

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0016-07

# 横观各向同性层合矩形板弯曲、振动 和稳定的三维精确分析\*

皓江, 陈伟球, 徐荣桥

(浙江大学 土木系, 杭州 310027)

(本刊编委 皓江来稿)

**摘要:** 针对四边简支的横观各向同性矩形板的弯曲、振动和稳定给出了新的状态空间分析方法。从横观各向同性弹性力学的三维基本方程出发, 通过引入位移函数和应力函数, 构造了两类相互独立的状态空间方程, 不仅使原方程得到解耦而且降低了阶数, 十分有利于具体问题的求解。对于四边简支的矩形板, 建立了层合板上下表面状态变量间的关系式。特别针对矩形板的自由振动(稳定)问题, 发现存在两类彼此无关的形式, 一类对应板的纯面内振动(稳定), 而另一类则是一般意义上的板的弯曲振动(稳定)。给出了数值结果, 并考察了相关参数的影响。

**关键词:** 横观各向同性; 矩形板; 状态空间法

**中图分类号:** O343.1      **文献标识码:** A

## 引 言

矩形板的静动力学研究一直是固体力学的一个重要方向, 其中新材料和新结构的不断出现为这一研究注入了无穷的生机和活力。对于厚板, 经典板理论不再适用; 当材料是各向异性时, 各阶修正的板理论也存在不同程度的缺陷, 特别是不能充分反映所有弹性常数的影响。问题的完满解决只有依赖于三维精确分析, 可以用双三角函数展开方法来获得四边简支各向同性矩形板的三维精确解, 这一方法同样可推广应用于正交各向异性板以及相应的层合板。基于状态空间方程的分析方法(也称为初始函数法)与传统解法相比, 最后的求解矩阵的阶数不随层数的增加而扩大, 因此特别适用于层合结构的分析<sup>[1]</sup>。Fan 和 Ye<sup>[2]</sup>通过对原方程的重新安排, 构造了对应正交各向异性弹性理论的一个状态空间方程, 并应用于正交各向异性层合板的分析。Ding 等<sup>[3]</sup>最近结合有限 Hankel 变换考察了横观各向同性层合圆板的轴对称自由振动。

本文针对横观各向同性层合矩形板(假设各向同性面和板的中面相平行)的弯曲、振动和稳定问题进行了分析。通过引入两个位移函数和两个应力函数, 我们发现可将横观各向同性弹性力学的三维基本方程化为两个相互独立的状态空间方程。这使得本文方法不仅具有一般状态空间方法的优越性, 而且使原方程得到解耦和降低, 从而极大简化了具体问题的求解。针

\* 收稿日期: 1999\_11\_23; 修订日期: 2000\_10\_13

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(198720260)

作者简介: 丁皓江(1934—), 男, 江苏常州人, 教授, 博导。

对四边简支的层合矩形板的弯曲、振动和稳定问题, 分别导出了最终的求解方程, 并给出了具体算例。

## 1 基本方程

对于横观各向同性弹性体, 在直角坐标系中其广义 Hooke 定理可表示如下

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{xz} &= c_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \alpha_y &= c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{yz} &= c_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \alpha_z &= c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{xy} &= c_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中记  $u$ 、 $v$  和  $w$  分别为  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的位移分量,  $c_{ij}$  是弹性常数, 其中  $c_{11} - c_{12} = 2c_{66}$ 。控制微分方程为<sup>[4]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= Ku, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= Kv, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} &= Kw, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对应于弯曲、振动和稳定问题, 式中  $K$  分别等于  $0$ 、 $\rho \partial^2 / \partial t^2$  和  $T_1 \partial^2 / \partial x^2 + T_2 \partial^2 / \partial y^2$ , 这里  $\rho$  为材料密度,  $T_1$  和  $T_2$  分别是矩形板沿  $x$  和  $y$  方向所承受的均匀压力。几何关系可以在任何一本弹性力学专著中找到, 这里不再重述。

## 2 状态空间法列式

对位移  $u$  和  $v$ , 剪应力  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  作如下变量替换

