

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0071-08

计算裂纹柱 Saint_Venant 弯曲的弯曲中心和应力强度因子方法*

汤任基¹, 汤昕燕²

(1. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030; 2. 南京农业大学 农业工程学院, 南京 210032)

(本刊编委汤任基来稿)

摘要: 使用单裂纹解及调和函数的常规解, 裂纹柱受横向力作用而引起的 Saint_Venant 弯曲问题, 被归为解两组积分方程, 并获得了一般解。在此基础上, 对横截面不为薄壁但扭转刚度很小的裂纹柱, 提出了一种计算弯曲中心和应力强度因子的方法, 给出了一些数值算例。

关键词: 裂纹柱; Saint_Venant 弯曲; 弯曲中心; 应力强度因子; 积分方程方法

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引言

在材料力学^[1]中, 为了消除开口薄壁柱体由横向弯曲引起的附加扭转, 只需将横向力移至弯曲中心即可, 材料力学已对开口薄壁柱体的弯曲中心, 给出了近似计算方法。若一实心柱体被一边界裂纹沿其柱轴贯穿, 则由弹性力学^[2]可知, 此柱的扭转刚度将随裂纹的长度增加而显著下降。当此种柱体受横向力作用而 Saint_Venant 弯曲时, 柱体除弯曲外, 它的横截面还产生很大的附加扭转。为了消除这种附加扭转, 可将材料力学中弯曲中心的概念推广到这里。因此按材料力学方法, 将横向力移至弯曲中心, 则柱体只有关于中性轴的弯曲, 而无附加扭转。但关于这种非薄壁的裂纹柱体, 如何计算它的弯曲中心, 却还未见报导。本文主要目的, 是研究非薄壁截面但扭转刚度小的柱体, 在横向力作用下 Saint_Venant 弯曲的弯曲中心计算。关于裂纹柱的 Saint_Venant 弯曲, 本文使用 N. I. Muskhelishvili 的数学提法^[3], 及作者在论文[4]中提出的将未知解分解的方法求解, 通过使用单裂纹解将裂纹产生的间断解进行分离, 然后与调和函数的常规解结合, 从而将裂纹柱的 Saint_Venant 弯曲问题归为解两组积分方程, 并得到了一般解。在此基础上, 对以上非薄壁截面但扭转刚度为小的裂纹柱, 提出了计算其弯曲中心的新方法。此外, 还使用与弯曲和扭转分别对应的两种不同的位错密度函数之和, 定义了裂纹端点的应力强度因子, 最后使用文[4]中的数值法给出了若干算例。

1 基本关系

图 1 中, Ω 为裂纹柱的横截面, (x, y, z) 为惯性主轴, 原点位于柱体左端截面的形心, 图中 Oz 轴未画出。此裂纹柱在受到横向力 W 作用而产生 Saint_Venant 弯曲时, 柱体中的位移可表

* 收稿日期: 2000_01_20; 修订日期: 2000_09_25

作者简介: 汤任基(1935—), 男, 上海市人, 教授。

为如下形式的两种分量之和^[5]:

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z), \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v_1(x, y, z) + v_2(x, y, z), \quad (2)$$

$$w(x, y, z) = w_1(x, y, z) + w_2(x, y, z). \quad (3)$$

以上公式中的第一项为弯曲位移, 它们可表为:

$$u_1(x, y, z) = \beta \left[\frac{\nu}{2}(l-z)(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3 \right], \quad (4)$$

$$v_1(x, y, z) = \beta \nu (l-z)xy, \quad (5)$$

$$w_1(x, y, z) = - \beta \left\{ x(x, y) + x \left[lz - \frac{1}{2}z^2 \right] + xy^2 \right\}, \quad (6)$$

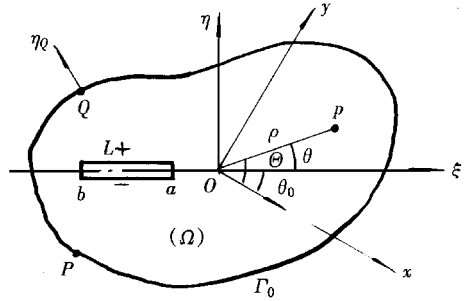


图 1

式中, $\beta = W/EI$ 为横向力系数, E 为弹性模量, I

为截面 Ω 绕 Oy 轴的惯性矩, ν 为泊松比, l 为裂纹柱的长度, $x(x, y)$ 为 Ω 中的未知平面调和函数, 它在边界 $\Gamma = \Gamma_0 + L^\pm$ 上 Q 点的外法向导数满足以下边界条件:

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial n_Q} = - \left[\frac{\nu}{2}(x^2 - y^2) + y^2 \right] \cos(n, x) - (2 + \nu)xy \cos(n, y) \quad (Q(x, y) \in \Gamma), \quad (7)$$

其中 Γ_0 为截面 Ω 的外边界, L^\pm 为裂纹 L 的上下表面. 因此, 寻找弯曲函数 $x(x, y)$ 是势论中熟知的 Neumann 问题中.

公式 (1)~(3) 中的第二项是附加扭转位移, 由以下公式决定:

$$u_2(x, y, z) = - \alpha y, \quad (8)$$

$$v_2(x, y, z) = \alpha x, \quad (9)$$

$$w_2(x, y, z) = \alpha \varphi(x, y). \quad (10)$$

以上位移使柱体绕 Oz 轴转动, $\varphi(x, y)$ 是附加扭转函数, 它与弯曲函数一样, 是区域 Ω 上的平面调和函数, 它在边界 $\Gamma = \Gamma_0 + L^\pm$ 上的外法向导数满足以下边界条件:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n_Q} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \quad (Q(x, y) \in \Gamma), \quad (11)$$

因此, 为了寻找附加扭转函数 $\varphi(x, y)$, 这与弯曲函数一样, 需解一个 Neumann 问题. 此外, 扭率 α 为裂纹柱单位长度的扭转角, 由以下公式计算:

$$\alpha = \frac{\beta \mu \int_{\Omega} \left[x \frac{\partial X}{\partial y} - y \frac{\partial X}{\partial x} - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) y^3 + \left(2 + \frac{\nu}{2} \right) x^2 y \right] d\Omega}{D}, \quad (12)$$

式中 μ 为剪切模量, 扭转刚度 D 按下式计算:

$$D = \mu \int_{\Omega} \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right] d\Omega. \quad (13)$$

与弯曲和扭转对应的剪应力分别由下式给出:

$$\sigma_{zx1}(x, y, z) = - \mu \beta \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\nu}{2}(x^2 - y^2) + y^2 \right], \quad (14)$$

$$\sigma_{zy1}(x, y, z) = - \mu \beta \left[\frac{\partial X}{\partial y} + (2 + \nu)xy \right], \quad (15)$$

及
$$\alpha_{xz2}(x, y, z) = \alpha \mu \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right\}, \quad (16)$$

$$\alpha_{yz2}(x, y, z) = \alpha \mu \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right\}. \quad (17)$$

因此, 作用于裂纹柱横截面 Ω 上的附加扭矩为:

$$M_k = \alpha \mu \int_{\Omega} \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right] d\Omega \quad (18)$$

2 问题的积分方程

根据作者的早先论文[5], 以上所述的弯曲函数和附加扭转函数, 它们均可表为两个独立的平面调和函数的和:

$$\chi(x, y) = \chi_1(x, y) + \chi_2(x, y), \quad (19)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y). \quad (20)$$

以上表达式中的第一项都为常规的调和函数, 它们由柱体的外边界 Γ_0 产生, 可分别地表为:

$$\chi_1(x, y) = \chi_1(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left[\chi_1(Q) \frac{\partial \ln r_{pQ}}{\partial n_Q} - \frac{\partial \chi_1(Q)}{\partial n_Q} \ln r_{pQ} \right] dQ, \quad (21)$$

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left[\varphi_1(Q) \frac{\partial \ln r_{pQ}}{\partial n_Q} - \frac{\partial \varphi_1(Q)}{\partial n_Q} \ln r_{pQ} \right] dQ, \quad (22)$$

