

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0001-08

轴压作用下粘弹性柱壳的动力学行为^{*}

程昌钧, 张能辉

(固体力学教育部重点实验室, 上海大学 力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 基于大挠度薄壳的 Kûrmûn_Donnell 理论和各向同性线粘弹性材料的 Boltzmann 定律, 首先推导了浅壳的本构方程, 然后利用与建立弹性薄板 Kûrmûn 方程类似的过程, 得到了关于挠度和应力函数的控制方程. 在合适的假设下, 一种近似理论被用来分析轴压作用下粘弹性柱壳的力学行为. 最后, 利用各种数值方法考察了粘弹性柱壳的动力学行为, 发现了超混沌、混沌、奇怪吸引子和极限环等多种动力学性质.

关键词: Kûrmûn_Donnell 理论; 粘弹性柱壳; 混沌; 超混沌; 奇怪吸引子; 极限环

中图分类号: O342 文献标识码: A

引 言

由于粘弹性结构被广泛地用于各种工程中, 粘弹性理论及其应用正逐渐成为一个具有吸引力的研究领域. 但是就我们所知, 有关粘弹性壳体动力学行为的研究还很少报道, 迄今为止, 大部分工作是讨论粘弹性壳体的稳定性. Potapov(1978)^[1]研究了受压粘弹性正交壳体的稳定性. Minakova 和 Timakov(1978)^[2]研究了在依赖于时间的均匀外压作用下分段均质粘弹性壳体的轴对称稳定性. Drozdov(1993)^[3]讨论了周期载荷和随机载荷作用下粘弹性壳体的稳定性. Brotskaya(1995)^[4]提供了非对称粘弹性壳体的稳定性数学模型. 丁睿(1997)^[5]讨论了小挠度粘弹性壳体的动力学行为, 得到了一些有意义的结果.

本文将基于 Kûrmûn_Donnell 薄壳理论的基本假设和各向同性线粘弹性材料的 Boltzmann 定律, 首先借助于 Laplace 变换及其反变换技术, 得到了浅壳的本构方程. 然后利用与建立弹性薄板 Kûrmûn 方程^[6]同样的过程^[7,8,9], 推导了以挠度和应力函数为未知量的数学模型. 在合适的假设下, 建立了轴压作用下粘弹性圆柱壳的一种近似理论, 它们是一组非线性积分-偏微分方程. 为了求解给定的初边值问题, 我们首先对这个问题在空域上使用了 Galerkin 方法, 并在时域上利用 Leibnitz 法则得到了一个 4 阶非线性非自治常微分方程的初值问题. 然后, 利用动力学中的各种方法, 如时程曲线、功率谱、相图、Poincaré 映射、Liapunov 指数谱和 Liapunov 维数等, 详细研究了轴向载荷 $\lambda(t) = \lambda_0 \cos(\theta t)$ 作用粘弹性圆柱壳的动力学行为. 对于给定的

* 收稿日期: 2000_03_21; 修订日期: 2000_08_29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772027); 上海市科学技术发展基金资助项目(98JC14032); 上海市教育发展基金资助项目(99A01); 上海市博士后基金资助项目(99 年度)

作者简介: 程昌钧(1937—), 女, 重庆市人, 教授, 博导;
张能辉(1970—), 男, 河北献县人, 副教授, 博士.

材料和几何参数,发现了超混沌、混沌、奇怪吸引子和极限环等动力学性质。这些性质对于工程设计是非常重要的。

1 公 式

为了描述浅壳,建立了直角坐标系 x_1, x_2, x_3 。壳体的位移 u_i 、应变 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 、内力 $M_{\alpha\beta}$ 和 Q_α 可以被看成是 x_1, x_2 ^[10] 和时间 t 的函数。今后, Latin 下标表示 1, 2, 3, Greek 下标表示 1, 2。

