

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0056-15

# 横观各向同性饱和弹性多孔介质 非轴对称动力响应\*

张引科, 黄 义

(西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055)

(我刊编委黄义来稿)

摘要: 应用 Fourier 展开和 Hankel 变换求解了简谐激励下横观各向同性饱和弹性多孔介质的非轴对称 Biot 波动方程, 得到了一般解。用一般解给出了多孔介质总应力分量的表达式。最后对求解横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应边值问题的方法作了系统说明, 并且给出了数值分析特例。

关键词: Biot 波动方程; 横观各向同性饱和弹性多孔介质; 非轴对称动力响应  
中图分类号: O357.3 文献标识码: A

## 引 言

饱和多孔介质的动力响应问题是涉及地球物理勘探、地震工程、石油开采、核废料处理、水利工程和土木工程等领域的重要基础课题。自从 Biot<sup>[1~3]</sup>建立了饱和多孔介质本构关系和波动方程以来, 有关这方面的研究越来越引起人们的关注。已经有几种处理饱和多孔介质动力响应的方法, 如 Ziekewicz 等<sup>[4]</sup>的有限元法、Bougacha 等<sup>[5, 6]</sup>的空间半离散有限元技术、Chang<sup>[7]</sup>和 Dominguez<sup>[8]</sup>的频域边界元法、Chen 等<sup>[9]</sup>的 Laplace 域边界元法和 Dargush 等<sup>[10]</sup>提出的求解简谐激励下饱和弹性多孔介质轴对称动力响应的边界元法等。另外还有: Philippacopoulos<sup>[11]</sup>用 Hankel 变换方法解出了轴对称波动方程; 张玉红<sup>[12]</sup>对不可压缩液体饱和弹性多孔介质低频非轴对称动力响应问题作了分析。

本文对可压缩单相流体饱和横观各向同性弹性多孔介质的非轴对称动力响应进行讨论。用 Fourier 展开和 Hankel 变换方法得到了非轴对称情况下 Biot 方程的一般解; 给出了多孔介质总应力分量的表达式; 对饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应边值问题的求解方法作了系统说明, 给出了半空间横观各向同性饱和弹性多孔介质在表面竖向简谐荷载作用下表面竖向位移的数值分析结果。

## 1 Biot 波动方程

以多孔介质固体骨架的平均位移  $u$  和孔隙流体相对于固体骨架运动的体积通量  $w$  为广义

\* 收稿日期: 2000\_01\_28; 修订日期: 2000\_09\_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59678003)

作者简介: 张引科(1964—), 男, 陕西宝鸡人, 副教授, 博士, 从事非饱和土本构关系和土动力学研究;  
黄义(1936—), 男, 陕西汉中人, 教授, 博导。

坐标, 把 Lagrange 方程写成

$$\frac{dP}{du_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial u_i} \right), \quad \frac{dP}{dw_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial w_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial w_i} \quad (1a, b)$$

其中,  $T$  是饱和多孔介质的动能密度;  $D$  是耗散函数;  $P$  是势能(应变能)密度, 它由下式给出

$$2P = \tau_{ij} e_{ij} + p \xi \quad (2)$$

$\tau_{ij}$  是饱和多孔介质总应力张量;  $e_{ij}$  是多孔介质固体骨架应变张量;  $p$  是孔隙流体压力, 另外

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \xi = \text{div } \mathbf{w} = \phi(e - \varepsilon), \\ e &= \text{div } \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \text{div } \mathbf{U}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$\mathbf{U}$  是孔隙流体平均位移,  $\phi$  是多孔介质的孔隙率。

假设固体骨架是线弹性体, 并且孔隙流体可压缩。饱和多孔介质的应力应变关系是

$$\tau_{ij} = A_{ij}^{kl} e_{kl} + M_{ij} \xi, \quad p = M_{ij} e_{ij} + M \xi \quad (4a, b)$$

这里,  $A_{ij}^{kl}$ 、 $M_{ij}$  和  $M$  是饱和多孔介质的弹性常数。

如果孔隙流体的宏观流动速度(平均流动速度)和微观流动速度(孔隙内流动速度)之间是线性关系, 那么介质的动能密度由下式给出

$$2T = \rho_1 u_i u_i + 2 \rho_l w_i u_i + m_{ij} w_i w_j \quad (5)$$

式中,  $\rho$  是饱和多孔介质密度,  $\rho_l$  是孔隙流体密度;  $m_{ij}$  是反映孔隙流体宏观流动速度和微观流动速度之间关系的张量。

把孔隙流体看成 Newton 流体, 反映多孔介质单位体积内摩擦功率耗散的耗散函数  $D$  满足

$$2D = \eta r_{ij} w_i w_j \quad (6)$$

其中,  $\eta$  是孔隙流体动力粘滞系数,  $r_{ij}$  是与孔隙形状有关的张量。

对于横观各向同性饱和弹性多孔介质, 取  $z$  轴沿介质对称轴方向,  $x-y$  平面平行于各向同性平面, 张量  $m_{ij}$  和  $r_{ij}$  分别是

$$[m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad [r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

应力应变关系(4)式具体表示成

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2B_1 + B_2 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 \\ B_2 & 2B_1 + B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 \\ B_3 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_7 \\ 0 & 0 & 0 & 2B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_1 & 0 & 0 \\ B_6 & B_6 & B_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中,  $B_j (j = 1, 2, \dots, 8)$  是介质弹性常数。

为了分析方便, 采用柱坐标系, 取  $z$  轴沿介质对称轴方向,  $r-\theta$  平面平行于各向同性平面。

从以上关系式可以推导出简谐激励下  $\mathbf{u}$  和  $p$  满足的波动方程

$$\begin{aligned} B_1 \left[ \dots^2 u_r - \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] + B_5 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 u_r + \left( B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) \frac{\partial e_h}{\partial r} + \\ \left( B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left( \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho B_1 \right) \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$B_1 \left[ \nabla^2 u_0 - \frac{1}{r} \left( -2 \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) \right] + B_5 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 u_0 + \left( B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) \frac{\partial e_h}{r \partial \theta} + \left( B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial}{r \partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left( \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right) \frac{\partial p}{r \partial \theta} = 0, \quad (9b)$$

$$\left( B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial e_h}{\partial z} + B_5 \nabla^2 u_z + \left( B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \rho_3^* \omega^2 u_z + \left( \frac{B_7}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_3 \right) \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (9c)$$

$$\left( \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right) e_h + \left( \frac{B_7}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_3 \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \beta_1 \nabla^2 p - \beta_3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{p}{B_8} = 0, \quad (9d)$$

$$\text{式中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \quad e_h = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta}, \quad (10a, b)$$

$$\rho_j^* = \rho - \beta_j \rho_j \omega^2, \quad \beta_j = \frac{1}{(\omega^2 m_j - i \omega r_j)} \quad (j = 1, 3), \quad (10c, d)$$