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \tau_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \tau_1}{\partial x} - \frac{\partial \tau_2}{\partial y}. \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)中  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  的表达式, 得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \tau_1 - c_{44} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau_2 + c_{44} w - c_{44} \frac{\partial G}{\partial z} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau_1 - c_{44} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \tau_2 + c_{44} w - c_{44} \frac{\partial G}{\partial z} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

根据文[5]附录 A 的证明, 由式(4)可得

$$\tau_1 - c_{44} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\tau_2 + c_{44} w - c_{44} \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

将式(1)和(3)代入式(2)的前两式得

$$-\frac{\partial}{\partial y} A - \frac{\partial}{\partial x} B = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} A - \frac{\partial}{\partial y} B = 0, \quad (7)$$

式中

$$A = c_{66} \Lambda \phi + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} - K \phi, \quad (8)$$

$$B = c_{11} \Lambda G - c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} - KG, \quad (9)$$

其中  $\Lambda = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  为平面 Laplace 算子。同理由式(7)得

$$A = 0, \quad (10)$$

$$B = 0, \quad (11)$$

另利用式(3)分别由式(1)的第五式和式(2)的第三式,得

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{c_{13}}{c_{33}} \Lambda G + \frac{1}{c_{33}} \alpha_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = Kw + \Lambda \tau_2 \quad (13)$$

将式(12)代入式(9)消去  $\partial w/\partial z$ , 则由式(10)和(11)得  $\partial \tau_1/\partial z$  和  $\partial \tau_2/\partial z$  的表达式。式(5)、(6)、(10)、(11)、(12)和(13)可写成如下矩阵形式:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \phi \\ \tau_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/c_{44} \\ K - c_{66} \Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \tau_1 \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} G \\ \alpha_2 \\ \tau_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c_{44} & 1 \\ 0 & 0 & \Lambda & K \\ K - (c_{11} - c_{13}^2/c_{33}) \Lambda & c_{13}/c_{33} & 0 & 0 \\ (c_{13}/c_{33}) \Lambda & 1/c_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G \\ \alpha_2 \\ \tau_2 \\ w \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

可以看出,六个状态变量  $\phi$ 、 $\tau_1$ 、 $G$ 、 $\alpha_2$ 、 $\tau_2$  和  $w$  分成相互独立的二组: 状态空间方程(14)和(15)与原方程相比,都得到了降阶,有利于具体问题的求解。

利用本构关系式(1)容易将另三个应力分量用状态变量来表示,即

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x + \alpha_y &= - \left[ c_{11} + c_{12} - 2 \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right] \Lambda G + 2 \frac{c_{13}}{c_{33}} \alpha_2, \\ \alpha_x - \alpha_y &= - 2c_{66} \left[ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] G \right], \\ \tau_{xy} &= c_{66} \left[ \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \phi - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

### 3 矩形板的弯曲、振动和稳定

考虑总层数为  $p$  的横观各向同性层合板形板,各向同性平面平行于板中面,取坐标如图1所示。可以假设

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \tau_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} h^2 \phi(\zeta) \\ hc_{44}^{(1)} \tau_1(\zeta) \end{Bmatrix} \cos(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta) \exp(i\omega t), \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} G \\ \alpha_2 \\ \tau_2 \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} h^2 G(\zeta) \\ c_{44}^{(1)} \alpha_2(\zeta) \\ hc_{44}^{(1)} \tau_2(\zeta) \\ hw(\zeta) \end{Bmatrix} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \exp(i\omega t), \quad (18)$$

其中  $\zeta = z/h$ 、 $\xi = x/a$  和  $\eta = y/b$  为无量纲坐标,  $c_{44}^{(1)}$  代表第一层的弹性模量。对于振动问题  $\omega$  为谐振动的圆频率;对于弯曲或稳定问题,则  $\omega = 0$ 。按照式(17)和(18)的假设,可知边界上满足如下三维的简支条件:

当  $x = 0, a$  时;  $\alpha_x = v = w = 0$ ;