基于 Kûmûn_Donnell 大挠度壳体理论的基本假设和各向同性线性粘性材料的 Boltzmann 定律,利用 Laplace 变换及其反变换技术,不难得到浅壳的本构方程为

$$\sigma_{\alpha\beta} = G_1 \varepsilon_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} G_3 \varepsilon_{\gamma\gamma}, \quad (1a)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = J_1 \sigma_{\alpha\beta} + [(J_2 - J_1)/3] \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}, \quad (1b)$$

$$G_3 = G_1 \varepsilon^{-1} [(G_2(s) - G_1(s))/(s(2G_s(s) + G_2(s)))]], \quad (1c)$$

其中, $G_\alpha(t)$ 和 $J_\alpha(t)$ 分别是材料的松弛和蠕变函数, $G_3(t)$ 是所谓的“结构函数”^[7,8,9] L^{-1} 表示 Laplace 变换 L 的逆变换,符号 ε 表示 Boltzmann 算子,其定义为

$$g(t) \varepsilon u(t) = g(0)u(t) + \int_0^\infty u(\tau) \frac{dg(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau = g(0)u(t) + g \times t * u(t). \quad (2)$$

由浅壳的基本假设,我们有下面的几何关系

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (3a)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha} - u_{3, \alpha} u_{3, \beta})/2 - (k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha})u_3/2, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = -x_3 u_{3, \alpha\beta}, \quad (3b)$$

这里 $k_{\alpha\beta}$ 是初始曲率, $k_{12} = 0$ 。由(3),我们可以得到协调方程

$$\varepsilon_{11, 22} + \varepsilon_{22, 11} - 2\varepsilon_{2, 12} = (u_{3, 12})^2 - u_{3, 11}u_{3, 22} - k_{11}u_{3, 22} - k_{22}u_{3, 11}, \quad (4)$$

引进内力 $N_{\alpha\beta}$ 、 Q_α 和内力矩 $M_{\alpha\beta}$, 即

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3,$$

则可推得下面的平衡运动方程

$$N_{\alpha\beta, \beta} = 0, \quad (5a)$$

$$Q_{\alpha, \alpha} + N_{\alpha\beta}(u_{3, \alpha\beta} + k_{\alpha\beta}) + q = \rho h u_{3, t}, \quad (5b)$$

其中 q 是给定的法向力, ρ 是密度, h 是厚度。

由(5a)引进应力函数 $F(x_\alpha, t)$, 并使下式成立

$$N_{11} = hF_{, 22}, \quad N_{22} = hF_{, 11}, \quad N_{12} = N_{21} = -hF_{, 12}. \quad (6)$$

然后由方程(1)(3)~(5)和 Poisson 比 $\nu(t) = \text{const}$, 可以得到粘弹性浅壳的控制方程

$$\begin{cases} \rho h w_{, tt} + D \varepsilon(\cdot^4 w) - h[w, F] - \\ q - h(k_{11}F_{, yy} + k_{22}F_{, xx}) = 0, \\ \cdot^4 F + E \varepsilon\left\{ [w, w]/2 + (k_{11}w_{, yy} + k_{22}w_{, xx}) \right\} = 0 \\ (x_\alpha, t) \in \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (7)$$

这里我们已令 $x = x_1, y = x_2, w = u_3, D = \frac{E(t)h^3}{12(1-\nu^2)}$, $E(t)$ 是拉伸松弛函数, $[w, F] =$

$w_{, xx}F_{, yy} - 2w_{, xy}F_{, xy} + w_{, yy}F_{, xx}$ 。令 R 和 L 分别是柱壳的半径和长度, 并注意到 $k_{11} = 0, k_{22} =$

$1/R$, 在 $q = 0$ 的情况下, 我们有柱壳的控制方程

$$\begin{cases} \rho h w_{, tt} + D \varepsilon(\cdot^4 w) - h[w, F] - hF_{, xx}/R = 0 \\ \cdot^4 F + E \varepsilon\left\{ [w, w]/2 + w_{, xx}/R \right\} = 0 \\ (x_\alpha, t) \in \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (8)$$