$u_r$ ,  $u_\theta$  和  $u_z$  分别是  $\mathbf{u}$  沿径向、周向和轴向的分量,  $\omega$  是简谐激励的圆频率;  $i$  是虚数单位. 方程组(9) 就是横观各向同性饱和弹性多孔介质在简谐激励下稳态动力响应的控制方程, 即 Biot 波动方程.

## 2 Biot 波动方程的非轴对称解

对方程(9a)和(9b)作运算  $\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) (9a) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (9b)$ , 得

$$\left( 2B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) \nabla^2 e_h + B_5 \frac{\partial^2 e_h}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 e_h + \left( B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \nabla^2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \left( \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right) \nabla^2 p = 0. \quad (11)$$

方程组(9)和(11)中只有四个独立方程.

把  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ ,  $e_h$  和  $p$  关于  $\theta$  作 Fourier 展开, 取下面的形式

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \\ e_h(r, \theta, z) \\ p(r, \theta, z) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} u_{rn}(r, z) \\ u_{zn}(r, z) \\ e_{hn}(r, z) \\ p_n(r, z) \end{cases} \cos n\theta, \quad (12a)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}(r, z) \sin n\theta. \quad (12b)$$

上式代入方程组(9)和(11), 有

$$B_1 \left\{ \frac{\partial^2 u_{rn}}{\partial r^2} + \frac{\partial u_{rn}}{r \partial r} - \frac{1}{r^2} [(n^2 + 1) u_{rn} + 2n u_{\theta n}] \right\} + B_5 \frac{\partial^2 u_{rn}}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 u_{rn} + \left( B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) \frac{\partial e_{hn}}{\partial r} + \left( B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} \right) + \left( \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right) \frac{\partial p_n}{\partial r} = 0, \quad (13a)$$

$$B_1 \left\{ \frac{\partial^2 u_{0n}}{\partial r^2} + \frac{\partial u_{0n}}{r \partial r} - \frac{1}{r^2} [(n^2 + 1) u_{0n} + 2n u_{rn}] \right\} + B_5 \frac{\partial^2 u_{0n}}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 u_{0n} - \left[ B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] \frac{n e_{hn}}{r} - \left[ B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{n}{r} \left( \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} \right) - \left[ \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right] \frac{p_n}{r} = 0 \quad (13b)$$

和

$$\left[ 2B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] \cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} e_{hn} + B_5 \frac{\partial^2 e_{hn}}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 e_{hn} + \left[ B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{\partial}{\partial z} ( \cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} u_{zn} ) + \left[ \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right] \cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} p_n = 0, \quad (14a)$$

$$B_5 \cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} u_{zn} + \left[ B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right] \frac{\partial^2 u_{zn}}{\partial z^2} + \rho_3^* \omega^2 u_{zn} + \left[ B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{\partial e_{hn}}{\partial z} + \left[ \frac{B_7}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_3 \right] \frac{\partial p_n}{\partial z} = 0, \quad (14b)$$

$$\beta_1 \cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} p_n + \beta_3 \frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2} + \frac{p_n}{B_8} - \left[ \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1 \right] e_{hn} - \left[ \frac{B_7}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_3 \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} = 0, \quad (14c)$$

其中

$$\cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{n^2}{r^2}. \quad (15)$$

当  $n = 0$  时方程组(13)中  $u_{0n} = 0$ , 问题简化为轴对称问题。本文只对  $n > 0$  的非轴对称情况进行讨论。

## 2.1 方程组(14)的 Hankel 变换解

对方程组(14)中的各量作  $n$  阶 Hankel 变换, 并利用关系式

$$\int_0^\infty \cdot {}^{\cdot 2}_{(n)} g J_n(kr) r dr = -k^2 \int_0^\infty g J_n(kr) r dr \quad (16)$$

得到

$$B_5 \frac{\partial^2 e_{hn}}{\partial z^2} + b_1 e_{hn} - b_3 k^2 \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} - b_6 k^2 p_n = 0, \quad (17a)$$

$$b_4 \frac{\partial^2 u_{zn}}{\partial z^2} + b_3 \frac{\partial e_{hn}}{\partial z} + b_7 \frac{\partial p_n}{\partial z} + b_5 u_{zn} = 0, \quad (17b)$$

$$\beta_3 \frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2} + b_8 p_n - b_7 \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} - b_6 e_{hn} = 0, \quad (17c)$$

式中

$$b_1 = \omega^2 \rho_1^* - \left[ 2B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] k^2, \quad b_3 = B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8}, \quad (18a, b)$$

$$b_4 = B_4 - \frac{B_7^2}{B_8}, \quad b_5 = \omega^2 \rho_3^* - B_5 k^2, \quad (18c, d)$$

$$b_6 = \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_1, \quad (18e)$$

$$b_7 = \frac{B_7}{B_8} + \omega^2 \rho \beta_3, \quad (18f)$$

$$b_8 = \frac{1}{B_8} - \beta_1 k^2, \quad (18g)$$

其中,  $e_{hn}$ 、 $u_{zn}$  和  $p_n$  分别表示  $e_{hn}$ 、 $u_{zn}$  和  $p_n$  的  $n$  阶 Hankel 变换。方程组(17)用矩阵表示是

$$\begin{bmatrix} B_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{bmatrix} e_{hn} \\ u_{zn} \\ p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b_3 k^2 & 0 \\ b_3 & 0 & b_7 \\ 0 & -b_7 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} e_{hn} \\ u_{zn} \\ p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -b_6 k^2 \\ 0 & b_3 & 0 \\ -b_6 & 0 & b_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{hn} \\ u_{zn} \\ p_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (19)$$

