

文章编号: 1000-0887(2001) 02-0167-15

基于内变量理论的电流变液本构关系*

王 彪¹, 肖忠民²

(1 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001;
2 南洋理工大学 机械与生产学院, 南洋大道, 新加坡)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 研究了电流变液的微结构本构关系。其理论框架是基于内变量理论和机理的分析。电流变液是由高介电常数的颗粒悬浮在某种液体中组成的。在电场作用下, 极化的颗粒将沿着电场方向聚集在一起形成链状结构。颗粒聚集体的大小和方向将随外加电场和应变率的变化进行调整, 因而可以通过建立起能量守恒方程和力平衡方程来确定颗粒聚集体的大小和方向的变化。那么, 一个三维的、清晰的本构关系可以由相互作用能和系统的耗散能导出。具体考虑和讨论了在简单剪切载荷作用下的系统响应, 发现电流变液的切变剪薄粘滞系数同系统 Mason 数之间近似于幂指数 $\propto (Mn)^{-0.82}$ 的关系。

关键词: 电流变液; 内变量理论; 本构关系

中图分类号: TB330.1 文献标识码: A

前 言

电流变体是一种由介电颗粒在低介电和低粘性液体所形成的悬浮液。在电场作用下, 它的粘度会急剧地增大, 这种现象是可逆的。当电源切断后, 系统几乎又能马上恢复到原来的液体状态, 电流变液这种奇异的特性对未来技术有很大的吸引力。近来, 它们已经被制成器件应用在一些智能结构中。现在人们已经弄清了这种转变的机理是由于极性颗粒在电流变体中能沿外加电场方向形成链状结构。许多的工作都分析和证实了这种链状成形的机理, 例如, Tao (1993)^[1], Parthasarathy 和 Klingenberg(1996)^[2]。

电流变液的宏观响应很大程度上是依赖于外加电场和它的微结构参数, 例如颗粒的体积分数和介电常数。我们将建立起一种本构关系来揭示电流变液系统的宏观响应与微结构的关系。这个关系式也可以为工程师编写分析含有电流变液元件的结构有限元程序提供必要的工具。许多研究人员曾对简单剪切载荷作用下的本构关系进行了研究。其中例如: Halsey 等 (1992)^[3,4] 建立了一个预报液体粘度的计算模型。基于非对称应力状态的连续统概念, Rosensweig(1995)^[5] 得到了一种能给出磁流变液屈服应力的有效方法。Klingenberg 和 Zukoski (1990)^[6] 首先利用一理想化的模型来分析电流变液, 他们计算了在简单剪切变形下的弹性行为。Bonnecaze 和 Brady(1992)^[7,8], 给出了一种类似于分子动力模拟的计算方法, 有效地计算

* 收稿日期: 2000_03_03; 修订日期: 2000_11_05

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助课题(19725209)

作者简介: 王彪(1963—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博导, 长江学者。

了在外加电场和流动场作用下悬浮液中任意形状颗粒的静电相互作用。Ginder 和 Ceccio (1995)^[9] 以及 Conrad 等 (1992)^[10] 对电流变液系统的屈服强度给出了广泛的理论与实验研究结果。基于能量的考虑, Bossis 等 (1997)^[11] 预报了磁流变液和电流变液的屈服应力。Martin 和 Odinek (1995)^[12] 利用一个非线性流变模型来考虑电流变液系统中在水动力和电场力作用下颗粒链的断开和聚集。

事实上, 电流变液的响应在应变率作用的不同阶段是不同的。对于准静态载荷, 在小应变时这种链结构是不易断开的, 而是颗粒仅仅会移动一个非常有限的距离。在这种载荷作用下, 可以认为应力只与应变相关, 而与应变率无关。许多研究人员得到的应力-应变关系是最适合描述这一阶段的行为。对于动态载荷, 或者高应变率值时, 链结构变得容易改变, 其尺寸也将由于断开和聚集而改变, 当剪应变率增大或减小时, 它的方向也将根据流场而调整。这样的微结构演化将导致能量的耗散, 并且是形成剪薄现象的主要原因。在这个加载阶段, 可以认为应力与应变率相关, 而与应变无关。正如 Jordan 等 (1997)^[13] 所指那样, 研究电流变液的本构关系有两种方法可循: 即, 一种是基于详尽的微结构电力及水动力学的分析, 而另一种是基于连续统力学。前者已经成功地阐明了系统变量的相互关系, 但它却不能产生显函形式的本构关系。另一方面, 基于连续统力学的模型却往往不能详尽地考虑到微结构的变化。在本文中, 我们将基于内变量理论 [Rice, 1971^[14]; Ziegler, 1983^[15]] 来建立一个三维的本构关系。从悬浮液的微结构着手, 首先给出了在一外加电场和流动场作用下的相互作用能和耗散能。接着, 可以建立起内变量的演化方程, 例如聚集体的方向和大小。最后, 三维本构关系可以依据内变量理论的框架得到。在本文中得到的基于机理的本构关系不仅仅能提供工程师一个闭合形式的方程来编写相应的有限元软件, 而且能建立起电流变液的宏观响应与微结构的关系。

1 含有极化颗粒聚集体的电流变液的比内能

实验表明含有低到中等体积分数的极化颗粒的电流变液的流变性能的变化是由于颗粒聚集成易变的链结构引起的, 而且其大小和方向随流动场和外加电场的作用而变化。当聚集体很接近两端电极时, 作用系统边界的电极对极性颗粒的聚集会产生一个很强的影响。在建立一个材料的微结构本构关系时, 通常要构造一个本构单元。从宏观的观点来看, 该单元应该足够小而能代表材料某一点的性能; 反之, 从微观的观点来看, 该单元应该足够大而能反映出足够的微观信息。因此, 在电极中一个电流变液可以认为是由许多这样的单元堆积而成的, 而且每个单元受到不同的电场和流动场的影响而呈现出不同的响应。那么, 在建立材料的本构关系时, 电极的影响可以不考虑。我们考虑的材料单元可认为是液体中含有椭圆形的极性聚集体的悬浮液。这种假设将简化我们的分析, 因为在常量外场作用下椭圆内的极化强度也是常量。在早些的文章中也有类似的假设, 例如在 Halsey^[3, 4], Bossis^[11] 的工作中等等。单元是受一个沿 z 方向的电场 E^0 以及流动场 V^0 的作用。如果椭圆形聚集体的尺寸用 $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = c$ 来表示, 那么其体积为 $v_a = (4/3)\pi ac^2$ 。在含有颗粒体积分数为 ϕ 的单位体积电流变液中, 聚集体的个数可表示为 $N = \phi/v_a$ 。聚集体是由各向同性的、具有相对介电常数 α^p 的介电颗粒组成的, 而液体的介电常数 α^f 则是较低的。当悬浮液受到一电场作用时, 极化颗粒产生聚集将降低系统的自由能, 如下我们将导出单元体积中的静电能。

首先, 我们考虑液体中含一扁长型椭圆形聚集体。为了考虑其他聚体的影响, 将引进有效电场 E^m , 其定义为周围液体中的体平均场。在局部坐标系中 X , Y 和 Z 轴对应着球的半轴长

$a_1, a_2, a_3 (a_2 = a_3 = c)$, 聚集体内的电场是与有效电场相关的, 可以从单个介电夹杂的问题的解中得到 (Landau 等, 1984^[16], Eringen 和 Maugin, 1990^[17]),

$$\begin{cases} E_x^i = E_x^m / (1 + (\alpha^p / \alpha^f - 1) n_x) = A_x E_x^m, \\ E_y^i = E_y^m / (1 + (\alpha^p / \alpha^f - 1) n_y) = A_y E_y^m, \\ E_z^i = E_z^m / (1 + (\alpha^p / \alpha^f - 1) n_z) = A_z E_z^m, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $n_x = \frac{1 - \beta^2}{2\beta^3} \left[\ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta \right], n_z = n_y = \frac{1}{2}(1 - n_x), \beta = \sqrt{1 - c^2/a^2}$.