考虑如下边界条件和封闭条件

$$w = 0, \quad M_{xx} = 0 \quad (\text{对于 } x = 0, L), \tag{9a, b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{2\pi R} N_{xx} dy &= h \int_0^{2\pi R} F_{,yy} dy = -2\pi h R P \quad (\text{对于 } x = 0, L), \\ \int_0^{2\pi R} (N_{xy} + M_{xy}/R) dy &= - \int_0^{2\pi R} [hF_{,xy} + (1-\nu)D \neq w_{,xy}/R] dy = 0, \end{aligned} \right. \tag{9c, d}$$

和

$$\int_0^{2\pi R} v_{,y} dy = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi R} [F_{,xx} - \nu F_{,yy} + E \neq (w/R - w_{,y}^2/2)] dy = 0, \tag{9e}$$

这里 P 是给定的轴向压力。

假设给定如下初始条件

$$\left. \begin{aligned} w(t) = F(t) = 0 \quad (x_\alpha, t) \in \Omega \times (-\infty, 0), \\ w|_{t=0} = w_0, u|_{t=0} = u_0 \quad (x_\alpha, t) \in \Omega \times t = 0, \end{aligned} \right\} \tag{10a, b}$$

这里 w_0 和 u_0 是 $t = 0$ 时已知的位移和速度。

引进量纲为一的变量和参数

$$\left. \begin{aligned} \xi = x/R, \quad \eta = y/r, \quad l = L/R, \quad c = [12(1-\nu^2)]^{1/2}, \quad \beta = cR/h, \quad W = cw/h, \\ f = c^2 F/(E(0)h^2), \quad \lambda^2 = \beta^2 P/E(0), \quad m = \beta^2 V_c^2/E(0), \quad \tau = tV_c/b, \\ \tau' = TV_c/b, \quad W^0 = cw_0/h, \quad W_0 = \beta u_0/V_c, \quad e(\tau) = D(\tau)/D(0) = E(\tau)/E(0), \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

这里 V_c 和 b 是特征速度和长度。经过一些计算, 方程(8) 和条件(9)(10) 变为

$$\left\{ \begin{aligned} mW_{,tt} + e \neq (\cdot\cdot\cdot W) - [W, f] - \beta f_{,xx} &= 0 \quad (x_\alpha, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned} \right. \tag{12a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cdot\cdot\cdot f + e \neq \left\{ [w, w]/2 + \beta W_{,xx} \right\} &= 0 \quad (x_\alpha, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned} \right. \tag{12b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} W = \cdot\cdot\cdot W = 0 \end{aligned} \right. \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_{,xy} dy = -2\pi\lambda, \quad \int_0^{2\pi} [f_{,xy} + (1-\nu)\beta^{-1}e \neq W_{,xy}] dy &= 0 \quad (\text{对于 } x = 0, l), \end{aligned} \right. \tag{14}$$

$$\int_0^{2\pi} f_{,xx} - Y_{,yy} + e \neq (\beta W - W_{,y}^2/2)] dy = 0, \tag{15}$$

$$\left\{ \begin{aligned} W(t) = f(t) = 0 \quad (x_\alpha, t) \in \Omega \times (-\infty, 0), \end{aligned} \right. \tag{16}$$

$$\left\{ \begin{aligned} W|_{t=0} = W_0, \quad W_0|_{t=0} = W_0(x_\alpha, t) \in \Omega \times t = 0. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

这里 $(x, y, t, T) \equiv (\xi, \eta, \tau, \tau')$ 和 $\Omega \equiv \{(x, y) \equiv (\xi, \eta) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ 。

2 解 法

令 $W(x, y, t)$ 为

$$W(x, y, t) = u(t) \sin(\pi x/l) \sin(ny) \quad (n \geq 4), \tag{18}$$

显然边界条件(13) 自动满足。代(18) 入(12b) 和(14), 不难得到应力函数为

$$f = e \neq [A_1 \cos(\pi x/l) + A_2 \cos(2\pi y) + A_3 \sin(\pi x/l) \sin(ny)] - \lambda y^2/2, \tag{19}$$