设(19)式的解是

$$\begin{bmatrix} e_{hn} \\ u_{zn} \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \end{bmatrix} \exp(\lambda z) \quad (20)$$

代入(19)式,有

$$\begin{bmatrix} B_5 \lambda^2 + b_1 & -b_3 k^2 \lambda & -b_6 k^2 \\ b_3 \lambda & b_4 \lambda^2 + b_5 & b_7 \lambda \\ -b_6 & -b_7 \lambda & \beta_3 \lambda^2 + b_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (21)$$

上式有非零解的条件是系数行列式等于零,即

$$a_1 \lambda^6 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^2 + a_4 = 0, \quad (22)$$

其中  $a_1 = B_5 b_4 \beta_3, \quad (23a)$

$$a_2 = B_5 (\beta_3 b_5 + b_4 b_8 + b_7^2) + \beta_3 b_1 b_4 + \beta_3 b_3^2 k^2, \quad (23b)$$

$$a_3 = B_5 b_5 b_8 + b_1 (\beta_3 b_5 + b_4 b_8 + b_7^2) + (b_3^2 b_8 + 2b_3 b_6 b_7 - b_6^2 b_4) k^2, \quad (23c)$$

$$a_4 = b_1 b_5 b_8 - b_5 b_6^2 k^2. \quad (23d)$$

方程(22)的根是  $\pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \pm \lambda_3$  ( $\text{Re} \lambda_s \geq 0, s = 1, 2, 3$ ), 它们由下式给出

$$\lambda_1^2 = A + B - \frac{a_2}{3a_1}, \quad (24a)$$

$$\lambda_2^2 = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3} A + \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3} B - \frac{a_2}{3a_1} \right\} \right. \quad (24b)$$

$$\left. \lambda_3^2 = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3} B + \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3} A - \frac{a_2}{3a_1} \right\} \right. \quad (24c)$$

式中  $A = 3 \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, B = 3 \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, Q = \left( \frac{p}{3} \right)^3 + \left( \frac{q}{2} \right)^2, \quad (25a, b)$

$$p = -\frac{1}{3} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \frac{a_3}{a_1}, \quad q = 2 \left( \frac{a_2}{3a_1} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{a_2 a_3}{a_1^2} \right) + \frac{a_4}{a_1}. \quad (25c)$$

设  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3$  互不相等, 方程组(17)的解是

$$e_{hn} = \sum_{s=1}^3 \left\{ \alpha_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}, \quad (26a)$$

$$u_{zn} = \sum_{s=1}^3 \left\{ \gamma_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) - D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}, \quad (26b)$$

$$p_n = \sum_{s=1}^3 \left\{ [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}, \quad (26c)$$

其中

$$\alpha_s = [(b_4 b_6 - b_3 b_7) \lambda_s^2 + b_5 b_6] \frac{k^2}{\Delta_s}, \quad (27a)$$

$$\gamma_s = -[B_5 b_7 \lambda_s^2 + b_1 b_7 + b_3 b_6 k^2] \frac{\lambda_s}{\Delta_s}, \quad (27b)$$

$$\Delta_s = B_5 b_4 \lambda_s^4 + (B_5 b_5 + b_1 b_4 + b_3^2 k^2) \lambda_s^2 + b_1 b_5, \quad (27c)$$

$C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3$ ) 为与  $z$  无关的待定量。

## 2.2 方程组(13)的 Hankel 变换解

令

$$\phi_n = u_{rn} + u_{0n}, \quad \psi_n = u_{rn} - u_{0n}. \quad (28a, b)$$

从方程组(13)推导出关于  $\phi_n$  和  $\psi_n$  的方程

$$B_1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_n + B_5 \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 \phi_n + \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right) \left( b_2 e_{ln} + b_3 \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + b_6 p_n \right) = 0, \quad (29a)$$

$$B_1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_n + B_5 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} + \rho_1^* \omega^2 \psi_n + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right) \left( b_2 e_{ln} + b_3 \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + b_6 p_n \right) = 0, \quad (29b)$$

式中  $b_2 = B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8}$  (30)

对  $\phi_n$  和  $\psi_n$  分别作  $(n+1)$  阶和  $(n-1)$  阶 Hankel 变换, 并应用公式(16)和

$$\int_0^\infty \left( \frac{dg}{dr} - \frac{ng}{r} \right) J_{n+1}(kr) r dr = -k \int_0^\infty g J_n(kr) r dr, \quad (31a)$$

$$\int_0^\infty \left( \frac{dg}{dr} + \frac{ng}{r} \right) J_{n-1}(kr) r dr = k \int_0^\infty g J_n(kr) r dr, \quad (31b)$$

从(29)式得到

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} - \lambda_0^2 \phi_n = \frac{k}{B_5} \left( b_2 e_{ln} + b_3 \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + b_6 p_n \right), \quad (32a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} - \lambda_0^2 \psi_n = -\frac{k}{B_5} \left( b_2 e_{ln} + b_3 \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + b_6 p_n \right), \quad (32b)$$

式中  $\lambda_0 = [(B_1 k^2 - \rho_1^* \omega^2) / B_5]^{1/2}$ . (33)

$\phi_n$  和  $\psi_n$  分别表示  $\phi_n$  和  $\psi_n$  的  $(n+1)$  和  $(n-1)$  阶 Hankel 变换。把(26)式代入(32)式, 解出  $\phi_n$  和  $\psi_n$  是

$$\phi_n = [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] + \sum_{s=1}^3 \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}, \quad (34a)$$

$$\psi_n = [C_{5n} \exp(\lambda_0 z) + D_{5n} \exp(-\lambda_0 z)] - \sum_{s=1}^3 \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}. \quad (34b)$$

其中  $d_s = \frac{k}{B_5} \left( \frac{b_2 \alpha_s + b_3 \gamma_s \lambda_s + b_6}{\lambda_s^2 - \lambda_0^2} \right)$  ( $s = 1, 2, 3$ ). (35)