式中 $\chi_1(Q)$ 和 $\varphi_1(Q)$ 分别为函数 $\chi_1(x, y)$ 和 $\varphi_1(x, y)$ 的未知边界值, $\frac{\partial \chi_1(Q)}{\partial n_Q}$ 和 $\frac{\partial \varphi_1(Q)}{\partial n_Q}$ 为由边界条件(7) 和(11) 确定的已知外法向导数, $p = p(x, y)$ 为区域 Ω 上的内点, Q 为边界 Γ_0 上的积分点, n_Q 为关于 Γ_0 的外向法线, r_{pQ} 为点 p 和 Q 间的距离:

$$r_{pQ} = \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2}. \quad (23)$$

此外, $\chi_2(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 为由裂纹上下岸 L^{\pm} 产生的平面奇异调和函数, 它们可使用与弯曲与附加扭转对应的未知位错密度函数 $f(u)$ 和 $f(u)$ 按下式表示:

$$\chi_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \arctan \frac{u \sin(\Theta - \theta_0)}{\rho + u \cos(\Theta - \theta_0)} f(u) du, \quad (24)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \arctan \frac{u \sin(\Theta - \theta_0)}{\rho + u \cos(\Theta - \theta_0)} f(u) du, \quad (25)$$

式中 $\rho = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ 和 $\Theta = \arctan(x/y)$ 为图 1 中的极坐标. 将以下结果代入方程(14) ~ (17), 便得到弯曲剪应力和附加扭转剪应力, 然后令它们在裂纹柱边界 $\Gamma = \Gamma_0 + L^{\pm}$ 满足自由边界条件, 则图 1 弯曲问题便化为求解以边界条件(7) 和(11) 表示的两个 Neumann 问题, 由此求得图 1 Saint_Venant 弯曲问题的以下两组积分方程

$$\int_{\Gamma_0} K_{11}(Q, P) \chi_1(Q) dQ - \pi \chi_1(P) + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_{21}(u, P) f(u) du = R_1(P) \quad (P \in \Gamma_0), \quad (26)$$

$$\int_{\Gamma_0} K_{12}(Q, \zeta) \chi_1(Q) dQ + \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{u - \zeta} + K_{22}(u, \zeta) \right] f(u) du = R_2(\zeta) \quad (\zeta \in L), \quad (27)$$

$$\int_{\Gamma_0} K_{11}(Q, P) \varphi_1(Q) dQ - \pi \varphi_1(P) + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_{21}(u, P) f(u) du = R_1(P) \quad (P \in \Gamma_0), \quad (28)$$

$$\int_{\Gamma_0} K_{12}(Q, \zeta) \varphi_1(Q) dQ + \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{u - \zeta} + K_{22}(u, \zeta) \right] f(u) du = R_2(\zeta) \quad (\zeta \in L). \quad (29)$$

式中积分核给出如下:

$$K_{11}(Q, P) = \frac{(x_Q - x_P) \cos(n_Q, x) + (y_Q - y_P) \cos(n_Q, y)}{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}. \quad (30)$$

$$K_{21}(u, P) = \int_{\Gamma_0} \frac{u \ln_{QP} F(x, y) dQ}{[x_Q^2 + y_Q^2 + u(x_Q \cos \theta_0 + y_Q \sin \theta_0)]^2 + [u(y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0)]^2}, \quad (31)$$

式中 $F(x, y) = [(x_Q^2 - y_Q^2) \sin \theta_0 - y_Q(2x_Q \cos \theta_0 + u)] \cos(n_Q, x) + [(x_Q^2 - y_Q^2) \cos \theta_0 + x_Q(2y_Q \sin \theta_0 + u)] \cos(n_Q, y)$.

$$K_{12}(Q, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \theta_0 \cos(n_Q, x) - \cos \theta_0 \cos(n_Q, y)}{2[x_Q + \zeta \cos \theta_0]^2 + (y_Q + \zeta \sin \theta_0)^2} + \frac{[(x_Q + \zeta \cos \theta_0) \cos(n_Q, x) + (y_Q + \zeta \sin \theta_0) \cos(n_Q, y)](y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0)}{[(x_Q + \zeta \cos \theta_0)^2 + (y_Q + \zeta \sin \theta_0)^2]^2} \right\}, \quad (32)$$

$$K_{22}(u, \zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left\{ \frac{(y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0) u G(x, y) dQ}{(x_Q + \zeta \cos \theta_0)^2 + (y_Q + \zeta \sin \theta_0)^2} \right\}, \quad (33)$$