如果用 E^0 表示外加电场, 那么电场的体平均表示成:

$$(1 - \phi) E^m + \phi E^i = E^0, \quad (2)$$

把式(1)代入式(2)可以得到有效电场,

$$E_x^m = (1 - \phi + \phi A_x)^{-1} E_x^0, E_y^m = (1 - \phi + \phi A_y)^{-1} E_y^0, E_z^m = (1 - \phi + \phi A_z)^{-1} E_z^0. \quad (3)$$

那么, 在椭球形聚集体中引发的总偶极矩为

$$\begin{cases} P_x = v_a A_x (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 (1 - \phi + \phi A_x)^{-1} E_x^0, \\ P_y = v_a A_y (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 (1 - \phi + \phi A_y)^{-1} E_y^0, \\ P_z = v_a A_z (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 (1 - \phi + \phi A_z)^{-1} E_z^0, \end{cases} \quad (4)$$

其中 α_0 为真空介电常数, v_a 为椭球聚集体的体积.

单个聚集体的相互作用能可定义为液体中含有聚集体而引起的电能变化, 可表示为 (Landau 等, 1984)^[16]

$$u = -0.5 E^m \cdot P = -0.5 v_a \alpha_0 (\alpha^p - \alpha^f) [A_x (1 - \phi + \phi A_x)^{-2} (E_x^0)^2 + A_y (1 - \phi + \phi A_y)^{-2} (E_y^0)^2 + A_z (1 - \phi + \phi A_z)^{-2} (E_z^0)^2] J. \quad (5)$$

电流变液的能量可以认为是由两个部分组成的: 一是介电聚集体的体极化能, 二是聚集体的表面能. 如 Halsey 等 (1992)^[3] 所指出, 表面能也可以由偶极子的相互作用引起, 但它却依赖于聚集体中极化颗粒的排列方式. Bossis 等 (1993)^[18] 也指出颗粒的表面能的产生是由于极化颗粒在不同的区域对能量的贡献是不同的, 即在聚集体的表面和在聚集体的中间是不同的. 因此, 表面能要比体极化能小得多. 为了简化分析, 本文将忽略表面能影响.

在单位体积中有 N 个聚集体, 那么总的相互作用能可表示为:

$$\Psi = Nu = -0.5 \phi (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 [A_x (1 - \phi + \phi A_x)^{-2} (E_x^0)^2 + A_y (1 - \phi + \phi A_y)^{-2} (E_y^0)^2 + A_z (1 - \phi + \phi A_z)^{-2} (E_z^0)^2] J. \quad (6)$$

在本文中, 外加电场 E^0 是沿整体坐标系的 z 轴方向, 在局部坐标系中, (X, Y, Z) 轴对应着半轴 a_1, a_2, a_3 , 其中: X 为对称轴, 而 Z 轴在整体坐标系的 (x, y) 平面上. 那么, 外加电场在局部坐标系上的各个分量可表示为

$$\begin{cases} E_X^0 \\ E_Y^0 \\ E_Z^0 \end{cases} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ -\cos\theta \cos\varphi & -\cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ E^0 \end{cases}, \quad (7)$$

其中 θ 是对称轴 X 和 z 的夹角, φ 是 X 轴在 (x, y) 平面上的投影与 x 轴的夹角.

把式(7)代入式(6), 注意对于旋转椭球聚集体有 $A_y = A_z$, 那么相互作用能可表示为

$$\Psi = -0.5 \phi (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 (E^0)^2 [A_x (1 - \phi + \phi A_x)^{-2} \cos^2\theta + A_y (1 - \phi + \phi A_y)^{-2} \sin^2\theta] J. \quad (8)$$

很明显, 悬浮液系统的相互作用能依赖于外加电场, 聚集体的方向、大小以及它的体积分

数。因此, 由于我们引进了有效场来考察聚集体之间相互作用的影响, 相互作用能将不再是颗粒体积分数的线性函数了。

2 微结构演化下电流变液的耗散势

为了建立悬浮液的本构关系, 我们必须首先给出由于微结构演化引起的耗散势。耗散势就是单位体积和时间内耗散的能量。在本模型中, 悬浮液单元受到一沿 z 方向的电场 E^0 和一线性流动场 V^0 的作用(即一常应变率场)。聚集体的方向随速度 Ω 变化, 而聚体的大小也随流动场和电场而变化。如果第 i 个聚集体中点的平移速度为 U_i , 其可假定为该点的液体流动速度, 那么紧贴着颗粒表面的液体流速可表示为:

$$V_i = U_i + \omega_i \times r_i, \quad \text{在每个面 } S_i \text{ 上}, \quad (9)$$

其中 ω_i 是指第 i 个聚集体的角速度, 可以用 Ω 来表示; r_i 代表着从聚集体中心出发的位置矢量, 而 S_i 是第 i 个聚集体的表面。在没有聚集体时, 液体的流动场为:

$$V_i^0 = U_i + \gamma^0 \cdot r_i, \quad (10)$$

其中 γ^0 是外加应变率张量。

对于不考虑体力作用下的准静态蠕变流体, 液体_颗粒系统的动能是可以忽略的, 而且液体的势能保持恒定值。这样, 在一定的单元中耗散的能量比率 Φ 等于应力在整个液体包围的表面所作的功。因此,

$$\Phi = \iint_{S_0^+} \sum_{S_p} \Pi_{ij} V_i n_j ds, \quad (11)$$

其中 S_0^+ 、 S_p 是材料单元和球形聚集体的表面, V_i 是液体在表面的速度矢量, n_j 是表面的法矢量, 指向液体的, Π_{ij} 是应力矢量。对于牛顿流体, 它可以表示为:

$$\Pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu (\partial_i V_j + \partial_j V_i), \quad (12)$$

其中 p 是静水压力, μ 是液体的剪切粘度。

在单元表面 S_0 应用条件 $V_i = V_i^0$, 式(11) 可以表示为:

$$\Phi = \iint_{S_0^+} \sum_{S_p} \Pi_{ij} V_i n_j ds = \iint_{S_0^+} \sum_{S_p} \Pi_{ij} V_i^0 n_j ds + \iint_{S_p} \Pi_{ij} (V_i - V_i^0) n_j ds. \quad (13)$$

对于不含颗粒的均质流体, 可以引进与外加流速 V_i^0 相对应的应力张量 Π_{ij}^0 , 由能量互易定理 (Happel 和 Brenner, 1986)^[19] 可给出:

$$\iint_{S_0^+} \sum_{S_p} \Pi_{ij} V_i^0 n_j ds = \iint_{S_0^+} \sum_{S_p} \Pi_{ij}^0 V_i n_j ds. \quad (14)$$

上式关系可用来代替式(13) 中的第一项积分, 并应用边界条件, 式(13) 变为:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{S_0^+} \sum_{S_p} \Pi_{ij} V_i n_j ds = \iint_{S_0} \Pi_{ij}^0 V_i^0 n_j ds + \\ &\quad \iint_{S_p} \Pi_{ij}^0 V_i n_j ds + \iint_{S_p} \Pi_{ij} (V_i - V_i^0) n_j ds. \end{aligned} \quad (15)$$

当不考虑惯性影响和体力时, 因为 $\partial_j \Pi_{ij}^0 = 0$, 可消除第二项积分。因此, 能量耗散率可表示为:

$$\Phi = \iint_{S_0} \Pi_{ij}^0 V_i^0 n_j ds + \iint_{S_p} \Pi_{ij} (V_i - V_i^0) n_j ds. \quad (16)$$

把式(9)、(10)和(12)代入式(16) 并假设在单元边界上的压力为零, 可以得到:

$$\Phi = \iint_{S_0} \Pi_{ij}^0 V_i^0 n_j ds + \iint_{S_p} \Pi_{ij} (V_i - V_i^0) n_j ds =$$

$$2\mu\gamma_{ij}^0\dot{\gamma}_{ij}^0 + ND_{ik}\dot{\gamma}_{ik}^0 - ND_{ik}\epsilon_{ijk}\omega_j, \quad (17)$$