$C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 4, 5$ ) 为与  $z$  无关的待定量。

## 2.3 $C_{4n}$ 和 $D_{4n}$ 与 $C_{5n}$ 和 $D_{5n}$ 之间的关系

从(10b)式有

$$e_{hn} = \frac{\partial u_{rn}}{\partial r} + \frac{u_{rn}}{r} + \frac{nu_{0n}}{r}. \quad (36)$$

对其作  $n$  阶 Hankel 变换就是

$$e_{hn} = \frac{k}{2} \phi_n - \frac{k}{2} \phi_n \cdot \quad (37)$$

把(26a)式和(34)式代入,并要求上式对任意的  $z$  成立,则  $C_{4n}$  和  $D_{4n}$  与  $C_{5n}$  和  $D_{5n}$  之间的关系是

$$C_{4n} = C_{5n}, D_{4n} = D_{5n} \cdot \quad (38)$$

这样(34)式就简化为

$$\begin{aligned} \phi_n = & [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] + \\ & \sum_{s=1}^3 \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}, \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\begin{aligned} \phi_n = & [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] - \\ & \sum_{s=1}^3 \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\}, \end{aligned} \quad (39b)$$

其中,  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) 为与  $z$  无关的待定量,根据具体边界条件确定。

### 3.4 $u_m$ 、 $u_{0n}$ 、 $u_{zn}$ 和 $p_n$ 的积分表示

对(39)式给出的  $\phi_n$  和  $\phi_n$  分别作  $(n+1)$  阶和  $(n-1)$  阶逆 Hankel 变换,并利用(28)式的逆关系,推导出  $u_m$  和  $u_{0n}$  积分表示

$$\begin{aligned} u_{rn} = & n \int_0^\infty [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] \frac{J_n(kr)}{r} dk - \\ & \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\} J_n(kr) k dk, \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} u_{0n} = & - \int_0^\infty [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] J_n(kr) k dk + \\ & n \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\} \frac{J_n(kr)}{r} dk \cdot \end{aligned} \quad (40b)$$

$J_n(x)$  表示对 Bessel 函数关于  $x$  求导数。对(26)式作  $n$  阶逆 Hankel 变换,有

$$u_{zn} = \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda_s z) - D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\} J_n(kr) k dk, \quad (41a)$$

$$p_n = \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ [C_{sn} \exp(\lambda_s z) + D_{sn} \exp(-\lambda_s z)] \right\} J_n(kr) k dk \cdot \quad (41b)$$

把(40)式和(41)式代入(12)式就得到 Biot 波动方程在非轴对称情况下的一般解。

## 3 横观各向同性饱和弹性多孔介质中的应力分布

应力应变关系(8)式在柱坐标系下的表示是

$$\sigma_z = \left( B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) e_h + \left( B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_7}{B_8} p, \quad (42a)$$

$$\sigma_r = 2B_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left( B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) e_h + \left( B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_6}{B_8} p, \quad (42b)$$

$$\sigma_\theta = 2B_1 \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) + \left( B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) e_h + \left( B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_6}{B_8} p, \quad (42c)$$

$$\tau_{rz} = B_5 \left( \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz} = B_5 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (42d, e)$$

$$\tau_{r\theta} = B_1 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \right). \quad (42f)$$

把(12)式代入上式,应力分量关于 $\theta$ 的 Fourier 展开为

$$\begin{cases} \sigma_z(r, \theta, z) \\ \sigma_r(r, \theta, z) \\ \sigma_\theta(r, \theta, z) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} \sigma_{zn}(r, z) \\ \sigma_{rn}(r, z) \\ \sigma_{\theta n}(r, z) \end{cases} \cos n\theta, \quad (43a)$$

$$\begin{cases} \tau_{rz}(r, \theta, z) \\ \tau_{\theta r}(r, \theta, z) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, z) \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \tau_{rzn}(r, z) \\ \tau_{\theta zn}(r, z) \\ \tau_{r\theta n}(r, z) \end{cases} \sin n\theta, \quad (43b)$$

式中  $\alpha_{zn} = \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] e_{ln} + \left[ B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + \frac{B_7}{B_8} p_n, \quad (44a)$

$$\alpha_{rn} = 2B_1 \frac{\partial u_{rn}}{\partial r} + \left[ B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] e_{ln} + \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + \frac{B_6}{B_8} p_n, \quad (44b)$$

$$\alpha_{\theta n} = 2B_1 \left[ \frac{u_{rn}}{r} + \frac{nu_{\theta n}}{r} \right] + \left[ B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] e_{ln} + \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + \frac{B_6}{B_8} p_n, \quad (44c)$$

$$\tau_{rzn} = B_5 \left[ \frac{\partial u_{rn}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\theta n}}{\partial r} \right], \quad (44d)$$

$$\tau_{\theta zn} = B_5 \left[ -\frac{nu_{zn}}{r} + \frac{\partial u_{\theta n}}{\partial z} \right], \quad (44e)$$

$$\tau_{r\theta n} = B_1 \left[ \frac{\partial u_{\theta n}}{\partial r} - \frac{u_{\theta n}}{r} - \frac{nu_{rn}}{r} \right]. \quad (44f)$$

令

$$\tau_{sn} = \tau_{rzn} + \tau_{\theta zn}, \quad (45a)$$

$$\tau_{dn} = \tau_{rzn} - \tau_{\theta zn}. \quad (45b)$$

再对 $\tau_{zn}$ 、 $\tau_{sn}$ 和 $\tau_{dn}$ 分别作和 $n$ 阶、 $(n+1)$ 阶和 $(n-1)$ 阶 Hankel 变换,有

$$\alpha_{zn} = \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] e_{ln} + \left[ B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + \frac{B_7}{B_8} p_n, \quad (46a)$$

$$\tau_{sn} = B_5 \left[ \frac{\partial \phi_n}{\partial z} - k u_{zn} \right], \quad (46b)$$

$$\tau_{dn} = B_5 \left[ \frac{\partial \phi_n}{\partial z} + k u_{zn} \right]. \quad (46c)$$