其中,

$$A_1 = \frac{(n\pi l)^2}{32\pi^2}, \quad A_2 = \frac{(\pi u)^2}{32(nl)^2}, \quad A_3 = \frac{\beta u \pi^2}{l[(\pi/l)^2 + n^2]l^2}.$$

假设材料函数 $e(t)$ 满足条件

$$\begin{cases} e(t) = e_0 + e_1 \exp(-\alpha t), \\ e^\lambda(t - \tau) = -e_1 \exp(-\alpha t) \cdot \alpha \exp(\alpha \tau) = -\phi_1(t) \cdot \phi_2(\tau), \end{cases} \quad (20)$$

代(18)、(19)、(20)入(12a)和(15),可得1阶 Galerkin 近似方程

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [f_{,xx} - Y_{,yy} + e^\lambda (\beta W - W_{,y}^2/2)] dy \right\} \sin(\pi x/l) \sin(ny) dx dy = 0, \quad (21a)$$

$$m\ddot{u} + Ce^\lambda u + Bu(e^\lambda - u^2) - \lambda Du = 0, \quad (21b)$$

这里,

$$C = [n^2 + (\pi/l)^2]^2 + \beta^2(\pi/l)^4[n^2 + (\pi/l)^2]^{-2}, B = [n^4 + (\pi/l)^4]/16, D = (\pi/l)^2.$$

通过 Leibnitz 法则, (21b) 可变为一个4阶的非线性常微分方程

$$g_4 \frac{d^4 u}{dt^4} + g_3 \frac{d^3 u}{dt^3} + g_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + g_1 \frac{du}{dt} = 0, \quad (22a)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} g_4 &= m\ddot{u}, g_3 = -m(\ddot{u} - 2\alpha\dot{u}), \\ g_2 &= -m\alpha(\ddot{u} - \alpha\dot{u}) + ae_0u(C + Bu^2) + D(\lambda + \alpha\lambda)u, \\ g_1 &= [C\alpha(2 - e_1) + 2Bu(3\dot{u} + 3\alpha u - 2\alpha e_1 u) - 2D(\lambda + \alpha\lambda)]u + \\ &\quad \alpha^2 e_0 u(C + Bu^2) - D(\lambda + 2\alpha\lambda + \alpha^2 \lambda)u. \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

显见方程(22)是一个非线性非自治微分方程组,其相应的自治系统为

$$\dot{Y} = F(Y), \quad Y = \{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4\}^T, \quad (23a)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= t, \quad y_1 = u, \quad y_2 = \dot{u}, \quad y_3 = \ddot{u}, \quad y_4 = \dddot{u}, \\ F_0 &= 1, \quad F_1 = y_2, \quad F_2 = y_3, \quad F_3 = y_4, \\ F_4 &= y_4(y_2^{-1}y_3 - 2\alpha) + \alpha y_3(y_2^{-1}y_3 - \alpha) + \\ &\quad m^{-1}y_2^{-1}y_3[\alpha e_0 y_1(C + By_1^2) - D(\lambda + \alpha\lambda)y_1] - \\ &\quad m^{-1}\{y_2[C\alpha(2 - e_1) + 2By_1(3y_2 + 3\alpha y_1 - 2e_1\alpha y_1) - 2D(\lambda + \alpha\lambda)] + \\ &\quad \alpha^2 e_0 y_1(C + By_1^2) - D(\lambda + 2\alpha\lambda + \alpha^2 \lambda)y_1\}. \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

