh 公式, 然后在第二节给出了介质内的复势和夹杂内的电场解; 夹杂附近的尖端场解在第三节给出; 最后, 对全文做了总结。

* 收稿日期: 1999_05_26; 修订日期: 2000_09_28

基金项目: 航空科学基金资助项目(98B52017)

作者简介: 高存法(1962—), 男, 安徽人, 副教授, 博士。

樊蔚勋(1937—), 男, 江苏人, 教授, 博导。

1 Stroh 公式

考虑一位于笛卡尔坐标系 $x_j (j = 1, 2, 3)$ 内的压电体, 假设其位移 u_j 和电势 ϕ 仅取决于 x_1 和 x_2 , 则此广义二维问题的一般解可表示为^[16]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(\bar{z})}, \quad \phi = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(\bar{z})}, \quad (1)$$

其中, \mathbf{u} 和 ϕ 分别表示广义位移函数矢量和广义应力函数矢量; \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为常数矩阵; $\mathbf{f}(z)$ 为待定复矢量, “ $\bar{}$ ” 表示取共轭。

一旦根据给定的边界条件确定 $\mathbf{f}(z)$ 之后, 应力 q_j 、电位移 D_l 和电场分量 E_l 可分别表示为:

$$q_1 = -\phi_{,2}, \quad q_2 = \phi_{,1} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$D_1 = -\phi_{,4,2}, \quad D_2 = \phi_{,4,1}, \quad E_1 = -u_{4,1}, \quad E_2 = -u_{4,2}, \quad (3)$$

其中, 逗号表示偏微分。

应指出的是, Suo 的一元复变量法^[17] 在本文被采用, 确定 $\mathbf{f}(z)$ 之后, 在计算场变量时, 应将 $\mathbf{f}(z)$ 中的分量函数的变量依次用 z_1, z_2, z_3 或 z_4 来代替, 这里, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$ ($\alpha = 1 \sim 4$), p_α 为复参数^[16]。

2 复 势

考虑两个不同材料的半无限压电介质, 一个位于上半空间 S^+ , 另一位于下半空间 S^- , 二者之间存在一条介电线夹杂, 如图 1 所示。假设夹杂为刚性的, 所占区域为 $-a < x_1 < a$ 和 $-\infty < x_3 < +\infty$; 同时假设上、下两压电介质分别在无限远处受均匀载荷作用而共同处于广义平面应变状态。此时, 夹杂上的边界条件可表示为:

$$u_1^+ = u_1^- = u_{10}, \quad u_2^+ = u_2^- = u_{20} + \omega_0 x_1,$$

$$u_3^+ = u_3^- = u_{30} \quad (-a < x_1 < a), \quad (4)$$

$$E_1^+ = E_1^-, \quad D_2^+ = D_2^- \quad (-a < x_1 < a), \quad (5)$$

其中 u_{j0} 为夹杂的位移, ω_0 为夹杂相对于 x_3 轴的转角。

为方便起见, 式 (4) 和 (5) 可进一步表示为

$$u_{j,1}^+ = u_{j,1}^- = \delta_{j2} \omega_0, \quad E_1^+ = E_1^- \quad (-a < x_1 < a), \quad (6)$$

$$D_2^+ = D_2^- \quad (-\infty < x_1 < \infty), \quad (7)$$

其中 δ_{j2} 为 Kronecker 系数, 且

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}, \\ u_{2,1} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \varepsilon_{12} + \omega, \\ u_{3,1} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 2\varepsilon_{13}, \quad u_{4,1} = \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = -E_1 \end{aligned} \quad (8)$$

在 (8) 中, ε_{11} , ε_{12} 和 ε_{13} 分别表示应变分量, ω 为转角。

定义两个矢量:

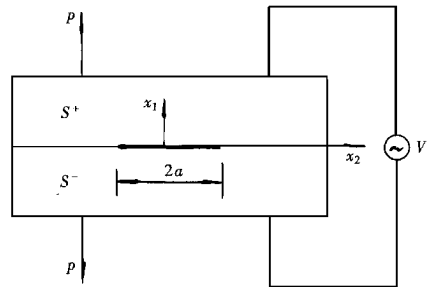


图 1 两压电介质之间的介电线夹杂

$$\mathbf{u}_{,1} = [u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{4,1}]^T, \quad \phi_{,1} = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, D_2]^T, \quad (9)$$

那么,由式(1)得

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{F}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{F}(z)}, \quad \phi_1 = \mathbf{B}\mathbf{F}(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{F}(z)}, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{F}(z) = \mathcal{F}(z)/dz$ 。