$\alpha_{zn}$ 、 $\tau_{sn}$ 和 $\tau_{dn}$ 分别表示 $\alpha_{zn}$ 、 $\tau_{sn}$ 和 $\tau_{dn}$ 的 $n$ 阶、 $(n+1)$ 阶和 $(n-1)$ 阶 Hankel 变换。把(26)式和(39)式代入上式,得

$$\alpha_{zn} = \sum_{s=1}^3 \left\{ \left[ \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \alpha_s + \left[ B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right] \gamma_s \lambda + \frac{B_7}{B_8} \right] \cdot [C_{sn} \exp(\lambda z) + D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\}, \quad (47a)$$

$$\tau_{sn} = B_5 \lambda_0 [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) - D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] + B_5 \sum_{s=1}^3 \left\{ (d_s \lambda - k \gamma_s) [C_{sn} \exp(\lambda z) - D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\}, \quad (47b)$$

$$\tau_{dn} = B_5 \lambda_0 [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] - B_5 \sum_{s=1}^3 \left\{ (d_s \lambda - k \gamma_s) [C_{sn} \exp(\lambda z) - D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\}. \quad (47c)$$

对上式作相应阶次的逆 Hankel 变换,再代入(45)式的逆形式, $\alpha_{zn}$ 、 $\tau_{rzn}$ 和 $\tau_{\theta zn}$ 分别是

$$\alpha_{zn} = \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ \left[ \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \alpha_s + \left[ B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right] \gamma_s \lambda + \frac{B_7}{B_8} \right] \cdot \right\} \cdot$$



$$[C_{sn} \exp(\lambda z) + D_{sn} \exp(-\lambda z)] \int_0^\infty J_n(kr) k dk, \quad (48a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zn} = & nB_5 \int_0^\infty \lambda_0 [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) - D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] \frac{J_n(kr)}{r} dk - \\ & B_5 \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ (d_s \lambda - k \nu_s) [C_{sn} \exp(\lambda z) - D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} J_n(kr) k dk, \end{aligned} \quad (48b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{0zn} = & -B_5 \int_0^\infty \lambda_0 [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) - D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] J_n(kr) k dk + \\ & nB_5 \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \left\{ (d_s \lambda - k \nu_s) [C_{sn} \exp(\lambda z) - D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} \frac{J_n(kr)}{r} dk. \end{aligned} \quad (48c)$$

定义

$$\sigma_{cn} = \sigma_m + \alpha_{0n}, \quad (49a)$$

$$\tau_{pn} = \frac{\sigma_m - \alpha_{0n}}{2B_1} + \frac{\tau_{r0n}}{B_1}, \quad (49b)$$

$$\tau_{mn} = \frac{\alpha_{0n} - \sigma_{0n}}{2B_1} - \frac{\tau_{r0n}}{B_1}. \quad (49c)$$

把(44)式代入上式,有

$$\sigma_{cn} = 2 \left[ B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] e_{hn} + 2 \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + 2 \frac{B_6}{B_8} p_n, \quad (50a)$$

$$\tau_{pn} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n+1)}{r} \right] \phi_n, \quad (50b)$$

$$\tau_{mn} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(n-1)}{r} \right] \phi_n. \quad (50c)$$

对  $\sigma_{cn}$ 、 $\tau_{pn}$  和  $\tau_{mn}$  作  $n$  阶、 $(n+2)$  阶和  $(n-2)$  阶 Hankel 变换,有

$$\sigma_{cn} = 2 \left[ B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] e_{hm} + 2 \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \frac{\partial u_{zn}}{\partial z} + 2 \frac{B_6}{B_8} p_n, \quad (51a)$$

$$\tau_{pn} = -k \phi_n, \quad (51b)$$

$$\tau_{mn} = k \phi_n, \quad (51c)$$

式中,  $\sigma_{cn}$ 、 $\tau_{pn}$  和  $\tau_{mn}$  分别表示  $\sigma_{cn}$ 、 $\tau_{pn}$  和  $\tau_{mn}$  的  $n$  阶、 $(n+2)$  阶和  $(n-2)$  阶 Hankel 变换。把(26)式和(39)式代入上式,推导出

$$\begin{aligned} \sigma_{cn} = & 2 \sum_{s=1}^3 \left\{ \left[ \left[ B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right] \alpha_s + \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \nu_s \lambda + \frac{B_6}{B_8} \right] \cdot \right. \\ & \left. [C_{sn} \exp(\lambda z) + D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} \end{aligned} \quad (52a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{pn} = & -k [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] - \\ & k \sum_{s=1}^3 \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda z) + D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\}, \end{aligned} \quad (52b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{mn} = & k [C_{4n} \exp(\lambda_0 z) + D_{4n} \exp(-\lambda_0 z)] - \\ & k \sum_{s=1}^3 \left\{ d_s [C_{sn} \exp(\lambda z) + D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\}. \end{aligned} \quad (52c)$$

对上式各量作相应阶次的逆 Hankel 变换即得  $\sigma_{cn}$ 、 $\tau_{pn}$  和  $\tau_{mn}$ , 再代入(49)式的逆关系就求出了  $\sigma_m$ 、 $\alpha_{0n}$  和  $\tau_{r0n}$ 。

把应力分量的 Fourier 展开系数代入(43)式就得出了总应力分量的表达式。

## 4 横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应边值问题的处理方法

前面给出了横观各向同性饱和弹性多孔介质在简谐激励下稳态动力响应非轴对称波动方程的一般解,解中包含有  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ), 它们要根据具体问题的边界条件来确定。根据介质边界( $z =$  常数的平面)上的透水条件、应力边界条件和位移边界条件就可以建立以  $n$  为标记的关于  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) 的方程组,从方程组中能解出  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ )。  $n$  的取值情况(即  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) 不全为零的  $n$  值要根据问题边界条件关于  $\theta$  的 Fourier 展开中  $\cos n\theta$  或  $\sin n\theta$  项系数不为零的情况确定。

边值问题的处理可以这样进行:

- 1) 把边界条件关于  $\theta$  作 Fourier 展开,得到  $p_n$ 、 $u_{zn}$ 、 $u_{rn}$  和  $u_{0n}$  或  $\rho_n$ 、 $\alpha_{zn}$ 、 $\tau_{zn}$  和  $\tau_{\theta n}$  在边界上关于  $r$  的分布;
- 2) 对  $u_{rn}$  和  $u_{0n}$  或  $\tau_{zn}$  和  $\tau_{\theta n}$  作与(28)式或(45)式相同的组合,推导出  $\phi_n$  和  $\psi_n$  或  $\tau_{sn}$  和  $\tau_{dn}$  在边界上的分布;
- 3) 对  $p_n$ 、 $u_{zn}$ 、 $\phi_n$  和  $\psi_n$  或  $\rho_n$ 、 $\alpha_{zn}$ 、 $\tau_{sn}$  和  $\tau_{dn}$  作相应阶的 Hankel 变换,获得  $p_n$ 、 $u_{zn}$ 、 $\phi_n$  和  $\psi_n$  或  $\rho_n$ 、 $\alpha_{zn}$ 、 $\tau_{sn}$  和  $\tau_{dn}$  在边界上的值;
- 4) 再代入(26b)、(26c)和(39)式或(26c)和(47)式以及边界透水条件,列出关于  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) 的方程组;
- 5) 解方程组,求出  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ );
- 6) 把  $C_{sn}$  和  $D_{sn}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) 代入(40)式、(41)式和(48)式,可以得出固体骨架位移、孔隙压力和总应力的 Fourier 展开系数;
- 7) 应用(12)式和(43)式,最终就获得横观各向同性饱和弹性多孔介质骨架位移、流体压力、和总应力的分布。

## 5 竖向非轴对称简谐荷载作用下半空间横观各向同性饱和弹性多孔介质的动力响应

### 5.1 半空间介质的表面位移

以处于  $z \geq 0$  半空间的横观各向同性饱和弹性多孔介质为研究对象。当  $z \rightarrow \infty$  时,固体骨架位移、孔隙流体压力和介质应力都应趋于零,因此待定量  $C_{sn} = 0$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ )。公式(40)和(41)简化为

$$u_{rn} = n \int_0^{\infty} [D_{4n} \exp(-\lambda z)] \frac{J_n(kr)}{r} dk - \sum_{s=1}^3 \int_0^{\infty} \left\{ d_s [D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} J_n(kr) k dk, \quad (53a)$$

$$u_{0n} = - \int_0^{\infty} [D_{4n} \exp(-\lambda z)] J_n(kr) k dk + n \sum_{s=1}^3 \int_0^{\infty} \left\{ d_s [D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} \frac{J_n(kr)}{r} dk, \quad (53b)$$

$$u_{zn} = - \sum_{s=1}^3 \int_0^{\infty} \left\{ \gamma_s [D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} J_n(kr) k dk, \quad (53c)$$

$$p_n = \sum_{s=1}^3 \int_0^{\infty} \left\{ [D_{sn} \exp(-\lambda z)] \right\} J_n(kr) k dk \quad (53d)$$

设在半空间饱和多孔介质边界上作用有竖直方向简谐荷载,它在边界上产生的简谐应力的幅值是

$$\alpha_z(r, \theta, 0) = -\sigma(r) \cos \theta, \quad (54a)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta, 0) = 0, \quad (54b)$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta, 0) = 0 \quad (54c)$$

显然,在应力分量的 Fourier 展开式(43)中除  $\alpha_{z1}(r, 0)$  项外其余项都为零。所以只需对  $n = 1$  讨论。并且

$$\alpha_{z1}(r, 0) = -\sigma(r), \quad (55a)$$

从(45)式得到

$$\tau_{s1}(r, 0) = 0, \quad \tau_{d1}(r, 0) = 0 \quad (55b)$$

$\alpha_{z1}$ 、 $\tau_{s1}$  和  $\tau_{d1}$  相应阶次的 Hankel 变换分别是

$$\alpha_{z1}(k, 0) = -\sigma(k) = -\int_0^{\infty} \sigma(r) J_1(kr) r dr, \quad (56a)$$

$$\tau_{s1}(k, 0) = 0, \quad (56b)$$

$$\tau_{d1}(k, 0) = 0 \quad (56c)$$

(56)式代入(47)式,就有关于  $D_{s7}(s = 1, 2, 3, 4)$  的方程

$$\xi_1 D_{11} + \xi_2 D_{21} + \xi_3 D_{31} = -\sigma(k), \quad (57a)$$

$$\lambda_0 D_{41} + \zeta_1 D_{11} + \zeta_2 D_{31} + \zeta_3 D_{21} = 0, \quad (57b)$$

$$-\lambda_0 D_{41} + \zeta_1 D_{11} + \zeta_2 D_{31} + \zeta_3 D_{21} = 0, \quad (57c)$$

其中

$$\xi_s = \left[ B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right] \alpha_s + \left[ B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right] \gamma_s \lambda_s + \frac{B_7}{B_8}, \quad (58a)$$

$$\zeta_s = d_s \lambda - k \gamma_s \quad (s = 1, 2, 3) \quad (58b)$$

假设介质边界完全透水,即

$$p(r, \theta, 0) = 0 \quad (59)$$

代入(12a)<sub>4</sub>式和(26c)式有

$$D_{11} + D_{21} + D_{31} = 0 \quad (60)$$

从(57)式和(60)式解出  $D_{s1}$  是

$$D_{11} = -\sigma(k) \frac{\zeta_2 - \zeta_3}{\Delta}, \quad (61a)$$

$$D_{21} = -\sigma(k) \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\Delta}, \quad (61b)$$

$$D_{31} = -\sigma(k) \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\Delta}, \quad (61c)$$

$$D_{41} = 0 \quad (61d)$$

式中

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (62)$$

把(61)式代入(53)式就得到了介质骨架位移分量和孔隙流体压力。再在所得到的公式中令  $z = 0$  就获得介质边界上骨架位移分布与  $r$  有关的部分。其中边界竖向位移  $u_z(r, \theta, 0)$  与  $r$  有关的部分是

$$u_z(r, 0) = \int_0^{\infty} [ \gamma_1(\zeta_2 - \zeta_3) + \gamma_2(\zeta_3 - \zeta_1) + \gamma_3(\zeta_1 - \zeta_2) ] \frac{\sigma(k)}{\Delta} J_1(kr) k dk \quad (63)$$

给上式乘  $\cos\theta$  就得到了半空间表面简谐位移的幅值分布。

作为特例, 取

$$\sigma(r) = \begin{cases} \frac{r}{R} & (r < R), \\ 0 & (r > R). \end{cases} \quad (64)$$