式中 $G(x, y) = \frac{[(x_Q^2 - y_Q^2) \sin \theta_0 - 2x_Q y_Q \cos \theta_0 - y_Q u] \cos(n_Q, x)}{[x_Q^2 + y_Q^2 + u(x_Q \cos \theta_0 + y_Q \sin \theta_0)]^2 + [u(y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0)]^2} + \frac{[(x_Q^2 - y_Q^2) \cos \theta_0 + 2x_Q y_Q \sin \theta_0 + x_Q u] \cos(n_Q, y)}{[x_Q^2 + y_Q^2 + u(x_Q \cos \theta_0 + y_Q \sin \theta_0)]^2 + [u(y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0)]^2}$.

而非齐次项为:

$$R_1(p) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \left\{ [(x_Q^2 - y_Q^2) \cos(n_Q, x) + 2x_Q y_Q \cos(n_Q, y)] v + H(x, y) \right\} \ln_{QP} dQ, \quad (34)$$

式中 $H(x, y) = 2y_Q^2 \cos(n_Q, x) + 4x_Q y_Q \cos(n_Q, y)$.

$$R_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{(y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0) N(x, y) dQ}{2[x_Q + \zeta \cos \theta_0]^2 + (y_Q + \zeta \sin \theta_0)^2} + \frac{(4 + \nu - 6\sin^2 \theta_0) \zeta^2 \sin \theta_0}{2} \quad (35)$$

式中 $N(x, y) = [(x_Q^2 - y_Q^2) \cos(n_Q, x) + 2x_Q y_Q \cos(n_Q, y)] v + 2y_Q^2 \cos(n_Q, x) + 4x_Q y_Q \cos(n_Q, y)$.

$$R_1(P) = \int_{\Gamma_0} [y_Q \cos(n_Q, x) - x_Q \cos(n_Q, y)] \ln_{QP} dQ. \quad (36)$$

$$R_2(\zeta) = -\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{[y_Q \cos(n_Q, x) - x_Q \cos(n_Q, y)](y_Q \cos \theta_0 - x_Q \sin \theta_0)}{[(x_Q + \zeta \cos \theta_0)^2 + (y_Q + \zeta \sin \theta_0)^2]} dQ. \quad (37)$$

以上获得的两组积分方程是非耦合的且为同类型,因而可用同一方法求解.此外,为保证以上积分方程组(26)~(27)和(28)~(29)解的唯一性,对于内裂纹,则还需满足以下补充条件:

$$\int_a^b f(u) du = \int_a^b f(u) du = 0. \quad (38)$$

对于边界裂纹,当裂纹端点 a 和 b 与边界 Γ_0 接触时,则补充条件为:

$$f \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) = \text{有界}, \quad f \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) = \text{有界}. \quad (39)$$

最后指出,以上所得积分方程是两组混合型积分方程,其中第一个是常规的边界积分方程,而第二个是 Cauchy 型奇异积分方程,解这些方程,则两组未知函数 $(x_1(Q), f(u))$ 和 $(\varphi_1(Q), f(u))$ 即可求得,于是便得到弯曲函数 $x(x, y)$ 和附加扭转函数 $\varphi(x, y)$.

3 弯曲中心和应力强度因子

为了消除由(18)方程给出的附加扭矩,材料力学基础中的弯曲中心概念可推广到这里。实际上,对于图1所示的情形,若将横向力 W 沿 y 轴并平行于 x 轴,移至弯曲中心,则无附加扭转而只有关于中性轴的弯曲,记弯曲中心沿 y 轴方向距原点的距离为 e ,则使用由(18)式表示的附加扭矩 M_K 及关系式(12),便得:

$$e = \frac{M_K}{W} = \frac{\int_{\Omega} \left[x \frac{\partial x}{\partial y} - y \frac{\partial x}{\partial y} - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) y^3 + \left(2 + \frac{\nu}{2} \right) x^2 y \right] d\Omega}{2(1 + \nu)I} \quad (40)$$