当  $y = 0, b$  时;  $\alpha_y = u = w = 0$ 。

将式(17)和(18)代入式(14)和(15)两式,利用三角函数的正交性质,对于任何一对模态数组合  $(m, n)$  可得

$$\frac{d}{d\zeta} V_1(\zeta) = M_1 V_1(\zeta), \quad (19)$$

$$\frac{d}{d\zeta} V_2(\zeta) = M_2 V_2(\zeta), \quad (20)$$

式中  $V_1 = [\phi, \tau_1]^T, V_2 = [G, \alpha_z, \tau_2, w]^T$ , 且

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_{44}^{(1)}}{c_{44}} \\ \frac{c_{66}\alpha}{c_{44}^{(1)}} - f & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{c_{44}^{(1)}}{c_{44}} & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & -f \\ \frac{(c_{33}c_{11} - c_{13}^2)\alpha}{c_{33}c_{44}^{(1)}} - f & \frac{c_{13}}{c_{33}} & 0 & 0 \\ -\frac{c_{13}\alpha}{c_{33}} & \frac{c_{44}^{(1)}}{c_{33}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中  $\alpha = k_1^2 + k_2^2, k_1 = (h/a)m\pi, k_2 = (h/b)n\pi$ 。对于弯曲、振动和稳定问题, 分别有  $f = 0, f = \Omega^2 \rho / \rho^{(1)}$  和  $f = T_1 k_1^2 / c_{44}^{(1)} + T_2 k_2^2 / c_{44}^{(1)}$ , 这里  $\Omega^2 = \rho^{(1)} \omega^2 h^2 / c_{44}^{(1)}$  为量纲一的频率,  $\rho^{(1)}$  代表第一层材料的密度。

式(19)和(20)为常微分形式的状态空间方程, 利用矩阵理论, 可以得到其解为

$$V_1(\zeta) = \exp[M_1(\zeta - \zeta_{j-1})] V_1(\zeta_{j-1}) \quad (\zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j; j = 1, 2, \dots, p), \quad (22)$$

$$V_2(\zeta) = \exp[M_2(\zeta - \zeta_{j-1})] V_2(\zeta_{j-1}) \quad (\zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j; j = 1, 2, \dots, p), \quad (23)$$

其中  $\zeta_0 = 0, \zeta_j = \sum_{i=1}^j h_i / h$ 。指数矩阵函数  $\exp[M_k(\zeta - \zeta_j)]$  通常被称为传递矩阵, 可用 Cayley-Hamilton 定理将其表示成矩阵  $M_k$  的多项式<sup>[6]</sup>。

对于完全粘合的层合板, 在层间要求  $u, v, w, \alpha_z, \tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  连续, 在这里转化为状态变量在界面上要连续, 于是从式(22)和(23)出发, 可得到如下关系式

$$V_1(1) = T_1 V_1(0), \quad (24)$$

$$V_2(1) = T_2 V_2(0), \quad (25)$$

式中  $T_1 = \prod_{j=p}^1 \exp[M_1(\zeta_j - \zeta_{j-1})]$  和  $T_2 = \prod_{j=p}^1 \exp[M_2(\zeta_j - \zeta_{j-1})]$  分别为二阶和四阶的方阵。

对应于弯曲、振动和稳定问题, 利用层合板上下表面条件可从式(24)和(25)出发导出最后的求解矩阵。

### 1) 弯曲

假设板的下表面自由, 上表面承受任意分布荷载  $q(x, y)$ , 则首先可将  $q(x, y)$  展开成如下形式:

$$q(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta), \quad (26)$$

其中  $q_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 q(\xi, \eta) \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) d\xi d\eta$ 。此时易知  $\phi = \tau_1 = 0$ , 同时因在上下表面

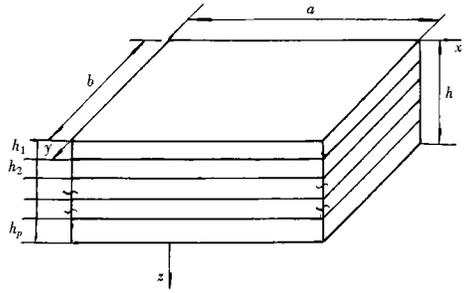


图 1 层合矩形板的几何示意图

有  $\tau_2(0) = \tau_2(1) = \sigma_2(0) = 0$ ,  $\sigma_z(0) = -q_{mn}/c_{44}^{(1)}$ , 于是由式(25)中的第二、三式可得到

$$\begin{cases} G(0) \\ w(0) \end{cases} = \frac{q_{mn}}{c_{44}^{(1)}} \begin{bmatrix} T_{221} & T_{224} \\ T_{231} & T_{234} \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} T_{222} \\ T_{232} \end{cases}, \quad (27)$$