令位移 W_0 和速度 \dot{W}_0 的形式与(18)类似,则初始条件为

$$\left. \begin{aligned} y_0(0) &= 0, \quad y_1(0) = u_0, \quad y_2(0) = \dot{u}_0, \\ y_3(0) &= -m^{-1}y_1(0)[C + By_1^2(0)] + m^{-1}\lambda(0)y_1(0), \\ y_4(0) &= -\alpha y_3(0) + m^{-1}D[\lambda(0)y_1(0) + \lambda(0)y_2(0) + \alpha\lambda(0)y_1(0)] - \\ &\quad m^{-1}C[y_2(0) + \alpha e_0 y_1(0)] - m^{-1}By_1^2(0)[3y_2(0) + \alpha e_0 y_1(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

方程(23)的线性化系统为

$$\dot{X} = GX, \quad X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}^T, \quad (25)$$

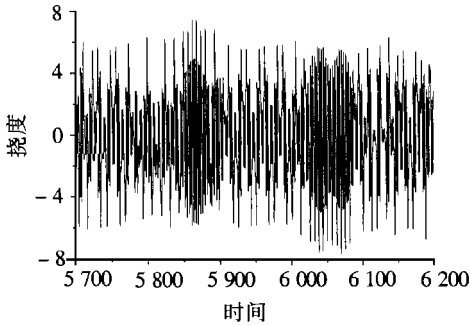
其中, G 是5阶方阵,其非零元素为

$$\left. \begin{aligned}
 G_{12} &= G_{23} = G_{34} = 1, \\
 G_{40} &= -m^{-1}D(\ddot{\lambda} + \alpha\lambda)(y_1 y_2^{-1} y_3 - 2y_2) + m^{-1}D(\ddot{\lambda} + 2\alpha\dot{\lambda} + \alpha^2\lambda), \\
 G_{41} &= m^{-1}\alpha_0(y_2^{-1} y_3 - \alpha)(C + 3By_1^2) - 2m^{-1}By_2(3y_2 + 6\alpha y_1 - 4\alpha e_1 y_1) - \\
 &\quad m^{-1}Dy_2^{-1} y_3(\ddot{\lambda} + \alpha\lambda) + m^{-1}D(\ddot{\lambda} + 2\alpha\dot{\lambda} + \alpha^2\lambda), \\
 G_{42} &= -y_2^{-1} y_3(y_4 + \alpha y_3) + m^{-1}y_2^{-2} y_3[-\alpha e_1 y_1(C + By_2) + D(\ddot{\lambda} + \alpha\lambda)y_1] - \\
 &\quad m^{-1}[C\alpha(2 - e_1) + 2By_1(6y_2 + 3\alpha y_1 - 2\alpha e_1 y_1) - 2D(\ddot{\lambda} + \alpha\lambda)], \\
 G_{43} &= y_2^{-1}(y_4 + 2\alpha y_3) - \alpha^2 + m^{-1}y_2^{-1}[\alpha_0 y_1(C + By_2) - Dy_1(\ddot{\lambda} + \alpha\lambda)], \\
 G_{44} &= y_2^{-1} y_3 - 2\alpha,
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

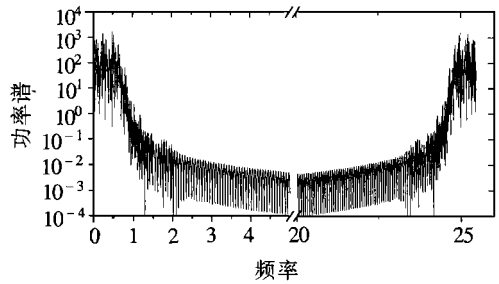
这里, y_i 是初值问题(23), (24) 的解。因此, 问题最终归结为求解边值问题(23) (24)。