图1中,裂纹 L 的应力强度因子可使用裂纹尖端邻域中的奇性应力场求得,根据熟知的定义,端点 a 和 b 的应力强度因子可使用位错密度函数按下式决定:

$$K_{III}(a) = - \mu \lim_{\rho \rightarrow a^+} \sqrt{2(\rho - a)} [\mathfrak{F}(\rho) - \mathfrak{G}(\rho)] \cdot \quad (41)$$

$$K_{III}(b) = \mu \lim_{\rho \rightarrow b^-} \sqrt{2(b - \rho)} [\mathfrak{F}(\rho) - \mathfrak{G}(\rho)] \cdot \quad (42)$$

4 数值法

一般地说,要求得以上混合型积分方程(26)~(27)及(28)~(29)的封闭解是不可能的,因此,这里给出以上方程的数值处理方法。由于以上两组积分方程是相似的,故仅对(26)~(27)方程进行数值处理。可以指出,这组方程可使用文[4]介绍的方法求解,因而这里不再详细介绍,而只列出若干有用的结果。将边界 Γ_0 分割为 n 段,并在其上取定 n 个节点,另外对沿裂纹线 $L = (a, b)$ 的积分取定 M 个 Gauss-Chebyshev 离散点,则可使用常规的边界元方法[4]计算关于边界 Γ_0 的积分,而使用 Gauss-Chebyshev 求积公式[4]计算关于函数 $f(u)$ 的积分,于是积分方程(26~27)及其补充条件(38)便化为以下 $n + M$ 个联立代数方程:

$$\sum_{j=1}^n (a_j - \pi \delta_j) x_1(Q_j) + \sum_{s=1}^M \frac{K_{21}(u_s, P_i)}{M} F(u_s) = R_1(P_i), \quad (43)$$

$$\sum_{j=1}^n K_{12}(Q_j, \zeta_q) h_j x_1(Q_j) + \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \left[\frac{b-a}{2(u_s - \zeta_q)} + K_{22}(u_s, \zeta_q) \right] F(u_s) = R_2(\zeta_q), \quad (44)$$

$$\sum_{s=1}^M F(u_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, M) \cdot \quad (45)$$

一般地说,以上方程组是独立的, $x_1(Q_j)$ 为函数 $x_1(Q)$ 在边界 Γ_0 上节点 Q_j 的未知节点值, $F(u_s)$ 是新的未知函数 $F(u) = \sqrt{(u-a)(b-u)} f(u)$ 在裂纹线 $L = (a, b)$ 上离散点 u_s 的未知离散值, $R_1(P_i)$ 和 $R_2(\zeta_q)$ 分别为函数 $R_1(P)$ 和 $R_2(\zeta)$ 在节点 P_i 和离散点 ζ_q 的已知值。此外,以上联立代数方程的所有系数均为已知,它们可由积分方程(26)~(27)中的积分核 $K_{ij}(*, *)$ 按文[4]的方法决定。

方程组(43)~(45)一共给出了 $n + M$ 个代数方程,因而可确定未知数 $x_1(Q_j)$ 和 $F(u_s)$, 在求得这些未知数后,便可使用 Lagrangina 插值公式及方程(21), (24) 和(19) 近似地决定弯曲函数 $x(x, y)$ 。很明显,附加扭转函数 $\varphi(x, y)$ 亦可按以上方法近似决定,于是图1所示的 Saint_Venant 弯曲问题数值地得到解决。另外,再对方程(13)使用 Green 公式,则图1所示裂纹柱的扭转刚度可用以下离散公式计算:

$$D = \frac{D}{\mu} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{3} (x_j^3 l_j + y_j^3 m_j) + \varphi(Q_j) (x_j m_j - y_j l_j) \right] h_j +$$

$$\frac{\pi(b-a)}{2M} \sum_{s=1}^M (u_s^2 - b^2) F(u_s) \cdot \quad (46)$$

类似地, 由方程(40)和(41)~(42), 弯曲中心和应力强度因子的离散公式分别为:

$$e = \frac{1}{2(1+\nu)I} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[x_j(Q_j)(y_j l_j - x_j m_j) + \frac{4+\nu}{8} (2x_j^2 y_j^2 + y_j^4) m_j - \frac{3}{4} y_j^4 m_j \right] h_j + \frac{\pi(b-a)}{2M} \sum_{s=1}^M (u_s^2 - b^2) F(u_s) \right\}, \quad (47)$$