其中 ϵ_{ijk} 是置换符号, 有以下的特性: 如果三个符号中任意两个相同时其值为零, 如果 (i, j, k) 是在整数 $(1, 2, 3)$ 中进行偶数循环置换时, 其值为 $+1$, 而如果 (i, j, k) 是在整数 $(1, 2, 3)$ 中进行奇数循环置换时, 其值为 -1 。而且

$$D_{ik} = - \int_{S_p} \Pi_{ij} n_j x_k ds. \quad (18)$$

在推导式(17)时, 我们应用了在悬浮液单元边界上的条件 $\Pi_{ij}^0 = 2\mu\dot{\gamma}_{ij}^0, V_i^0 = \dot{\gamma}_{ij}^0 x_j$ 。聚集体的角速度可表示为:

$$\omega = -\sin\varphi\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \quad (19)$$

在附录I中已导出了由线性流场 $\dot{\gamma}_{ij}^0$ 和聚集体的转动 ω_i 产生的张量 D_{ij} , 可表示为:

$$D_{ij} = M_{ijkl}\dot{\gamma}_{kl}^0 + H_{ijk}\omega_k, \quad (20)$$

其中张量 M_{ijkl}, H_{ijk} 仅依赖于椭球形聚集体的方向和大小, 可见附录 I。把式(20)代入式(17)得:

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu\dot{\gamma}_{ij}^0\dot{\gamma}_{ij}^0 + ND_{ik}\dot{\gamma}_{ik}^0 - ND_{ik}\epsilon_{ijk}\omega_j = 2\mu\dot{\gamma}_{ij}^0\dot{\gamma}_{ij}^0 + NM_{j\alpha\beta}\dot{\gamma}_{ij}^0\dot{\gamma}_{\alpha\beta}^0 + \\ & N(H_{\alpha\beta k} - M_{ij\alpha\beta}\epsilon_{ij})\dot{\gamma}_{\alpha\beta}^0\omega_k - NH_{j\alpha}\epsilon_{\alpha j k}\omega_k\omega_k. \end{aligned} \quad (21)$$

从式(21)可以知道耗散势是比率 $\dot{\gamma}_{ij}^0, \omega_k$ 的二次方程。根据式(8)的相互作用能和式(21)的耗散势, 我们不仅可以建立起系统的本构关系, 而且可以导出微结构演化 $\partial_t \phi$ 的控制方程。

3 电流变液的本构关系

3.1 内变量理论的基本公式

众所周知, 电流变液在某一时刻的热力学状态不仅和当前的应变率 $\dot{\gamma}_{ij}^0$ 有关, 也和该时刻以前的 $\dot{\gamma}_{ij}^0$ 历史相关。有许多种解决方式来确定相应的热力学状态。内变量理论(Rice, 1971^[14], Ziegler, 1983^[15]) 是其中一种较为有效的方法。为了完全确定悬浮液的热力学状态, 除了给定瞬间应变率外, 还需引入一些内变量用以描述加载过程中材料的微结构变化。这样, 材料响应对加载历史的依赖可以用它所产生的结果来替换。即, 在材料单元中微观尺度上结构分布的现在模式可以用内变量的现在值来表示。一旦确定了内变量, 材料的响应仅与当前应变率 $\dot{\gamma}_{ij}^0$ 有关。但是, 内变量得依赖于加载历史。内变量理论是建立在热力学基本原理上的。通过这种方法, 不仅能建立起应力与应变率之间的关系, 还能获得微结构的演化方程。考虑一电流变液的单位体积微元。它的状态变量为应变张量 Π_{ij} , 绝对温度 T 以及一些内变量 ϑ_k 。换句话说, 变量 Π_{ij}, ϑ_k 和 T 能完全地描述系统。热力学第一定律为:

$$dW = dU - dQ, \quad (22)$$

其中 U 是系统的内能, dW 是外力所作的功, dQ 是系统吸收的热量。

热力学第二定律表明, 状态函数 熵 $S(\Pi_{ij}, \vartheta_k, T)$ 满足关系式:

$$T dS \geq dQ. \quad (23)$$

如果(23)等式成立, 则为可逆过程, 否则为不可逆过程。熵还可以表示为如下形式:

$$dS = d^{(r)}S + d^{(i)}S, \quad (24)$$

其中 $d^{(r)}S = dQ/T$ (25)

是可逆熵增量, 它是由外部提供的, 但是

$$d^{(i)}S \geq 0 \quad (26)$$

是不可逆增量, 它是由系统内部产生的。利用方程(22)、(23)、(24)可得到

$$dW = dU - dQ = dU - Td^{(r)}S = dU - TdS + Td^{(i)}S \quad (27)$$

如果应力张量为 τ_{ij} , 那么

$$dW = \tau_{ij}d\eta_{ij} \quad (28)$$

由于 U 和 S 是状态函数, 方程(28) 可以写为:

$$\tau_{ij}d\eta_{ij} = \left[\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}} - T \frac{\partial S}{\partial \eta_{ij}} \right] d\eta_{ij} + \left[\frac{\partial U}{\partial \vartheta_k} - T \frac{\partial S}{\partial \vartheta_k} \right] d\vartheta_k + \left[\frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} \right] dT + Td^{(i)}S \quad (29)$$

如果系统仅受热, 则(29) 式变为:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} \right] dT + Td^{(i)}S = 0 \quad (30)$$

式中第二项是非负的, 但是括号中的数是一状态函数, 因此它是与 dT 无关的. 因为(30) 式不管 dT 是正或负都成立, 因此

$$\frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} = 0 \quad (31)$$

虽然上式是在一种特殊情况下得到的, 但它普遍适用于任何过程. 如果我们引入系统的自由能,

$$\Xi = U - TS, \quad (32)$$

那么, (29) 式简化为:

$$\tau_{ij}d\eta_{ij} = \frac{\partial \Xi}{\partial \eta_{ij}}d\eta_{ij} + \frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta_k}d\vartheta_k + Td^{(i)}S, \quad (33)$$

这是 Ziegler(1983)^[15] 提出来的, $Td^{(i)}S$ 和外力功有着相似的形式, 也可以表示为:

$$Td^{(i)}S = A_{ij}d\eta_{ij} + B_k d\vartheta_k \quad (34)$$

把式(34) 代入式(33) 中, 得

$$\tau_{ij}d\eta_{ij} = \left[\frac{\partial \Xi}{\partial \eta_{ij}} + A_{ij} \right] d\eta_{ij} + \left[\frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta_k} + B_k \right] d\vartheta_k \quad (35)$$

由于 η_{ij} 、 ϑ_k 是独立的状态变量, 因此, 从上式得:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \Xi}{\partial \eta_{ij}} + A_{ij}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta_k} + B_k = 0 \quad (37)$$

(36) 式是材料的本构关系, (37) 是可以用来确定内变量值的演化方程.

我们可以用对时间的偏微分将(34) 式改写为:

$$\Phi = A_{ij}v_{ij}^0 + B_k \vartheta_k, \quad (38)$$

其中 Φ 是耗散功, 它是耗散力所作的功的比率. 但是, 即使知道了耗散函数, (38) 式也不能确定耗散力, 张量 A_{ij} 和向量 B_k . 但是, 一旦知道了各分量的比例, 它们的大小就确定了. 为了确定 A_{ij} 和 B_k , 我们引入下面的正交条件: 与速度 v_{ij}^0 或 ϑ_k 相对应的耗散力在端点上垂直于耗散面 $\Phi = \Phi_0$, 因此

$$A_{ij} = \lambda_1 \partial \Phi / \partial v_{ij}^0, \quad B_k = \lambda_2 \partial \Phi / \partial \vartheta_k, \quad (39)$$

其中 λ_1 、 λ_2 是比例因子, 可由(38) 式确定

$$\lambda_1 = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial v_{ij}^0} v_{ij}^0 \right]^{-1} \Phi, \quad \lambda_2 = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} \vartheta_k \right]^{-1} \Phi \quad (40)$$

由于 Φ 是速度的二次函数, 因此(40) 满足

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2 \quad (41)$$

由于应变和应变率是对称张量, 将式(39) 和式(41) 代入式(36) 和式(37), 可得到

$$\tau_{ij} = 0.5 \left[\frac{\partial \Xi}{\partial \eta_{ij}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \eta_{ji}} \right] + 0.25 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial v_{ij}^0} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{ji}^0} \right], \quad (42)$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta_k} + 0.5 \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} = 0 \quad (43)$$

值得指出的是(Ziegler(1983)^[15] 也曾讨论过): 此正交条件和最大耗散率准则是一致的.