这种应力分布  $[-\sigma(r)\cos\theta]$  可以表示直立在半空间饱和多孔介质表面半径为  $R$  的刚性圆柱体当其 upper 端在竖直平面内作微小简谐振动时下端在地表面产生的应力分布的幅值。由(56a)式得<sup>[13]</sup>

$$\sigma(k) = \frac{R}{k} J_2(kR), \quad (65)$$

代入(63)式, 有

$$u_z(r, \theta, 0) = \cos\theta \int_0^{\infty} M(k') J_2(k') J_1\left(\frac{r}{R}k'\right) dk', \quad (66)$$

式中  $M(k') = \left[ \frac{\gamma_1(\zeta_2 - \zeta_3) + \gamma_2(\zeta_3 - \zeta_1) + \gamma_3(\zeta_1 - \zeta_2)}{\Delta} \right] \Big|_{k=\frac{k'}{R}}$ ,

这就是介质表面竖向简谐位移的幅值分布。

## 5.2 介质表面位移幅值的数值计算结果

为了进行数值计算, 利用以下公式作常数转换:

1) 弹性常数  $B_1 \sim B_8$  用介质弹性常数  $c_{ij}$ 、骨架固体体积模量  $K_s$  和孔隙流体体积模量  $K_l$  表示为<sup>[14]</sup>

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= c_{66}, & B_2 &= c_{12} + \frac{B_6^2}{B_8}, \\ B_3 &= c_{33} + \frac{B_6 B_7}{B_8}, & B_4 &= c_{33} + \frac{B_7^2}{B_8}, \end{aligned} \right\} \quad (67a)$$

$$\left. \begin{aligned} B_5 &= c_{44}, & B_6 &= - \left[ 1 - \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{3K_s} \right] B_8, \\ B_7 &= - \left[ 1 - 2 \left[ \frac{c_{13} + c_{33}}{3K_s} \right] \right] B_8, \end{aligned} \right\} \quad (67b)$$

$$B_8 = \left[ \frac{1-\phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_l} - \frac{2c_{11} + 2c_{12} + 4c_{13} + c_{33}}{9K_s^2} \right]^{-1}. \quad (67c)$$

2) 饱和多孔介质密度  $\rho$  为

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_l, \quad (68)$$

其中  $\rho_s$  是骨架固体材料密度。

$$3) \quad r_j = \frac{\eta_j}{K_j} \quad (j = 1, 3), \quad (69)$$

$K_j (j = 1, 3)$  是转换系数·

4) 引入描述横观各向同性介质参数之间关系的量  $k, l, m$  和  $n$

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= kK_1, & c_{33} &= lc_{11}, \\ c_{13} &= mc_{12}, & c_{44} &= nc_{66} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

当  $k = l = m = n = 1$  时, 介质是各向同性的·

表 1 饱和多孔介质参数

| $c_{11}$  | $c_{12}$        | $c_{66}$        | $K_s$           | $K_l$           | $\rho_s$ | $\rho_l$ | $\phi$ | $f$ |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|--------|-----|
| $10^7$    | $2 \times 10^6$ | $4 \times 10^6$ | $3 \times 10^7$ | $2 \times 10^6$ | 3 000    | 1 000    | 0.2    | 50  |
| $\eta$    | $K_1$           | $k$             | $l$             | $m$             | $n$      | $m_1$    | $m_3$  | $R$ |
| $10^{-3}$ | $10^{-7}$       | 0.1             | 0.8             | 1.2             | 0.8      | 8        | 8      | 4   |

若无特别标明, 计算时参数值取表 1 中所给数据, 采用国际单位制· 图 1\_图 5 给出了半空间表面竖向位移幅值与离荷载中心距离有关部分  $u_z(r, 0)$  受介质参数影响的情况· 图 1 给出了表面竖向位移幅值及相角与场点离荷载中心距离的关系· 可见位移幅值随距离的增大以减幅振荡形式变化, 相邻两峰值区域的相位相反, 说明表面竖向位移以衰减波动向外传播·