$$K_{III}(a) = \beta \mu \sqrt{\frac{b-a}{2}} \left[F(-1) + \frac{\alpha}{\beta} F(-1) \right], \quad (48)$$

$$K_{III}(b) = -\beta \mu \sqrt{\frac{b-a}{2}} \left[F(1) + \frac{\alpha}{\beta} F(1) \right], \quad (49)$$

$$\text{式中: } I = \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n (x_j^3 l_j h_j), \quad (50)$$

$$F(\pm 1) = \frac{\cos(M \arccos(\pm 1))}{M} \sum_{s=1}^M \frac{(-1)^{s+1} \sin\left(\frac{2s-1}{2M}\pi\right)}{(\pm 1) - \cos\left(\frac{2s-1}{2M}\pi\right)} F(u_s) \cdot \quad (51)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{D} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[x_j(Q_j)(x_j m_j - y_j l_j) + \frac{4+\nu}{8} (2x_j^2 y_j^2 + y_j^4) m_j - \frac{3}{4} y_j^4 m_j \right] h_j + \frac{\pi(b-a)}{2M} \sum_{s=1}^M (u_s^2 - b^2) F(u_s) \right\} \cdot \quad (52)$$

5 数值结果

为了求解由图1所示的一些问题, 下面选择若干例子用以上数值法进行求解。

例1 带有偏心裂纹的圆柱

裂纹柱的形状及几何参数由图2a给出, 则其扭转刚度 $D = \mu R^4 D^*$, 弯曲中心 $e = Re^*$ 及应力强度因子

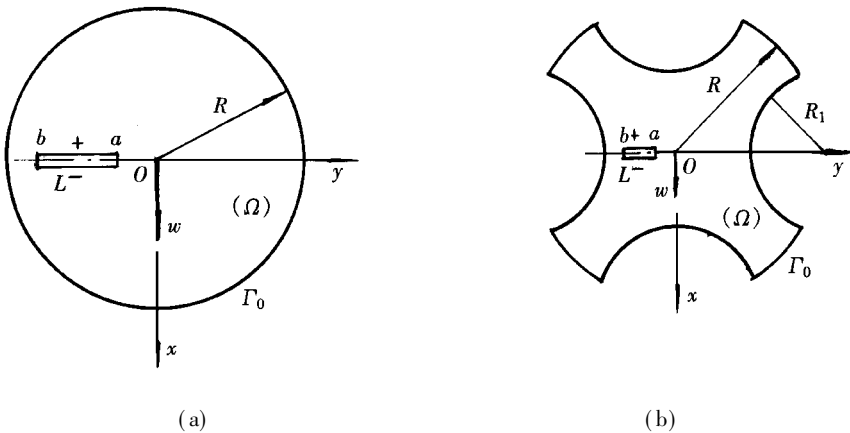


图 2

$$K_{III}(a) = \beta \mu \sqrt{\frac{b-a}{2}} R^2 [K_{III}^*(a) + K_{III}^*(a)]$$

$$K_{III}(b) = -\beta \mu \sqrt{\frac{b-a}{2}} R^2 [K_{III}^*(b) + K_{III}^*(b)]$$

列于表 1(内裂纹)和表 2(边界裂纹):

表 1 $D^*, e^*, K_{III}^*(a), K_{III}^*(b), K_{III}^*(a)$ 和 $K_{III}^*(b)$ 的列表值

(内裂纹: $L = (a, b), (b + a)/2R = 0.5; \nu = 0.3$)

$(b - a)/2R$	0.3	0.25	0.2	0.1	0.05
D^*	1.483 4	1.510 7	1.531 2	1.556 5	1.562 5
e^*	0.066 1	0.044 5	0.027 8	0.006 8	0.001 7
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	0.950 6	0.928 4	0.910 4	0.885 3	0.878 6
	0.960 5	0.923 7	0.899 8	0.876 2	0.872 4
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	0.035 4	0.024 2	0.015 5	0.004 0	0.001 1
	0.065 0	0.040 0	0.023 1	0.004 9	0.001 2