式中  $T_{2ij}$  为矩阵  $T_2$  的元素。上表面的状态变量已知后, 任意点的状态变量可由下式求出

$$V_k(\zeta) = \exp[M_k(\zeta - \zeta_{j-1})] \prod_{i=j-1}^1 \exp[M_k(\zeta - \zeta_{i-1})] V_k(0), \quad (k = 1, 2; \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j), \quad (28)$$

而其它导出变量由式(16)给出。

## 2) 自由振动

对于自由振动问题, 板的上下表面为自由, 相应的条件可表示为

$$\sigma_z = \tau_1 = \tau_2 = 0 \quad (\zeta = 0, 1). \quad (29)$$

由式(24)和(25)可导出对应两类不同振动形式的频率方程

$$T_{121} = 0, \quad (30)$$

$$\begin{vmatrix} T_{221} & T_{224} \\ T_{231} & T_{234} \end{vmatrix} = 0, \quad (31)$$

其中频率方程(30)对应板的平面内振动, 而频率方程(31)则对应一般的弯曲振动。由式(30)或(31)可以求出无量纲频率  $\Omega$ , 然后由式(24)或(25)及式(28)可定出状态矢量的振动模态, 其它导出变量的振动模态由式(16)决定。

## 3) 稳定

对于稳定问题最后的方程也归结为式(30)和(31), 此时由式(30)或(31)可以求出等效的临界应力  $T_\sigma = T_1 k_1^2 / c_{44}^{(1)} + T_2 k_2^2 / c_{44}^{(1)}$ 。同自由振动问题的一样, 稳定也存在两类形式, 即对应式(30)的面内稳定及对应式(31)的弯曲稳定。

# 4 算 例

首先考察一个三层的四边简支矩形板受正弦荷载  $q \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta)$  的作用的问题。设上下两层的材料相同, 为横观各向同性, 材料的弹性常数如下:

$$c_{11} = 20 \times 10^{10} \text{Pa}, \quad c_{12} = 12 \times 10^{10} \text{Pa},$$

$$c_{13} = c_{33} = 2 \times 10^{10} \text{Pa}, \quad c_{44} = 1 \times 10^{10} \text{Pa},$$

中间层为各向同性, 其泊松比  $\nu = 0.3$ , 弹性模量

$E = 21 \times 10^{10} \text{Pa}$ 。对于各向同性材料有:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} = c_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ c_{12} = c_{13} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ c_{44} = c_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

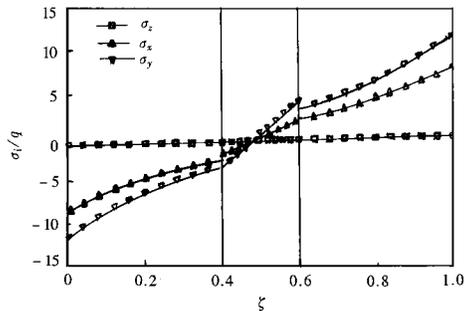


图2 板中心点正应力沿厚度方向的分布

设上中下三层的厚度比为 0.4:0.2:0.4, 板的长厚比和宽厚比分别为  $a/h = 10$  和  $b/h = 5$ 。图2给出了板中心点三个无量纲正应力  $\sigma_i/q$  ( $i = x, y, z$ ) 沿板厚方向的分布。从图2可以看出正应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  要比正应力  $\sigma_z$  大, 在材料界面处  $\sigma_z$  是连续的, 而  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  出现跳跃。

其次考察前述三层板的自由振动问题, 进一步假设各向同性材料和横观各向同性材料的

密度比为 2.0。图 3 和图 4 分别给出了第一类和第二类振动的各模态最低阶频率曲线。需要指出的是对应第一类振动, 我们可取  $m$  和  $n$  中的一个为零, 但不能同时为零; 对应第二类振动则  $m$  和  $n$  都必须大于零, 这一点可从式(3)、(17) 和(18) 看出。从图中可以看出最低阶无量纲频率  $\Omega$  随模态数  $m$  和  $n$  的增大而增大。