3 数值结果和讨论

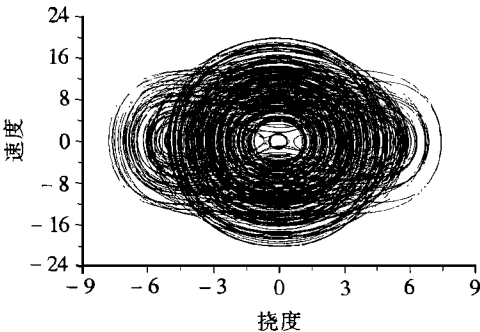
令 $\lambda(t) = \lambda_0(\cos\theta t)$, $T_0 = 2\pi/\theta$, 并取参数 $u_0 = 0$, $i_0 = 1$, $l = 1$, $m = 100$, $e_0 = 0.1$, $e_1 = 0.9$, $\theta = 1$, $\lambda_0 = 100$ 和 $n = 4$, 然后利用各种动力学方法我们可以获得轴压周期载荷作用下柱壳的动力学行为。首先对(23) (24) 使用变步长 Runge_Kutta_Merson 方法, 可得到 $y_1(t)$ 的时程曲线, 连续的相平面描述(y_1, y_2) 和 Poincaré 映射。然后利用 Origin 软件中 FFT 功能, 获得了



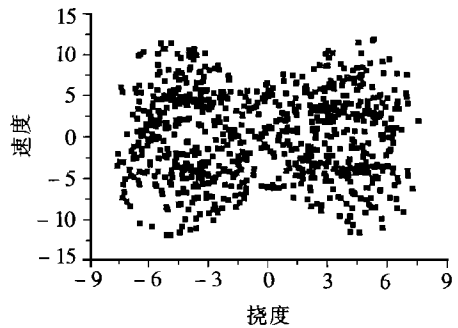
(a) 时程曲线



(b) 功率谱



(c) 相平面



(d) Pioncar 映射

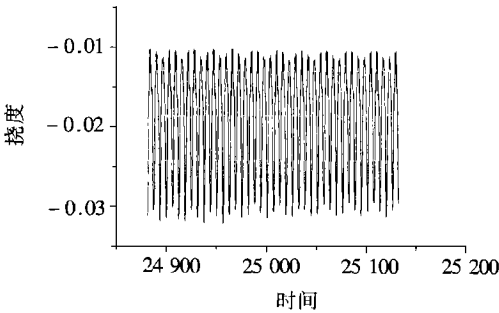
图1 $(\alpha, \beta) = (0.001, 10)$

$y_1(t)$ 的功率谱。最后采用 Gram_Schmit 正交化方法^[11], 计算了系统的 Liapunov 指数 σ_i , 并将结果列于表 1 中, 其中 $\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_4$ 。由表 1 可见, 在所有算例中 $\Lambda = \sum \sigma_i < 0$, 这表明系统是耗散的。对于给定的参数表 1 中也给出了 Liapunov 维数, 这里 D_L 的定义为^[12]

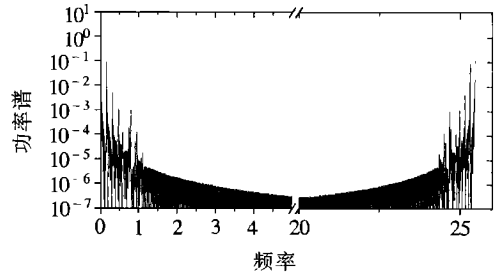
$$D_L = K + \left(\sum_{i=1}^K \sigma_i \right) / |\sigma_{k+1}|,$$

K 是使 $\sum_{i=1}^K \sigma_i \geq 0$ 成立的最大正整数。图 1~3 中分别示出了给定参数下的各种动力学图。

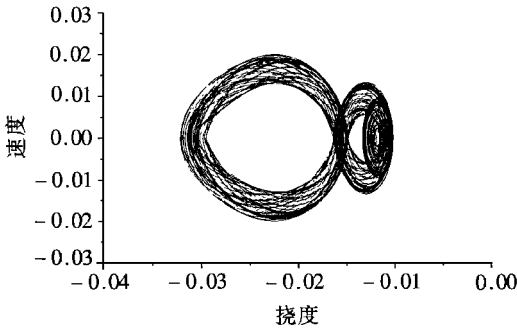
当 $(\alpha, \beta) = (0.001, 10)$ 时, 由图 1 可见, 时程曲线不规则, 功率谱连续宽频, 相轨有伸展和折叠, Poincaré 映射上的点集有类似 Cantor 集的性质, 其形状象个蝴蝶。因此, 此时系统是不稳定的, 而且表 1 中的定性指标表明系统具有一个 Liapunov 指数谱类型为 $(+, +, 0, -, -)$ 的超混沌奇怪吸引子。