对于目前所考虑的问题, $\mathbf{F}(z)$ 可表示为

$$\mathbf{F}_l(z) = \mathbf{C}_l^\infty + \mathbf{F}_{l0}(z) \quad (l = 1, 2), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{F}_{l0}(z)$ 为 S^+ ($l = 1$) 或 S^- ($l = 2$) 内的函数矢量, 且 $\mathbf{F}_{l0}(\infty) = \mathbf{0}$; \mathbf{C}_l^∞ 为由无限远处外载荷确定的常数。

由式(6)和式(10)的第一式,可得

$$\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(x_1) + \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(x_1)} = \mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(x_1) + \overline{\mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(x_1)} \quad (-\infty < x_1 < +\infty). \quad (12)$$

引入一新的解析函数:

$$\mathbf{J}(z) = \begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(z) - \mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(z) & (z \in S^+), \\ \mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(z) - \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(z) & (z \in S^-), \end{cases} \quad (13)$$

则式(12)可化为:

$$\mathbf{J}^+(x_1) - \mathbf{J}^-(x_1) = \mathbf{0}, \quad (-\infty < x_1 < +\infty), \quad (14)$$

式(14)的解为^[18]。

$$\mathbf{J}(z) = \mathbf{J}(\infty) = \mathbf{F}^\infty, \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{F}^\infty = \mathbf{A}_1\mathbf{C}_1^\infty - \overline{\mathbf{A}_2\mathbf{C}_2^\infty} \text{ 或 } \mathbf{F}^\infty = \mathbf{A}_2\mathbf{C}_2^\infty - \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{C}_1^\infty}. \quad (16)$$

由式(16)的第一式加式(16)的第二式得

$$2\mathbf{F}^\infty = [\mathbf{A}_1\mathbf{C}_1^\infty + \mathbf{A}_2\mathbf{C}_2^\infty] - \overline{[\mathbf{A}_2\mathbf{C}_1^\infty + \mathbf{A}_1\mathbf{C}_2^\infty]}, \quad (17)$$

式(17)表明 \mathbf{F}^∞ 是纯虚数。

由式(13)和式(15)得

$$\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(z) - \overline{\mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(z)} = \mathbf{F}^\infty \quad (z \in S^+), \quad (18)$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(z) - \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(z)} = \mathbf{F}^\infty \quad (z \in S^-). \quad (19)$$

引入下列辅助函数:

$$\mathbf{u}_{,1}(x_1) = \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(x_1) + \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(x_1)}, \quad (20)$$

$$\Delta\phi_{,1}(x_1) = \phi_{,1}^{(1)}(x_1) - \phi_{,1}^{(2)}(x_1) = [\mathbf{B}_1\mathbf{F}_1(x_1) + \overline{\mathbf{B}_1\mathbf{F}_1(x_1)}] - [\mathbf{B}_2\mathbf{F}_2(x_1) + \overline{\mathbf{B}_2\mathbf{F}_2(x_1)}], \quad (21)$$

那么,应用式(18)和(19), (21)可化为

$$-i\Delta\phi_{,1}(x_1) = \mathbf{H}[\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(x_1) - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(x_1) - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1)\mathbf{F}^\infty], \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{Y}_1 = -i\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1^{-1}, \quad \mathbf{Y}_2 = -i\mathbf{B}_2\mathbf{A}_2^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2.$$

定义一新的矢量函数 $\mathbf{K}(z)$:

$$\mathbf{K}(z) = \begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1(z) & (z \in S^+), \\ \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}_2\mathbf{F}_2(z) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1)\mathbf{F}^\infty & (z \in S^-), \end{cases} \quad (23)$$

则式(22)可表示为

$$-i\Delta\phi_{,1}(x_1) = \mathbf{H}[\mathbf{K}^+(x_1) - \mathbf{K}^-(x_1)]. \quad (24)$$

由于在夹杂以外部分, 有 $\Delta\phi_{,1}(x_1) = 0$, 因此式(24) 表明 $\mathbf{K}(z)$ 在整个 z 平面, 除夹杂外, 是处处解析的.