表 2 $D^*, e^*, K_{III}^*(a), K_{III}^*(b), K_{III}^*(a)$ 和 $K_{III}^*(b)$ 的列表值

(边界裂纹: $L = (a, b), b/R = 1; \nu = 0.3$)

$(b - a)/2R$	0.3	0.25	0.2	0.1	0.05
D^*	1.047 0	1.211 6	1.338 2	1.505 6	1.549 1
e^*	0.269 7	0.175 0	0.106 6	0.024 7	0.005 8
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	1.961 7	1.691 1	1.506 9	1.262 9	1.173 8
	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	0.855 7	0.438 0	0.230 0	0.046 1	0.010 5
	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

表 3 $D^*, e^*, K_{III}^*(a), K_{III}^*(b), K_{III}^*(a)$ 和 $K_{III}^*(b)$ 的列表值

(内裂纹: $L = (a, b), R_1/R = 0.6, (b - a)/2R = 0.1, \nu = 0.3$)

$(b + a)/2R$	0.1	0.15	0.2	0.25
D^*	0.082 4	0.081 9	0.081 0	0.079 3
e^*	0.004 1	0.006 7	0.010 1	0.015 2
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	0.577 0	0.596 6	0.630 4	0.686 5
	0.620 6	0.662 8	0.723 7	0.839 9
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	0.001 3	0.004 5	0.010 9	0.024 3
	0.004 1	0.009 7	0.020 2	0.042 8

例 2 带有偏心裂纹的花十字形圆柱

裂纹柱的形状及几何参数由图 2b 给出, 则柱的扭转刚度 $D = \beta R^4 D^*$, 弯曲中心 $e = Re^*$ 及应力强度因子

$$K_{III}(a) = \beta \mu \sqrt{\frac{b-a}{2}} R^2 [K_{III}^*(a) + K_{III}^*(a)]$$

$$K_{III}(b) = - \beta \mu \sqrt{\frac{b-a}{2}} R^2 [K_{III}^*(b) + K_{III}^*(b)]$$

列于表3(内裂纹)和表4(边界裂纹):

表 4 D^* , e^* , $K_{III}^*(a)$, $K_{III}^*(b)$, $K_{III}^*(a)$ 和 $K_{III}^*(b)$ 的列表值
(边界裂纹: $L = (a, b)$, $R_1/R = 0.6$; $b/R = 0.4$, $\nu = 0.3$)

$(b+a)/2R$	0.025	0.05	0.075	0.10
D^*	0.083 0	0.080 8	0.077 0	0.071 6
e^*	0.000 0	0.006 9	0.019 7	0.039 0
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	1.229 1	1.250 8	1.320 4	1.454 8
	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
$K_{III}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	0.000 2	0.033 0	0.2097 3	0.213 5
	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0

[参 考 文 献]

- [1] 铁摩辛柯 S, 盖尔 J. 材料力学[M]. 胡人礼译. 北京: 科学出版社, 1978.
- [2] 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 等. 弹性柱体的扭转理论[M]. 北京: 科学出版社, 1956.
- [3] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity[M]. Groningen_Holland: P. Noordhoff Ltd Press, 1953.
- [4] TANG Ren_ji, CHEN Wei_jiang. Boundary element method to solve torsion problem of cracked cylinder[J]. Acta Mechanica Solids Sinica, 1990, 3(4): 447—455.
- [5] 汤任基. 含径向裂纹系的圆柱的弯曲与扭转[J]. 固体力学学报, 1983, (3): 341—353.

Method to Calculate Bending Center and Stress Intensity Factors of Cracked Cylinder Under Saint_Venant Bending

TANG Ren_ji¹, TANG Xin_yan²

(1. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China;

2. Agricultural Engineering College, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210032, P R China)

Abstract: Using the single crack solution and the regular solution of plane harmonic function, the problem of Saint_Venant bending of a cracked cylinder by a transverse force was reduced to solving two sets of integral equations and its general solution was then obtained. Based on the obtained solution, a method to calculate the bending center and the stress intensity factors of the cracked cylinder whose cross section is not thin_walled, but of small torsion rigidity is proposed. Some numerical examples are given.

Key words: cracked cylinder; Saint_Venant bending; bending center; stress intensity factors; integral equation method