3.2 本构方程

3.2.1 屈服前的电流变液本构方程

实验数据表明:当剪切应力小于电流变液的屈服强度时,它和一般固体材料是相似的:应力和应变近似呈线性关系,它的一个确定特征是:当有电场施加于这种静态的电流变体时,其中的颗粒将沿着电场方向排成链状结构的列。在剪力作用下,颗粒的纤维状聚集体保持不变,但它们象图 1 所示那样稍微旋转了一个角度。我们进一步假设:电极和颗粒链状结构之间没有滑移。在这种条件下,颗粒链的小倾角直接和应变有关,如果剪应变 $\eta_{13} = \eta_{31}$, 那么

$$2\eta_{13} = \eta_{13} + \eta_{31} = \tan\theta \approx \theta \quad (44)$$

将它代入方程(8),可以得到系统的相互作用能为:

$$\Psi = -0.5\phi(\alpha^p - \alpha^f)\alpha_0(E^0)^2 \left\{ A_x(1 - \phi + \phi A_x)^{-2} - [A_x(1 - \phi + \phi A_x)^{-2} - A_y(1 - \phi + \phi A_y)^{-2}] (\eta_{13} + \eta_{31}) \right\} \quad (45)$$

对等温过程有

$$\partial \Psi / \partial \eta_{ij} = \partial \Psi / \partial \eta_{ij} \quad (46)$$

忽略耗散条件,剪切应力可由方程(42)得到

$$\tau_{13} = 2G^* \eta_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_{13}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_{31}} \right] = 2\phi\alpha_0(\alpha^p - \alpha^f)(E^0)^2 [A_x(1 - \phi + \phi A_x)^{-2} - A_y(1 - \phi + \phi A_y)^{-2}] \eta_{13}, \quad (47)$$

其中有效剪切弹性模量为:

$$G^* = \phi\alpha_0(\alpha^p - \alpha^f)(E^0)^2 [A_x(1 - \phi + \phi A_x)^{-2} - A_y(1 - \phi + \phi A_y)^{-2}], \quad (48)$$

如果颗粒的介电常数没有达到无穷大,纤维状聚集体可以假设为柱状电介质,因此,退极化系数为 $n_x = 0, n_y = n_z = 1/2$,有效剪切模量则为

$$G^* = \phi\alpha_0(\alpha^p - \alpha^f)(E^0)^2 \left[1 - \frac{2\alpha^f}{\alpha^p + \alpha^f} \left(1 - \phi \frac{\alpha^p - \alpha^f}{\alpha^p + \alpha^f} \right)^{-2} \right], \quad (48)'$$

反之,聚集体不可以假设为无限长的柱体,不能用(48)'式,只能由(48)式求解。

从(47)式,我们知道:电流变液在初始阶段呈现普通弹性材料的特性,其剪切模量由(48)式给出,值得指出的是:此结论是建立在小倾角假设上的,如(44)式所示,而且颗粒链在电极上不滑移。当外加剪应变达到其临界值 η_{13}^c 时,颗粒链将断开,由(47)式给出的相应剪应力即为电流变体的静态屈服应力。

Ginder 和 Davis(1993)^[20]得到的实验数据证实了本文的理论预报值。他们研究的模型液体是:体积分数为 $\phi = 0.2$ 、介电常数为 $\alpha^p = 2000$ 的钛酸钡颗粒悬浮在相对介电常数 $\alpha^f = 2$ 的正十二烷中,其中真空的介电常数 $\alpha_0 = 8.85417 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。剪切模量与外加电场的关系如图 2 所示,在钛酸钡系统中,剪切模量的预测值稍低于实验值,这可能是由于电极的影响。

3.2.2 屈服后的本构关系

屈服后的电流变液可近似于 Bingham 固体,即

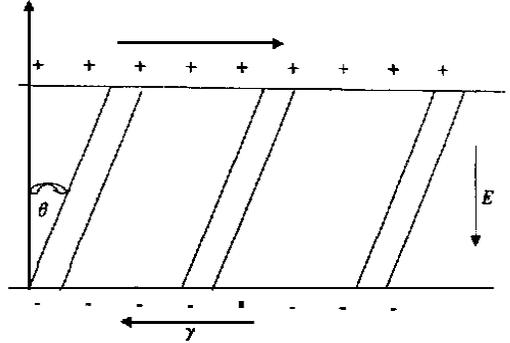


图 1 初始态电流变体示意图

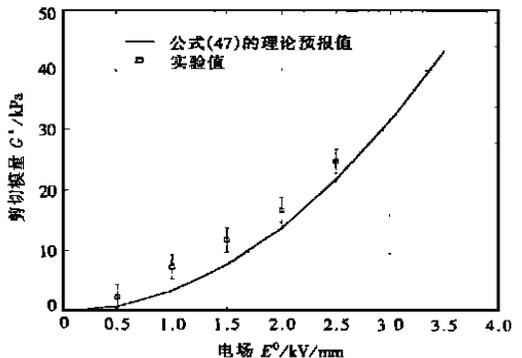


图 2 剪切模量与外加电场的关系

$$\tau = \tau^v + \mu^* \dot{\gamma}^0 \quad (49)$$

其中 τ^v 是系统的屈服应力, μ^* 是液体的粘度. 实验表明: 大多数电流变液的剪切粘度(即悬浮液的粘度)随着剪切速度的上升而下降. Klingenberg 和 Zukoski (1990)^[6] 认为这种剪薄行为是因为在电极附近形成了压缩边界层, 因此, 速度梯度仅出现在试样的一部分. Halsey 等 (1992)^[3,4] 假设聚合物的尺寸和方向随着流场的变化而变化, 他认为剪薄效应是由于流体的体积特性. Shulman 等(1986)^[21] 对磁流变体考虑了同样的问题.

在本文中, 尺寸参数 a 和 c , 聚合物的方向 θ , φ 是作为系统的内变量, 一旦确定, 材料将变为普通的悬浮液, 就是说, 如果某时刻内变量的值给定, 系统的响应依赖于该时刻的应变率, 与其历史无关. 实际上, 内变量的值已考虑了加载历史. 把式(21)代入式(42)可得

$$\begin{aligned} \tau_{mn} = & \tau_{mn}^v + 0.5 \left(\partial \Psi / \partial \eta_{mn} + \partial \Psi / \partial \eta_{nm} \right) + 0.25 \left(\partial \Phi \partial \gamma_{mn}^0 + \partial \Phi \partial \gamma_{nm}^0 \right) = \\ & \tau_{mn}^v + 2\mu \dot{\gamma}_{mn}^0 + 0.25N (M_{mna\beta} + M_{nma\beta} + M_{a\beta mn} + M_{a\beta nm}) \dot{\gamma}_{a\beta}^0 + \\ & 0.25N [H_{mnk} + H_{mkn} - (M_{jmn} + M_{ijn}) \epsilon_{kj}] \omega_k, \end{aligned} \quad (50)$$

其中 τ_{mn}^v 是静态屈服应力. 在推导式(50)时, 应注意在动态情况下相互作用能与外加应变无关. 式(50)给出了电流变液的一般本构关系, 它适合于瞬态阶段, 即聚集体的方向是随时间变化的. 当悬浮液达到稳定状态时, 聚集体的尺寸和方向将不再随时间变化, 式(50)中的最后一项将为零, 因此,

$$\begin{aligned} \tau_{mn} = & \tau_{mn}^v + 2\mu \dot{\gamma}_{mn}^0 + 0.25N (M_{mna\beta} + M_{nma\beta} + M_{a\beta mn} + M_{a\beta nm}) \dot{\gamma}_{a\beta}^0 = \\ & \tau_{mn}^v + 2\mu \dot{\gamma}_{mn}^0 + \phi M_{mna\beta} \dot{\gamma}_{a\beta}^0, \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $(16/3)\pi ac^2 M_{mna\beta} = M_{mna\beta} + M_{nma\beta} + M_{a\beta mn} + M_{a\beta nm}$, ϕ 是颗粒的体积分.