类似的, 应用式(23), (20) 可化为

$$\mathbf{u}_{,1}(x_1) = \mathbf{K}^+(x_1) + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}^-(x_1) - \mathbf{K}_0, \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2)\mathbf{F}^\infty.$$

另一方面, 由式(7)和(24) 得

$$\mathbf{H}_4[\mathbf{K}^+(x_1) - \mathbf{K}^-(x_1)] = 0, \quad (-\infty < x_1 < \infty), \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{H}_4 = (H_{41}, H_{42}, H_{43}, H_{44}),$$

式(26) 的解为^[18].

$$\mathbf{H}_4\mathbf{K}(z) = \mathbf{H}_4\mathbf{K}(\infty). \quad (27)$$

在夹杂表面, 由式(6) 得 $\mathbf{u}_{,1} = \mathbf{i}_2\omega_0 - \mathbf{i}_4E_1(x_1)$, 其中 $\mathbf{i}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{i}_4 = (0, 0, 0, 1)^T$, $E_1(x_1)$ 为一未知函数, 其表示 $E_1(z)$ 在夹杂上的边界值. 因此, 式(25) 可化为:

$$\mathbf{K}^+(x_1) + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}^-(x_1) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{i}_2\omega_0 - \mathbf{i}_4E_1(x_1) \quad (-a < x_1 < +a), \quad (28)$$

显然, 一旦由式(27)和(28) 确定 $\mathbf{K}(z)$ 之后, 根据式(23) 则可确定 $\mathbf{F}_1(z)$ 和 $\mathbf{F}_2(z)$, 然后即可容易地确定所有的场解.

根据本文附录, 可以证明式(28) 的解为:

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{Q}\langle\langle\frac{1}{1+e^{\frac{2\pi\epsilon_a}{z}}}\rangle\rangle\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{K}_0 + \mathbf{i}_2\omega_0 - \mathbf{i}_4E_1(z)] + \mathbf{Q}\langle\langle X_0^\alpha(z)\rangle\rangle\mathbf{P}(z), \quad (29)$$

其中, $\langle\langle\rangle\rangle$ 表示以其中元素为对角元的对角矩阵, 其对角元素的变量随 α 的变化, 且

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Q} = \langle\langle e^{\frac{2\pi\epsilon_a}{z}}\rangle\rangle, \quad X_0^\alpha(z) = \frac{\begin{pmatrix} z+a \\ z-a \end{pmatrix}^{i\epsilon_a}}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad \mathbf{P}(z) = \mathbf{c}_1z + \mathbf{c}_0 \quad (30)$$

在式(29) 中取极限 $z \rightarrow \infty$ 得:

$$\mathbf{K}(\infty) = \mathbf{Q}\langle\langle\frac{1}{1+e^{\frac{2\pi\epsilon_a}{z}}}\rangle\rangle\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{K}_0 + \mathbf{i}_2\omega_0 - \mathbf{i}_4E_1^\infty] + \mathbf{Q}\mathbf{c}_1, \quad (31)$$

此外, 在式(25) 中取极限 $x_1 \rightarrow \infty$, 并应用式(8) 得

$$(\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H})\mathbf{K}(\infty) - \mathbf{K}_0 = \boldsymbol{\epsilon}^\infty, \quad (32)$$

其中

$$\boldsymbol{\epsilon}^\infty = [\epsilon_{11}^\infty, \epsilon_{12}^\infty + \omega^\infty, 2\epsilon_{13}^\infty, -E_1^\infty]^T. \quad (33)$$

在式(33) 中, ϵ_{11}^∞ , ϵ_{12}^∞ , ϵ_{13}^∞ 和 E_1^∞ 分别表示无限远处的线应变分量和电场分量, ω^∞ 为无限远处的转动.

在式(32) 两侧乘 \mathbf{Q}^{-1} 得

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H})\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}(\infty) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{K}_0 + \boldsymbol{\epsilon}^\infty). \quad (34)$$

应用式(30) 的第一式, 式(34) 给出

$$\mathbf{K}(\infty) = \mathbf{Q}\langle\langle\frac{1}{1+e^{\frac{2\pi\epsilon_a}{z}}}\rangle\rangle\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{K}_0 + \boldsymbol{\epsilon}^\infty). \quad (35)$$

把式(35) 代入式(31) 得

$$\mathbf{c}_1 = \langle\langle\frac{1}{1+e^{\frac{2\pi\epsilon_a}{z}}}\rangle\rangle\mathbf{Q}^{-1}[\boldsymbol{\epsilon}^\infty + \mathbf{i}_2\omega_0 - \mathbf{i}_4E_1^\infty]. \quad (36)$$