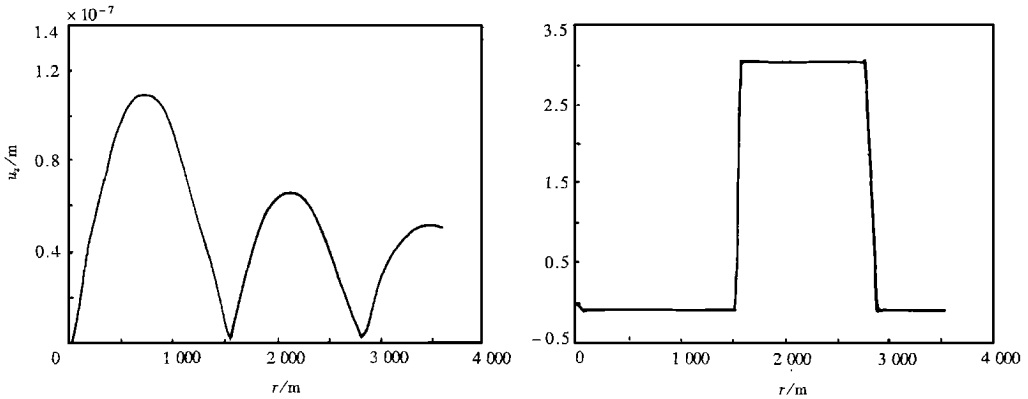


图 1 表面位移的幅值和相角与距离的关系

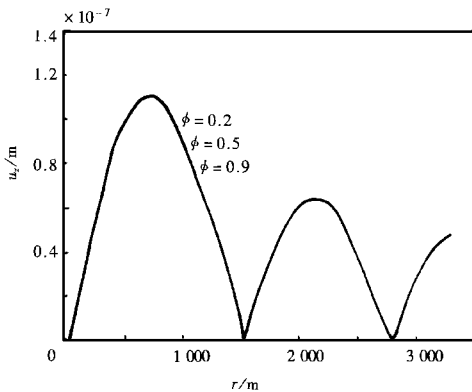


图 2 介质孔隙率对表面竖向位移幅值的影响

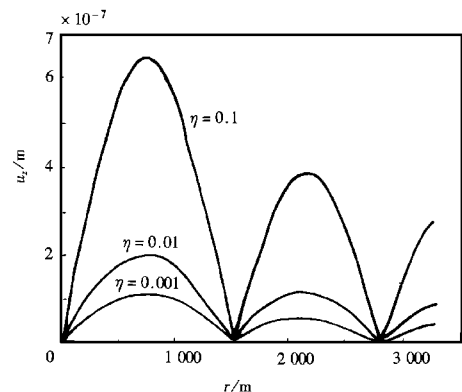


图 3 流体粘性对表面竖向位移幅值的影响

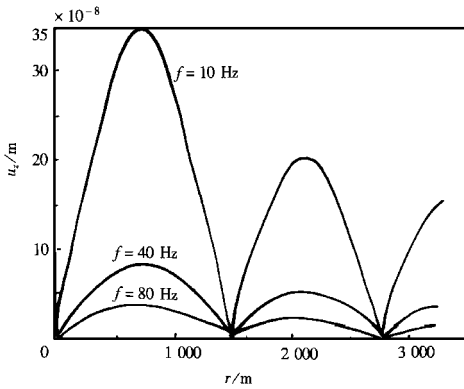


图 4 荷载频率对表面竖向位移幅值的影响

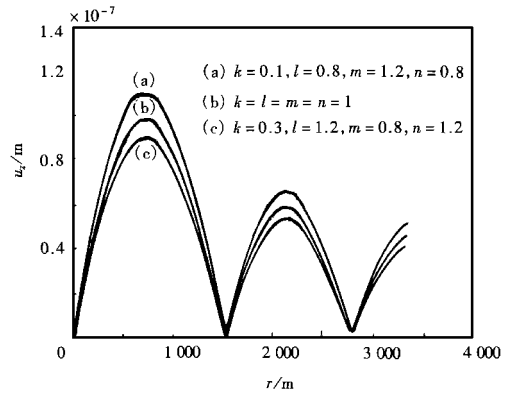


图 5 介质各向特性对表面竖向位移幅值的影响

图 2 表明介质孔隙率对表面竖向位移幅值几乎无影响。这是因为介质孔隙率对介质整体刚性的影响不大。图 3 显示出孔隙流体动力粘滞系数越大, 竖向位移幅值衰减越快。粘滞系数的增加意味着内摩擦耗散的功率增大, 振动幅值衰减自然加快; 另外该图反映出随着粘滞系数的增大, 荷载附近处的表面位移幅值变大, 这是由于内摩擦的增加使能量不易向外传播。图 4 表示位移幅值与荷载频率之间的关系, 频率越高, 位移幅值越小。这一方面是由于频率的提高增加了内摩擦耗散的功率。另一方面, 所讨论的介质的临界频率约为 0.5 Hz, 当频率大于此值且增加时, 系统更加远离共振状态, 振动幅值愈小。图 5 表示了介质各向性质对表面竖向位移幅值的影响。随着介质骨架竖向刚性变大和孔隙流体压缩性减小(这都使介质刚性增加)表面位移幅值减小。

## 6 结 论

本文讨论了横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应问题。不仅求解了一般方程, 而且分析了一个特例。对与此有关的工程领域有一定的指导意义。

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid[J]. J Acoust Soc Am, 1956, 28(2): 168—191.
- [2] Biot M A. General theory of acoustic propagation in porous dissipative media[J]. J Acoust Soc Am, 1962, 34(9): 1254—1264.
- [3] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. J Appl Phys, 1962, 33(4): 1482—1498.
- [4] Zienkiewicz O C, Shiomi T. Dynamic behavior of saturated porous media, the general Biot formulation and its numerical solution[J]. Int J Numer and Analytical Methods in Geomech, 1984, 8(1): 71—96.
- [5] Bougacha S, Tassoulas J L, Roesset J M. Analysis of foundations on fluid filled poroelastic stratum [J]. J Engrg Mech ASCE, 1993, 119(8): 1632—1648.
- [6] Bougacha S, Roesset J M, Tassoulas J L. Dynamic stiffness of foundations on fluid filled poroelastic stratum[J]. J Engrg Mech ASCE, 1993, 119(8): 1649—1662.
- [7] Cheng A H D, Badmus J, Beskos D E. Integral equations for dynamic poroelasticity in frequency

- domain with BEM solution[J]. *J Engng Mech*, ASCE, 1991, **117**(5): 1136—1157.
- [8] Dominguez J. Boundary elementary approach for dynamic poroelastic problems[J]. *Int J Numer Methods in Engrg*, 1992, **35**(2): 307—324.
- [9] Chen J, Dargush G F. Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analysis [J]. *Int Solids and Struct*, 1995, **32**(15): 2257—2278.
- [10] Dargush G F, Chopra M B. Dynamic analysis of axisymmetrical foundation on poroelastic media[J]. *J Engng Mech*, 1996, **122**(7): 623—632.
- [11] Philippacopoulos A J. Waves in partially saturated medium due to surface loads[J]. *J Engrg Mech*, 1988, **114**(10): 1740—1759.
- [12] 张玉红. 饱和土地基与基础结构动力相互作用[D]. 博士学位论文. 西安: 西安建筑科技大学, 1999.
- [13] Sneddon I N, 富里叶变换[M]. 何衍王睿, 张燮译. 北京: 科学出版社, 1958.
- [14] Kazi\_Aoual M N, Bonnet G, Jouanna P. Green's functions in an infinite transversely isotropic saturated poroelastic medium[J]. *J Acoust Soc Am*, 1988, **84**(5): 1883—1889.

## The Non Axisymmetrical Dynamic Response of Transversely Isotropic Saturated Poroelastic Media

ZHANG Yin\_ke, HUANG Yi

(Science College, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, P R China)

**Abstract:** The Biot's wave equations of transversely isotropic saturated poroelastic media excited by non\_axisymmetrical harmonic source were solved by means of Fourier expansion and Hankel transform. Then the components of total stress in porous media are expressed with the solutions of Biot's wave equations. The method of research on non\_axisymmetrical dynamic response of saturated porous media is discussed, and a numerical result is presented.

**Key words:** Biot's wave equations; transversely isotropic saturated poroelastic media; non\_axisymmetrical dynamic response