3.2.3 内变量 θ , φ , a , c 的确定

由于张量 M_{jkl} , $H_{j\alpha}$ 是聚集体大小和方向的函数, 因此我们必须确定这些内变量是如何随外部条件变化的. 利用式(41), 可以得到 ϕ 的演化方程:

$$\partial \Psi / \partial \theta = -0.5 \partial \Phi / \partial \theta \quad (52)$$

$$\partial \Psi / \partial \varphi = -0.5 \partial \Phi / \partial \varphi \quad (53)$$

式(52)和(53)给出了用来确定在给定初始条件外加应变率 $\dot{\gamma}_{ij}^0$ 和电场下的 $\theta(t)$, $\varphi(t)$ 的一阶微分方程组. 利用式(8)有

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{\phi}{2} (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 (E^0)^2 \sin 2\theta [A_y (1 - \phi + \phi A_y)^{-2} - A_x (1 - \phi + \phi A_x)^{-2}], \\ \partial \Psi / \partial \varphi = 0. \end{cases} \quad (54)$$

利用式(21)和(19)可得

$$\partial \Phi / \partial \theta = \Lambda_{a\beta}^{(\theta)} \dot{\gamma}_{a\beta}^0 + \Delta_k^{(\theta)} \omega_k, \quad \partial \Phi / \partial \varphi = \Lambda_{a\beta}^{(\varphi)} \dot{\gamma}_{a\beta}^0 + \Delta_k^{(\varphi)} \omega_k, \quad (55)$$

其中

$$\begin{cases} \Lambda_{a\beta}^{(\theta)} = N \cos \varphi (H_{a\beta 2} - M_{j\alpha\beta} \epsilon_{2j}) - N \sin \varphi (H_{a\beta 1} - M_{j\alpha\beta} \epsilon_{1j}), \\ \Lambda_{a\beta}^{(\varphi)} = N (H_{a\beta 3} - M_{j\alpha\beta} \epsilon_{3j}), \\ \Delta_k^{(\theta)} = N \sin \varphi (H_{ij 1} \epsilon_{ij} + H_{ijk} \epsilon_{1j}) - N \cos \varphi (H_{ij 2} \epsilon_{ij} + H_{jk} \epsilon_{2j}), \\ \Delta_k^{(\varphi)} = -N (H_{ij 3} \epsilon_{ij} + H_{ijk} \epsilon_{3j}). \end{cases} \quad (56)$$

把式(54)和(55)代入式(52)和(53), θ , φ 的一阶微分方程就可以得到

$$\begin{cases} (\Delta_1^{(\varphi)} \sin \varphi - \Delta_2^{(\varphi)} \cos \varphi) \dot{\theta} - \Delta_3^{(\varphi)} \dot{\varphi} - \Lambda_{a\beta}^{(\varphi)} \dot{\gamma}_{a\beta}^0 = 2 \partial \Psi / \partial \varphi, \\ (\Delta_1^{(\theta)} \sin \varphi - \Delta_2^{(\theta)} \cos \varphi) \dot{\theta} - \Delta_3^{(\theta)} \dot{\varphi} - \Lambda_{a\beta}^{(\theta)} \dot{\gamma}_{a\beta}^0 = 2 \partial \Psi / \partial \theta. \end{cases} \quad (57)$$

如我们前面所讨论的那样, 必须通过求解微分方程(57) 来确定在一给定加载历史下的内变量值。

为了得到平衡时椭球形聚集体的尺寸, Halsey(1992)^[3]把极化能分成两个部分, 第一是式(8) 给出的退极化能, 第二是聚集体的表面能。平衡这两部分的影响, 他发现其大小尺寸依赖于 Mason 数。如 Halsey(1992)^[4]提到的, 同体退极化能相比, 表面张力只是个微小的影响。在本文中, 仅考虑在水动力和静电力作用下每个依附在聚集体上的颗粒的平衡条件, 这样看来建立起力平衡方程来确定聚集体的长度是更适合的。考虑电流变液中的椭球形聚集体, 一个球形颗粒在它的端部, 如图 3 所示。当系统达到它的稳定状态时, 作用在聚集体中颗粒上的所有力将保持平衡, 即作用在颗粒上静电力和水动力将相互平衡。对于小的球形颗粒, 我们可以假设作用在它上面的局部电场是均匀的。因此介电颗粒的电偶极矩可以用式(4) 在对球形颗粒有 $n_x = n_y = n_z = 1/3$ 时的值来确定,

$$P = P_s E^e, \tag{58}$$

其中

$$P_s = \frac{4\pi\alpha^f(\alpha^p - \alpha^f)}{\alpha^p + 2\alpha^f} \alpha_0 r_0^3, \tag{59}$$

以及 r_0 是颗粒的半径。作用在颗粒上的静电力可以通过计算外力作用在位于颗粒中心的偶极子来得到:

$$F^e(a + r_0, 0, 0) = \therefore (P \cdot E^e) = P_s \therefore [(E_x^e)^2 + (E_y^e)^2 + (E_z^e)^2] |_{X=a+r_0, Y=Z=0}, \tag{60}$$

其中球形介电体外的局部电场已由附录 II 给出。

为了确定作用在颗粒上的水动力, 我们必须得到颗粒周围的局部流速 V^h , 其已由附录 III 给出。作用在颗粒上的水力可由 Stokes 阻力给出,

$$F^h(a + r_0, 0, 0) = 6\pi\eta r_0 V^h(a + r_0, 0, 0). \tag{61}$$

一般来说, 聚集体的长度对外加电场和应变率是很敏感的, 但它们在垂直方向上的尺寸却相对稳定。因此我们可以固定尺寸参数 c , 通过沿对称轴 X 方向上的力平衡来确定长度:

$$F_X^e(a + r_0, 0, 0) + F_X^h(a + r_0, 0, 0) = 0. \tag{62}$$

事实上, 为了得到式(51) 的本构关系, 我们仅需要确定形状比值 a/c 。通过计算, 发现聚集体的形状比值与选定的 c 无关。如果考虑在颗粒之间水力从一个颗粒到另一颗粒是通过润滑区来传递的, 那么颗粒中最大的水动力将出现在聚集体的中间。但通过计算, 我们发现通过平衡在聚集体端部或中间的颗粒上的力得到的聚集体尺寸却是相当相似的。

通过同时求解式(57) 和(62), 可以得到外加电场和应变率函数的内变量 a, c, θ, φ 。当系统达到稳定状态时, θ, φ 为零。在求得 a, c, θ, φ 后, 并把它们代入到 M_{ijkl} 表达式中, 利用式(51), 非线性的本构关系就可以建立起来了。