为了确定剩余的未知常数 c_0 和 ω_0 , 必须利用力平衡条件和电场的无旋性条件(即

$\oint E_1(z) dz = 0$)。考虑到式(24), 这些条件可化为:

$$\oint_{\Gamma} K(z) dz = 0, \quad \text{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} H_2 \oint_{\Gamma} K(z) dz \right] = 0, \quad (37)$$

其中, Γ 表示包围夹杂的顺时针闭围道, 且 $H_2 = [H_{21}, H_{22}, H_{23}, H_{24}]$ 。

把式(29)代入式(37), 然后应用留数定理得

$$c_0 = 0, \quad \text{Im}[H_2 c_1] = 0, \quad (38)$$

把式(36)代入式(38), 即可获得夹杂相对无限远点的转动:

$$\omega_0 - \omega^\infty = \varepsilon_{12}^\infty + \frac{1}{\text{Im}H_{22}} [\varepsilon_{11}^\infty \text{Im}H_{21} + 2\varepsilon_{13}^\infty \text{Im}H_{23}] \cdot \quad (39)$$

为确定式(29)中的 $E_1(z)$, 把式(29)和(35)代入(27)得

$$E_1(z) = \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle Q^{-1} [\varepsilon^\infty + i_2 \omega_0] - \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle X_0^a(z) \right\rangle \right\rangle P(z), \quad (40)$$

其中

$$C_e = H_4 Q \left\langle \left\langle \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle Q^{-1} i_4 \cdot \quad (41)$$

在式(40)中, 分别令 z 等于 x_1^+ 和 x_1^- 得

$$E_1^0(x_1^+) = \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle Q^{-1} [\varepsilon^\infty + i_2 \omega_0] - \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle X_0^a(x_1^+) \right\rangle \right\rangle P(x_1^+), \quad (42)$$

$$E_1^0(x_1^-) = \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle Q^{-1} [\varepsilon^\infty + i_2 \omega_0] - \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle X_0^a(x_1^-) \right\rangle \right\rangle P(x_1^-). \quad (43)$$

利用下列关系:

$$E_1^0(x_1^+) = E_1^0(x_1^-), \quad P(x_1^+) = P(x_1^-), \quad X_0^a(x_1^-) = -e^{-2\pi i \varepsilon} X_0^a(x_1^+) \quad (-a < x_1 < +a),$$

则由式(42)和(43)式相加, 可得夹杂内电场水平分量 $E_1^0(x_1)$ 的表达式:

$$E_1^0(x_1) = \frac{1}{C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle Q^{-1} [\varepsilon^\infty + i_2 \omega_0] - \frac{1}{2C_e} H_4 Q \left\langle \left\langle \frac{e^{\frac{2\pi i z}{a}} - 1}{e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle \left\langle \left\langle X_0^a(x_1^+) \right\rangle \right\rangle P(x_1). \quad (44)$$

在一般情况下, $\varepsilon_a \neq 0$, 因此式(44)右端第二项不等于零, 这意味着当从夹杂上趋近夹杂尖端时, $E_1^0(x_1)$ 是奇异的和振荡的。可以证明 $D_2^0(x_1)$ 具有类似的性质。

3 尖端场

根据式(10)的第二式, 广义力矢 T 可表示为:

$$T(x_1) = -2\text{Im}[Y_1 K^+(x_1)], \quad (45)$$

把式(29)和式(42)代入式(45), 即得在夹杂尖端 $x_{10} = a$ 处 T 的主部:

$$K^+(r) = (R + Q) \left\langle \left\langle X_0^{a+}(x_1) \right\rangle \right\rangle P(x_1), \quad (46)$$

其中 r 表示距尖端的距离, $x_1 = a + r$, 且

$$R = -\frac{1}{C_e} Q \left\langle \left\langle \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi i z}{a}}} \right\rangle \right\rangle Q^{-1} i_4 H_4 Q \cdot$$

把式(46)代入式(45)得

$$T(r) = -2\text{Im}[Y_1(\mathbf{R} + \mathbf{Q}) \langle \langle X_0^{qt}(x_1) \rangle \rangle P(x_1)] \quad (47)$$

式(47), (30)和式(36)表明在夹杂尖端附近, 应力和电位移是奇异的和振荡的, 且其强度取决于材料常数和无限远处的应变。

4 结 论

应用 Stroh 公式, 从理论上研究了位于两不同压电材料之间的介电刚性线性夹杂问题, 分别获得了介质及夹杂内的场解, 由此可获得下面几个结论:

1) 在夹杂尖端附近, 奇异场的结构与相应的裂纹问题是一样的, 但是对于界面夹杂的情况, 所有场变量的奇异性不仅取决于与夹杂垂直方向的应力和电场, 而且也取决于与夹杂平行方向的应力和电场。

2) 在一般情况下, 夹杂内的电场取决于材料常数、无限远处的应变和夹杂的介电常数, 并在夹杂尖端呈现奇异性 and 振荡性。

3) 介质内的所有场变量与夹杂的介电常数无关。

附 录

对于 H 为一般复数时的情形, 假设 $H^{-1}H$ 的特征值为 $-e^{-2\pi i \delta_a}$, 其中:

$$\delta_a = -\frac{1}{2} + i\varepsilon_a \quad (A1)$$

则根据特征值的定义, 有

$$\| -e^{-2\pi i \delta_a} \mathbf{I} - H^{-1}H \| = 0, \quad (A2)$$

注意到

$$-2\pi i \delta_a = -2\pi i \left[-\frac{1}{2} + i\varepsilon_a \right] = \pi i + 2\pi \varepsilon_a \quad (A3)$$

所以

$$-e^{-2\pi i \delta_a} = e^{2\pi \varepsilon_a} \quad (A4)$$

因此, 式(A2)可化为

$$\| H - e^{2\pi \varepsilon_a} H \| = 0 \quad (A5)$$

根据 Suo 的工作^[17], 由式(A5)得

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon, \quad \varepsilon_3 = -i\kappa, \quad \varepsilon_4 = i\kappa, \quad (A6)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \tanh^{-1}[(b^2 - c^2)^{1/2} - b]^{1/2}, \quad \kappa = \frac{1}{\pi} \tanh^{-1}[(b^2 - c^2)^{1/2} + b]^{1/2},$$

$$b = \frac{1}{4} \text{tr}[(D^{-1}W)^2], \quad c = \|D^{-1}W\|, \quad D + iW = H$$

设 Q 为 $H^{-1}H$ 的特征矢量矩阵, 则有

$$Q^{-1}H^{-1}HQ = \Lambda, \quad \Lambda = \langle \langle -e^{-2\pi i \delta_a} \rangle \rangle = \langle \langle e^{2\pi \varepsilon_a} \rangle \rangle \quad (A7)$$

由式(28)两边同乘 Q^{-1} 得

$$[Q^{-1}K(x_1)]^+ + Q^{-1}H^{-1}HQ[Q^{-1}K(x_1)]^- = Q^{-1}[K_0 + i_2\omega_0 - i_4E_1(x_1)], \quad (A8)$$

令

$$Q^{-1}K(x_1) = R(x_1), \quad Q^{-1}[K_0 + i_2\omega_0 - i_4E_1(x_1)] = R^0(x_1), \quad (A9)$$

并注意到式(A7), 则式(A9)可化为

$$R^+(x_1) + \Lambda R^-(x_1) = R^0(x_1), \quad (A10)$$

将式(A10)按行展开得:

$$R_a^+(x_1) - e^{-2\pi i \delta_a} R_a^-(x_1) = R_a^0(x_1) \quad (\alpha = 1 \sim 4), \quad (A11)$$

式(A11)的解为^[18]

$$R_a(z) = \frac{X_0^a(z)}{2\pi i} \int_L \frac{R_a^0(x_1) dx_1}{X_0^a(x_1)(x_1-z)} + X_0^a(z) P_a^*(z), \quad (A12)$$

其中 $P_a^*(z)$ 为一个一阶多项式, 且

$$X_0^a(z) = (z+a)^{-\nu_a} (z-a)^{\nu_a-1}, \quad \nu_a = \frac{1}{2\pi i} \ln g, \quad g = e^{-2\pi\delta_a} \quad (A13)$$

注意到(A1), 由(A13)得

$$X_0^a(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\varepsilon_a}, \quad (A14)$$

考虑到 $E_1(\infty) = E_1^\infty$, 可以证明(A12)最终化为

$$R_a(z) = \frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_a}} R_0^a(z) + X_0^a(z) P_a(z), \quad (A15)$$

其中, $P_a(z)$ 为一新的多项式:

$$P_a(z) = c_1^{(a)} z + c_0^{(a)}. \quad (A16)$$

另一方面, (A15) 可以矢量的形式表示为

$$\mathbf{R}(z) = \left\langle \left\langle \frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_a}} \right\rangle \right\rangle \mathbf{R}_0(z) + \left\langle \left\langle X_0^a(z) \right\rangle \right\rangle \mathbf{P}(z), \quad (A17)$$