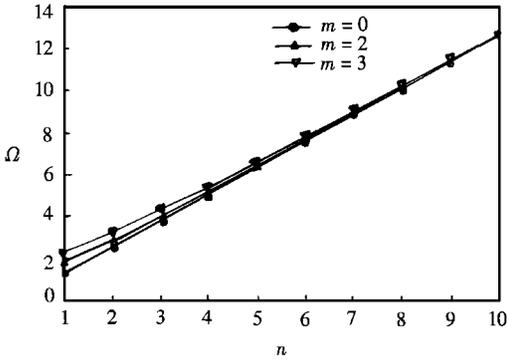


图 3 第一类自由振动最低阶频率

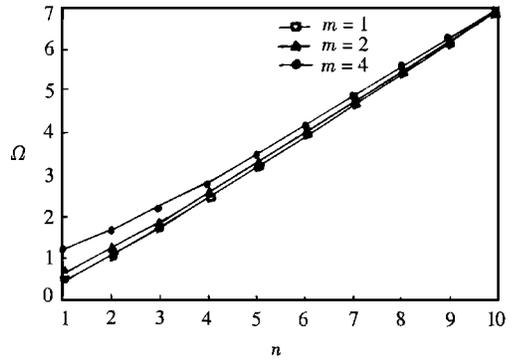


图 4 第二类自由振动最低阶频率

## 5 结 论

1) 横观各向同性弹性体的状态空间方程也可从三维理论出发以  $u, v, w, \alpha_z, \tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  为状态变量直接导出, 不过这样做将导致一个六变量的状态空间方程, 比本文所得到的要复杂, 且后续求解也显得复杂。

2) 引进位移及应力分解式(3), 能够方便地得出板的自由振动(稳定)存在两类独立的形式结论, 这也是本文方法的一大优点。

3) 由于文章长度的限制, 本文仅给出了三个图例。其它的数值结果表明, 对于厚板  $\alpha_z$  与  $\alpha_x$  和  $\alpha_y$  相比不可忽略, 因此那些忽略  $\alpha_z$  影响的板理论在厚板情形是不适用的。

4) 从式(14)和(15)可知, 这两个方程在圆柱坐标系中也是适用的, 因此可以用来分析圆板的非轴对称变形和振动等问题。

## [参 考 文 献]

- [1] Das Y C, Setlur A V. Method of initial functions in two-dimensional elastodynamic problems[J]. J Appl Mech, 1970, 7(1): 137—140.
- [2] Fan J R, Ye J Q. An exact solution for the statics and dynamics of laminated thick plate with orthotropic layers[J]. Int J Solids Struct, 1990, 26(5/6): 655—662.
- [3] DING Hao\_jiang, XU Rong\_qiao, CHEN Wei\_qiu, Chi Y W. Free axisymmetric vibration of transversely isotropic laminated circular plates[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1998, 11(3): 209—215.
- [4] 丁皓江, 梁剑, 邹道勤, 等. 横观各向同性弹性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997.
- [5] DING Hao\_jiang, Chen B, Liang J. On the general solutions for coupled equation for piezoelectric media[J]. Int J Solids Struct, 1996, 33(16): 2283—2298.
- [6] 罗家洪. 矩阵分析引论[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1992.

# On the Bending, Vibration and Stability of Laminated Rectangular Plates With Transversely Isotropic Layers

DING Hao\_jiang, CHEN Wei\_qiu, XU Rong\_qiao

( Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P R China )

**Abstract:** A method based on newly presented state space formulations is developed for analyzing the bending, vibration and stability of laminated transversely isotropic rectangular plates with simply supported edges. By introducing two displacement functions and two stress functions, two independent state equations were constructed based on the three-dimensional elasticity equations for transverse isotropy. The original differential equations are thus decoupled with the order reduced that will facilitate obtaining solutions of various problems. For the simply supported rectangular plate, two relations between the state variables at the top and bottom surfaces were established. In particular, for the free vibration (stability) problem, it is found that there exist two independent classes. One corresponds to the pure in-plane vibration (stability) and the other to the general bending vibration (stability). Numerical examples are finally presented and the effects of some parameters are discussed.

**Key words:** transverse isotropy; rectangular plate; state space method