4 在简单剪切载荷作用下电流变液的本构关系

作为特殊情况下的一个例子, 本节我们主要讨论简单剪切载荷作用下的情况。外加应变率为 $\gamma_{13}^0 = \gamma_{31}^0$, 因为对称轴在 xz 平面上, 因此有 $\varphi = 0$, 那么, 沿对称轴方向的方向矢量 d 可表示为:

$$d = \{ \sin\theta, 0, \cos\theta \}, \tag{63}$$

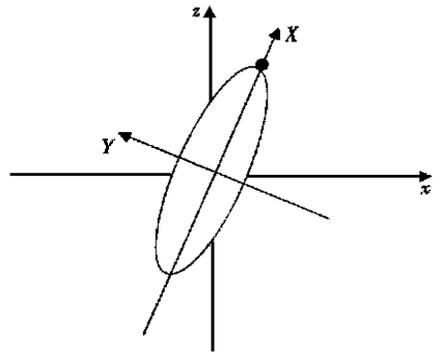


图 3 球形液滴与颗粒之间的相互作用示意图

把式(63)代入在式(A2)和(A6)中的 M_{ijkl} 、 H_{ijk} , 进一步代入式(57), 可以发现:

$$\begin{aligned} \Delta_3^{(\varphi)} \Phi &= 0, \\ \Delta_2^{(\theta)} \Phi &= 12\pi\mu\phi Y^H \left[\left(a/c \right)^2 \gamma_{13}^0 \cos 2\theta + \phi \alpha_0 (\alpha^p - \alpha^f) (E^0)^2 [A_y (1 - \phi + \phi A_y)^{-2} - A_x (1 - \phi + \phi A_x)^{-2}] \sin 2\theta + G \cos 2\theta + F \sin 2\theta, \right. \\ &\left. \right] \end{aligned} \tag{64}$$

其中

$$\begin{cases} F = \phi (\alpha^p - \alpha^f) \alpha_0 (E^0)^2 [A_y (1 - \phi + \phi A_y)^{-2} - A_x (1 - \phi + \phi A_x)^{-2}], \\ G = 12\pi\mu\phi Y^H \gamma_{13}^0 \left(a/c \right)^2, \\ \Delta_2^{(\theta)} = 8\pi\phi \mu \left(a^2/c^2 \right) Y^C, \end{cases} \tag{66}$$

以及 Y^H , Y^C 可由式(A4)和(A7)确定.

式(64)表明对一个剪切载荷, 如果初始的 $\varphi = 0$, 聚集体的对称轴仅在 xoz 平面上旋转. 式(65)给出了在一给定电场 E^0 和剪切应变率 γ_{13}^0 下的作为时间 t 函数的旋转角的解为

$$\tan \theta = \frac{1}{G} [F + \sqrt{G^2 + F^2} \tanh(x)], \quad x = \frac{\sqrt{G^2 + F^2}}{\Delta_2^{(\theta)}} t + \operatorname{arctanh} \frac{-F}{\sqrt{G^2 + F^2}}. \tag{67}$$

当时间 t 趋近于无穷大时, $x \rightarrow \infty, \tanh(x) \rightarrow 1$. 因此在给定条件下摆动角将达到稳定值, 其值可由 $\theta = 0$ 决定, 或

$$\tan 2\theta_{eq} = -G/F. \tag{68}$$

图4给出了在不同 Mason 数 Mn 时旋转角与无维时间 $t^* = t\gamma_{13}$ 的关系, 其中 Mason 数 Mn 是指水动力与极化力之间的比值 $Mn = \mu\gamma_{13} / [\alpha_0 (\alpha^p - \alpha^f) (E^0)^2]$.

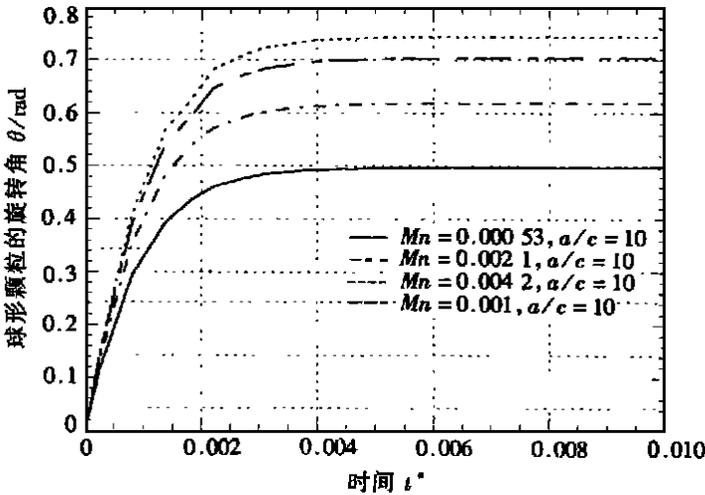


图4 在不同 Mason 值 Mn 下旋转角与无维时间 $t^* = t\gamma_{13}$ 的关系

把式(68)代入式(62), 并求解(62)式, 可以求出在给定的 c 值时的聚集体平衡长度 a . 如前面所说, 得到的形状比值 a/c 与 c 值无关. 图5给出了 a/c 与 Mason 值的关系. 从对数图可以看出 $a/c \propto (Mn)^{-0.48}$. 利用类似分子动力学模拟, Takimoto(1992)^[22] 也揭示了这样的幂关系以及其指数近似等于 -0.5 . 通过平衡一个椭球形液滴的退极化能和表面能, Halsey 等(1992)^[3,4] 得到了 $a/c \propto Mn^{-\nu}$ 其指数为 $\nu = 1/3$.

把旋转角和形状比值的平衡值代入到式(A2)的 M_{ijkl} 表达式中, 再代入式(51), 可以得到在

简单剪切载荷作用下的应变和应力关系

$$\begin{aligned} \tau_{13}^0 &= \tau_{13}^y + 2\mu\gamma_{13}^0 + \frac{5}{3}\pi\mu Va^3\gamma_{13}^0[(3X^M + Z^M)\sin^2 2\theta_{eq} + 4Y^M\cos^2 2\theta_{eq}] = \\ \tau_{13}^y &+ 2\mu\gamma_{13}^0 + \frac{5}{4}\frac{\phi\mu\gamma_{13}^0}{4G^2 + F^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\right)[(3X^M + Z^M)G^2 + 4Y^MF^2] = \\ \tau_{13}^y &+ 2\mu^*\gamma_{13}^0, \end{aligned} \tag{69}$$

其中电流变液的粘度 μ^* 为

$$\mu^* = \mu + \frac{5}{8}\frac{\phi\mu}{8G^2 + F^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\right)[(3X^M + Z^M)G^2 + 4Y^MF^2], \tag{70}$$

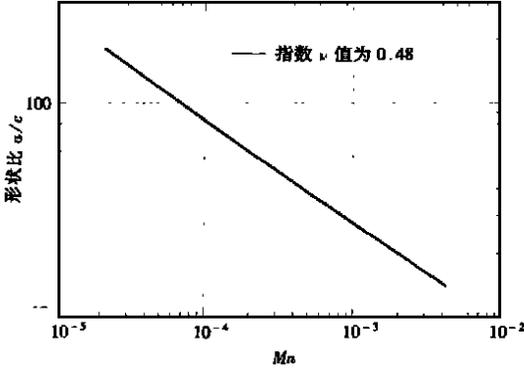


图 5 形状比值 a/c 与 Mason 值的对数关系图

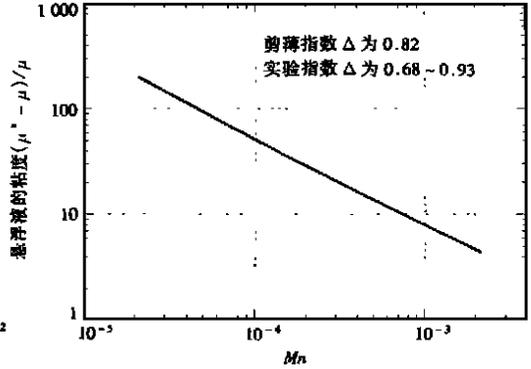


图 6 无维悬浮液粘度 $(\mu^* - \mu)/\mu$ 与 Mason 值的对数关系图

这里 X^M 、 Y^M 、 Z^M 仅依赖于形状比值, 由式(A4) 给出。如式(66) 所示, 函数 G 和 F 和形状比值 a/c 依赖于应变率 $\dot{\gamma}_{13}^0$ 和外加电场 $(E^0)^2$ 。因此式(70) 可预报电流变液的剪薄粘度。把得到的形状比值代入式(70), 可以发现悬浮液粘度 $(\mu^* - \mu)/\mu$ 的下降随 Mason 数 Mn 变化的情况。图 6 给出了对数域的关系图。图中的结果表明了悬浮液的粘度近似于一幂函数 $\propto (Mn)^{-\Delta}$, 其剪薄指数为 $\Delta \approx 0.82$ 。