其中

$$\mathbf{P}(z) = c_1 z + c_0, \quad c_n = [c_n^{(1)}, c_n^{(2)}, c_n^{(3)}, c_n^{(4)}]^T \quad (n = 1, 0).$$

由(A17)返回到复函数 $\mathbf{K}(z)$ 得

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{Q} \left\langle \left\langle \frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_a}} \right\rangle \right\rangle \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{K}_0 + i_2 \omega_0 - i_4 E_1(z)] + \mathbf{Q} \left\langle \left\langle X_0^a(z) \right\rangle \right\rangle \mathbf{P}(z). \quad (A18)$$

[参 考 文 献]

- [1] Wang Z Y, Zhang H T, Chou Y T. Characteristics of the elastic field of a rigid line inhomogeneity [J]. J Appl Mech, 1985, 52(3): 818—822.
- [2] Wang Z Y, Zhang H T, Chou Y T. Stress singularity at the tip of a rigid line inhomogeneity under anti-plane shear loading[J]. J Appl Mech, 1986, 53(2): 459—461.
- [3] Ballarini R. An integral equation approach for rigid line inhomogeneity problems[J]. Int J Fractures, 1987, 33(1): R23—R26.
- [4] Li Q, Ting T C T. Line inclusions in anisotropic elastic solids[J]. J Appl Mech, 1989, 56(3): 558—563.
- [5] Hao T H, Wu Y C. Elastic plane problem of collinear periodical rigid lines[J]. Engng Fracture Mech, 1989, 33(4): 979—981.
- [6] Jiang C P. The plane problem of collinear rigid lines under arbitrary loads[J]. Engng Fract Mech, 1991, 39(2): 299—308.
- [7] Chen Y H, Hahn H G. The stress singularity coefficient at a finite rigid flat inclusion in an orthotropic plane elastic body[J]. Engng Fract Mech, 1993, 44(3): 359—362.
- [8] 蒋持平. 各向异性材料中共线刚性夹杂的纵向剪切问题[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(2): 147—154.
- [9] Ballarini R. A rigid line inclusion at a bimaterial interface[J]. Engng Fract Mech, 1990, 37(1): 1—5.
- [10] Wu K C. Line inclusion at anisotropic bimaterial interface[J]. Mechanics of Materials, 1990, 10(2): 173—182.
- [11] Chao C K, Chang R C. Thermoelastic problem of dissimilar anisotropic solids with a rigid line inclusion[J]. J Appl Mech, 1994, 61(4): 978—980.
- [12] Asundi A, Deeg W. Rigid inclusions on the interface between two bonded anisotropic media[J]. J

- Mech Phys Solids, 1995, **13**(6): 1045—1058.
- [13] Liang J, Han J C, Du S Y. Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids[J]. Mech Res Commun, 1995, **22**(1): 43—49.
- [14] Chen S W. Rigid line inclusions under antiplane deformation and inplane electric field in piezoelectric materials[J]. Engng Fract Mech, 1997, **56**(2): 265—274.
- [15] Deng W, Meguid S A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials[J]. J Appl Mech, 1998, **65**(1): 76—84.
- [16] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. J Mech Phys Solids, 1992, **40**(4): 739—765.
- [17] Suo Z. Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media[J]. Proc R Soc Lond, 1990, **A427**(1873): 331—358.
- [18] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Leyden: Noordhoff, 1975.

An Interface Inclusion Between Two Dissimilar Piezoelectric Materials

GAO Cun_fa¹, FAN Wei_xun²

(1. Department of Mechanics and Engineering Science,
Peking University, Beijing 100871, P R China;

2. Department of Aircraft, Nanjing University of Aeronautics &
Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract: The generalized two-dimensional problem of a dielectric rigid line inclusion, at the interface between two dissimilar piezoelectric media subjected to piecewise uniform loads at infinity, is studied by means of the Stroh formalism. The problem was reduced to a Hilbert problem, and then closed form expressions were obtained, respectively, for the complex potentials in piezoelectric media, the electric field inside the inclusion and the tip fields near the inclusion. It is shown that in the media, all field variables near the inclusion tip show square root singularity and oscillatory singularity, the intensity of which is dependent on the material constants and the strains at infinity. In addition, it is found that the electric field inside the inclusion is singular and oscillatory too, when approaching the inclusion tips from inside the inclusion.

Key words: piezoelectric material; interface inclusion; complex potential; tip field; Stroh formalism