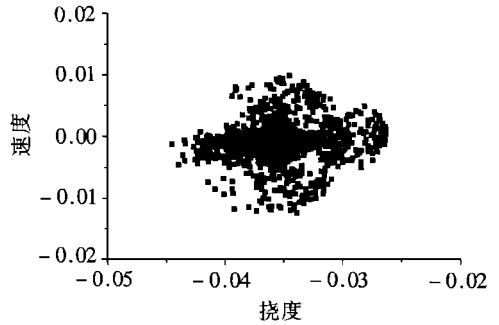
(a) 时程曲线



(b) 功率谱



(c) 相平面



(d) Poincaré 映射

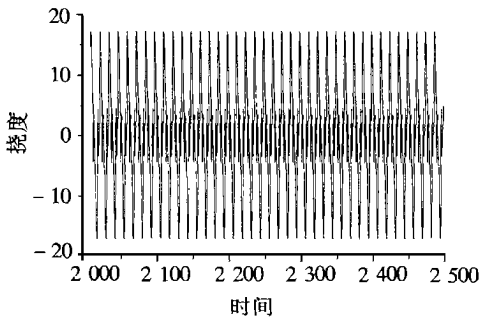
图 2 $(\alpha, \beta) = (0.001, 100)$

图 2 表明, 当 $(\alpha, \beta) = (0.001, 100)$ 时, 系统是不稳定的, 但是其 Liapunov 指数谱类型为 $(+, 0, 0, 0, -)$, 此时系统具有混沌的奇怪吸引子。显然, 当 $(\alpha, \beta) = (0.001, 10)$ 时, 系统的混沌程度要比当 $(\alpha, \beta) = (0.001, 10)$ 时的强。

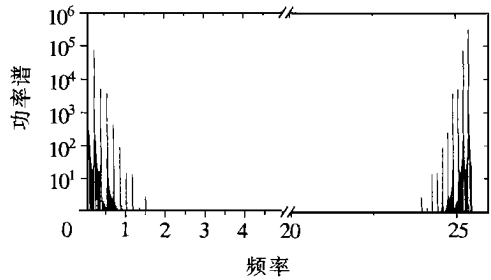
当 $(\alpha, \beta) = (10, 10)$ 时, 图 3 中的时程曲线规则, 功率谱仅在一些离散的点上出现峰值, 轨线是封闭的, Poincaré 映射上的点集仅有两个孤立的点。所以此时系统有稳定的周期为 $2T_0$ 的周期运动, 而且定性指标表明系统有一个 Liapunov 指数谱类型为 $(0, -, -, -, -)$ 的极限环。

表 1 一些定性指标

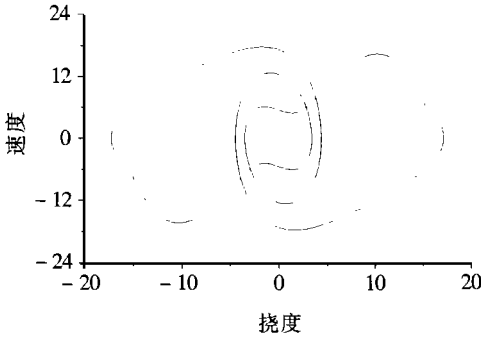
α	β	Liapunov 指数谱	Λ	D_L	状态
0.001	10	(1.46, 0.21, 0, -0.22, -1.46)	-0.0007	4.993	超混沌, 不稳定 奇怪吸引子
	100	(1.31, 0, 0, 0, -1.32)	-0.0106	4.992	混沌, 不稳定 奇怪吸引子
10	10	(0, -0.49, -2.53, -7.20, -9.78)	-20.004	1	极限环, 稳定 周期吸引子
	100	(0, -0.24, -3.08, -6.96, -1.36)	-20.0019	1	极限环, 稳定 周期吸引子_2T ₀