5 结 论

本文建立起了电流变液的微结构本构理论。其理论框架是基于内变量和机理的分析。电流变液是由高介电常数的颗粒和液体组成的。在电场作用下, 极性颗粒将沿电场的方向聚集成链状结构。颗粒聚集体的大小和方向是易变的, 它们将随外加电场和应变率的变化而变化。因此, 可以建立起一个确定聚集体大小和方向的模型。根据系统的相互作用能和耗散函数, 可以导出一个三维的、清晰的本构方程。本文具体地考虑和讨论了系统在一简单剪切载荷作用下的响应, 发现电流变液的粘度很好地近似于一幂函数 $\propto (Mn)^{-0.82}$ 。因为聚集体方向的演化方程是一依赖于加载历史的微分方程, 对于给定的加载历史, 可在解得它以后, 预报出依赖于加载历史的电流变液体本构关系。

附录 I 张量 D 的推导

由于线性流场 v_j^0 和聚集体的旋转 ω_i 而在聚集体的表面产生应力场。对于本文考虑的一个稳定蠕变流动, 该应力张量是两个微水动力解之和。其中 D_{ij} 可以表示成:

(1) 线性流场引起的力偶 D_{ij}^1

力偶 D_{ij}^1 可定义为:

$$D_{ij}^1 = - \iint_{S_p} \Pi_{ik}^1 n_k x_j ds, \quad (A1)$$

其中 Π_{ik}^1 是线性流场在聚集体表面产生的应力场。对于椭球夹杂, 三个基本的问题——平移、旋转和线性流场已经在 Oberbeck, Edwardes 和 Jeffery 的文中求得。对于扁长椭球形聚集体 ($a > b = c$), 用 d 表示沿对称轴的单位矢量, D_{ij}^1 可表示为 [Kim 和 Karrila, 1991]^[23]

$$D_{ij}^1 = M_{ijk}^1 \nu_{kl}^0 = \left\{ 4\pi\mu a^3 Y^H \epsilon_{jmn} \epsilon_{mk} d_n d_l + (20/3)\pi\mu a^3 [X^M d_{jk}^{(0)} + Y^M d_{jk}^{(1)} + Z^M d_{jk}^{(2)}] \right\} \nu_{kl}^0, \quad (A2)$$

其中

$$\begin{cases} d_{ijk}^{(0)} = 1.5 \left(d_i d_j - \delta_{ij}/3 \right) \left(d_k d_l - \delta_{kl}/3 \right), \\ d_{ijk}^{(1)} = 0.5 \left(d_i \delta_{jk} d_k + d_j \delta_{ik} d_k + d_i \delta_{jl} d_l + d_j \delta_{il} d_l - 4d_i d_j d_l d_l \right), \\ d_{ijk}^{(2)} = 0.5 \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{ij} \delta_{kl} + d_i d_j \delta_{kl} + d_k d_l \delta_{ij} - d_i d_k \delta_{jl} - d_j d_k \delta_{il} - \right. \\ \left. d_i d_l \delta_{jk} - d_j d_l \delta_{ik} + d_i d_j d_l d_l \right); \end{cases} \quad (A3)$$

$$Y^H = \frac{4}{3} e^5 [(1 + e^2)L - 2e] J^{-1}, \quad X^M = \frac{8}{15} e^5 [(3 - e^2)L - 6e] J^{-1},$$

$$Y^M = \frac{4}{5} e^5 [2e(1 - 2e^2) - (1 - e^2)L] \left\{ [2e(2e^2 - 3) + 3(1 - e^2)L] / [(1 + e^2)L - 2e] \right\}^{-1}, \quad (A4)$$

$$Z^M = \frac{16}{5} e^5 (1 - e^2) [3(1 - e^2)^2 L - 2e(3 - 5e^2)] J^{-1}, \quad L = \ln \left(\frac{1+e}{1-e} \right),$$

式中 $e = (a^2 - c^2)^{1/2}/a$ 是椭圆的偏心率。

(2) 对应于椭球形聚集体旋转运动的力偶 $D_{ij}^{(2)}$

$D_{ij}^{(2)}$ 定义为

$$D_{ij}^{(2)} = - \iint_S \Pi_{ik}^{(2)} n_k x_j ds, \quad (A5)$$

其中 $\Pi_{ik}^{(2)}$ 是由于聚集体的旋转运动导致的应力场。用椭球形夹杂的解, $D_{ij}^{(2)}$ 可表示为 (Kim 和 Karrila, 1991)^[23]

$$D_{ij}^{(2)} = H_{ijk}^2 \omega_k = \left\{ 4\pi\mu a^3 \epsilon_{j\alpha} [X^C d_{\alpha k} + Y^C (\delta_{ik} - d_i d_{\alpha})] - 4\pi\mu a^3 Y^H (\epsilon_{ijk} d_j + \epsilon_{ikl} d_l) \right\} \omega_k, \quad (A6)$$

其中

$$X^C = \frac{4}{3} e^3 (1 - e^2) [2e - (1 - e^2)L] J^{-1}, \quad Y^C = \frac{4}{3} e^3 (1 - e^2) [(1 + e^2)L - 2e]^{-1} \quad (A7)$$

附录 II 在均匀外场作用下一个介电球的外部电场

在 Landau 等(1984)^[16]的书中, 已经给出了一个不含电荷的导体椭球外部场势的清晰表达式。采用同样的办法, 我们也可以导出在均匀外场作用下一个介电球外的电势表达式。在局部坐标系 (X, Y, Z) 中, X -轴为球体的对称轴, 外加电场可表示为 $\{E_X^0, E_Y^0, E_Z^0\}$ 。球体外的电势可表示为

$$\phi^e = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3, \quad (A8)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_1 = - E_X^0 X \left\{ 1 + \left(\frac{E_X^i}{E_X^0} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + \xi)} - \sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + \xi)}}{\operatorname{arctanh} \sqrt{1 - c^2/a^2} - \sqrt{1 - c^2/a^2}} \right\}, \\ \phi_2 = - E_Y^0 Y \left\{ 1 + \left(\frac{E_Y^i}{E_X^0} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \frac{\sqrt{(a^2 + \xi)/(c^2 + \xi)} - (a^2 - c^2)^{-1/2} \operatorname{arctanh} \sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + \xi)}}{a/c^2 - (a^2 - c^2)^{-1/2} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - c^2/a^2}} \right\}, \\ \phi_3 = - E_Z^0 Z \left\{ 1 + \left(\frac{E_Z^i}{E_Z^0} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \frac{\sqrt{(a^2 + \xi)/(c^2 + \xi)} - (a^2 - c^2)^{-1/2} \operatorname{arctanh} \sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + \xi)}}{a/c^2 - (a^2 - c^2)^{-1/2} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - c^2/a^2}} \right\}, \end{cases} \quad (A9)$$

其中椭球体内的内部电场已由式(1)和(3)给出,坐标 ξ 与 X 、 Y 和 Z 相关为

$$(Y^2 + Z^2)/(c^2 + \xi) + X^2/(a^2 + \xi) = 1, \tag{A10}$$

在椭球体外的空间 $0 \leq \xi \leq \infty$, 介电球体的外部电场可得到

$$E^e = - \text{grad} \phi^e \tag{A11}$$

附录 III 一椭球体在线性流场 $v_i^0 = v_{ij}^0 X_j$ 作用下的速度场解

当椭球形聚集体达到它的平衡态时,它将在液体中固定。在线性流场的作用下,由于一固定球的存在,速度场将发生很大的变化。在很久以前,Jeffery 得到了椭球解,这可以看 Kim 和 Karila(1991)的书^[23]。对于一椭球体,我们可以简化它的解为以下简洁的形式:

$$V_i^L = v_{ij}^0 X_j - \frac{3}{32\pi\mu} \left[S_{jk} + \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} T_l \right] \frac{\partial}{\partial X_k} \left[G_1 \delta_{ij} - X_j \frac{\partial G_1}{\partial X_i} + \frac{a_j^2}{4} \frac{\partial^2 G_2}{\partial X_i \partial X_j} \right], \tag{A12}$$