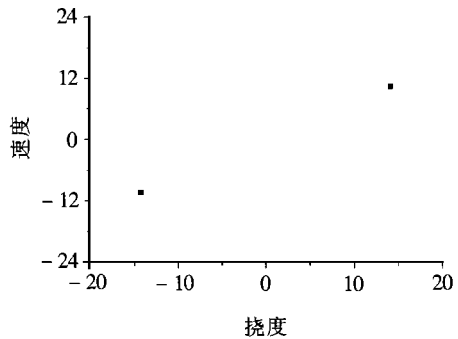
(a) 时程曲线



(b) 功率谱



(c) 相平面



(d) Poincare 映射

图 3 $(\alpha, \beta) = (10, 10)$

总之, 轴向周期激励下的粘弹性柱壳具有丰富的动力学行为, 例如, 超混沌、混沌、奇怪吸引子和极限环等。参数 α 和 β 的增加有助于提高系统的稳定性。

[参 考 文 献]

[1] Potapov V D. Stability of compressed viscoelastic orthotropic shells[J]. J Appl Mech and Tech Phy, 1978, 18(4): 586—592.
 [2] Minakova N I, Timakov V N. Axisymmetric stability of piecewise homogeneous viscoelastic shell acted on by the time dependent uniform external pressure[J]. Mech Solids, 1978, 13(1): 134—138.

- [3] Drozdov A D. Stability of viscoelastic shells under periodic and stochastic loading [J]. *Mech Res Commun*, 1993, **20**(6): 481—486.
- [4] Brotskaya V Y, Milanovich O A, Minakova N I. Mathematical modeling of stability of a viscoelastic shell with nonequal curvatures [J]. *Mech Solids*, 1995, **30**(4): 139—145.
- [5] DING Rui. The dynamical analysis of viscoelastic structures [D]. Ph D Thesis. Lanzhou: Lanzhou University, 1997.
- [6] 程昌钧, 朱正佑. 结构的屈曲与分叉 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991.
- [7] CHENG Chang_jun, ZHANG Neng_hui. Variational principles on static dynamic analysis of viscoelastic thin plates with applications [J]. *Int J Solids Struct*, 1998, **35**(33): 4491—4505.
- [8] ZHANG Neng_hui, CHENG Chang_jun. Non_linear mathematical model of viscoelastic thin plates with its applications [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1998, **165**(4): 307—319.
- [9] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌和超混沌 [J]. *力学学报*, 1998, **30**(6): 690—699.
- [10] 徐芝纶. 弹性理论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [11] Shimada I, Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative systems [J]. *Prog Theor Phys*, 1979, **61**(12): 1605—1615.
- [12] Kubicek M, Marek M. *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures* [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

Dynamical Behavior of Viscoelastic Cylindrical Shells Under Axial Pressures

CHENG Chang_jun, ZHANG Neng_hui

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: The hypotheses of the Kūrnūn-Donnell theory of thin shells with large deflections and the Boltzmann laws for isotropic linear, viscoelastic materials, the constitutive equations of shallow shells are first derived. Then the governing equations for the deflection and stress function are formulated by using the procedure similar to establishing the Kūrnūn equations of elastic thin plates. Introducing proper assumptions, an approximate theory for viscoelastic cylindrical shells under axial pressures can be obtained. Finally, the dynamical behavior is studied in detail by using several numerical methods. Dynamical properties, such as, hyperchaos, chaos, strange attractor, limit cycle etc., are discovered.

Key words: Kūrnūn-Donnell theory; viscoelastic cylindrical shell; chaos; hyperchaos; strange attractor; limit cycle