式中
$$G_n = \int_{\xi}^{\infty} \left[\frac{X^2}{a^2 + \lambda} + \frac{Y^2}{c^2 + \lambda} + \frac{Z^2}{c^2 + \lambda} - 1 \right]^n \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \tag{A13}$$

其中 $\Delta(\lambda) = \sqrt{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$ 以及椭球坐标 ξ 定义为下式的正根

$$X^2/(a^2 + \xi) + (Y^2 + Z^2)/(c^2 + \xi) = 1, \tag{A14}$$

T_i, S_{ij} 是椭球体的扭矩和应力和,分别为

$$\begin{cases} T_i = -8\pi\mu a^3 Y^H \epsilon_{ijl} d_k d_l v_{jk}^0, \\ S_{ij} = (20/3)\pi\mu a^3 [X^m d_{ijl}^0 + Y^m d_{ijl}^1 + Z^m d_{ijl}^2] v_{kl}^0. \end{cases} \tag{A15}$$

式(A15)中符号的定义与附录 I 中的一样,由于对称轴是沿着 X_1 轴,将有

$$d_1 = 1, d_2 = d_3 = 0$$

对于一椭球形聚集体,式(A12)可简化为简洁的形式:

$$\begin{cases} G_1 = X^2 I_1 + (Y^2 + Z^2) I_2 - I, \quad \partial G_1 / \partial X_i + 2X_i I_1, \\ \partial G_2 / \partial X_i \partial X_j = 8X_i X_j I_{11} + 4\delta_{ij} [X^2 I_{11} + (Y^2 + Z^2) I_{21} - I], \end{cases} \tag{A16}$$

其中用到了以下求和约定:重复下标中的小写符号从 1 到 3 的求和,大写符号采用与小写符号一致的数但不求和 并且

$$\begin{cases} I = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \text{arccosh} b, \\ I_1 = \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = 2(\text{arccosh} b - d/b)/(a^2 - c^2)^{3/2}, \\ I_2 = I_3 = \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{c^2 + \lambda} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = (bd - \text{arccosh} b)/(a^2 - c^2)^{3/2}, \\ I_{11} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 \Delta(\lambda)} = \frac{2}{3}(a^2 - c^2)^{-1} \left[\frac{3}{2} I_2 \frac{1}{(a^2 + \xi)^{3/2}} \right], \\ I_{12} = I_{13} = I_{21} = I_{31} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\Delta(\lambda)} = \\ \frac{2}{a^2 - c^2} \left[\frac{3}{2} I_2 - \frac{1}{(a^2 + \xi)^{1/2}(c^2 + \xi)} \right], \\ I_{22} = I_{33} = I_{23} = I_{32} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)^2 \Delta(\lambda)} = \\ - \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 - c^2} \left[\frac{3}{2} I_2 - \frac{1}{(a^2 + \xi)^{-1/2}(c^2 + \xi)^2} \right], \end{cases} \tag{A17}$$

式中 $b = \sqrt{(a^2 + \xi)/(c^2 + \xi)}$, $d = \sqrt{(a^2 - c^2)/(c^2 + \xi)}$ 。因此,对于任何线性流场,我们可以得到简洁形式的椭球体周围的速度场。

[参 考 文 献]

- [1] Tao R. Electric field induced phase transition in electrorheological fluids[J]. *Phys Rev E*, 1993, **47**: 423—426.
- [2] Parthasarathy M, Klingenberg D J. Electrorheology: Mechanisms and Models[J]. *Materials Science and Engineering*, 1996, **R17**: 57—103.
- [3] Halsey T C, Martin J E, Adolf D. Rheology of electrorheological fluid[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, **68** (10): 1519—1522.
- [4] Halsey T C. The structure and dynamics of electrorheological fluids[A]. In: R Tao Ed. *Proceedings of the Conference on Electrorheological Fluids*[C]. Singapore: World Scientific, 1992, 37—52.
- [5] Rosensweig R E. On the magnetorheology and electrorheology as states of unsymmetric stress[J]. *J Rheol*, 1995, **39**(1): 179—192.
- [6] Klingenberg D J, Zukoski C F. Studies on the steady shear behavior of electrorheological suspensions[J]. *Langmuir*, 1990, **6**: 15—21.
- [7] Bonnetcaze R T, Brady J F. Dynamic simulation of an electrorheological fluids[J]. *J Chem Phys*, 1992, **96**(3): 2183—2202.
- [8] Bonnetcaze R T, Brady J F. Yield stresses in electrorheological fluids[J]. *J Rheol*, 1992, **36**(1): 73—115.
- [9] Ginder J M, Ceccio S L. The effect of electrical transients on the shear stresses in electrorheological fluids[J]. *J Rheol*, 1995, **39**(1): 211—234.
- [10] Conrad H, Chen Y, Sprecher A F. The strength of electrorheological fluids[A]. In: R Tao Ed. *Proceedings of the Conference on Electrorheological Fluids* [C]. Singapore: World Scientific, 1992, 195—218.
- [11] Bossis G, Lemaire E, Volkova O. Yield stress in magnetorheological and electrorheological fluids: A comparison between microscopic and macroscopic structural models[J]. *J Rheol*, 1997, **41**(3): 687—704.
- [12] Martin J E, Odinek J. Aggregation, fragmentation, and the nonlinear dynamics of electrorheological fluids in oscillatory shear[J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **75**(15): 2827—2830.
- [13] Jordan M, Schwendt A, Hill D A, et al. Zeolite based electrorheological fluids: Testing, modeling and instrumental artifacts[J]. *J Rheol*, 1997, **41**(1): 75—92.
- [14] Rice J R. Inelastic constitutive relations for solids: An internal variable theory and its application to metal plasticity[J]. *J Mech Phys Solids*, 1971, **19**: 433—455.
- [15] Ziegler H. *Introduction to Thermomechanics* [M]. the second, revised edition. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1983.
- [16] Landau L D, Lifshitz E M. *Pitaevskii. Electrodynamics of Continuous Media*[M]. the second edition. Chapters 1 and 2. Oxford: Pergamon Press, 1984.
- [17] Eringen A C, Maugin G A. *Electrodynamics and Continua I, II* [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [18] Bossis G, Clercx H, Grasselli Y, et al. Theoretical analysis of field induced structures in ER and MR fluids[A]. In: R Tao, G D Roy Eds. *Electrorheological Fluids* [C]. Singapore: World Scientific, 1993, 153—171.
- [19] Happel J, Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics* [M]. Chapter 9, Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [20] Ginder J M, Davis L C. Viscoelasticity of electrorheological fluids: Role of electrostatic interactions

- [A]. In: R Tao, G D Roy Eds. *Electrorheological Fluids [C]*. Singapore: World Scientific, 1993, 267—282.
- [21] Shulman Z P, Kordonsky V I, Zaltsgendler E A, et al. Structure, physical properties and dynamics of magnetorheological suspensions[J]. *Int J Multiphase Flow*, 1986, **12**(6):935—955.
- [22] Takimoto Jun_Ichi. Computer simulation of model electrorheological fluids[A]. In: R Tao Ed. *Proceedings of the Conference on Electrorheological Fluids [C]*. Singapore: World Scientific, 1992, 53—58.
- [23] Kim S, Karrila S J. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications [M]*. Part II, Butterworth_Heinemann Series in Chemical Engineering, Boston: Butterworth_Heinemann, 1991.

General Constitutive Equation of an ER Suspension Based on the Internal Variable Theory

WANG Biao¹, XIAO Zhong_min²

(1. Research Center for Composite Materials, Harbin Institute
of Technology, Harbin 150001. P R China;

2. School of Mechanical and Production Engineering, Nanyang Technological
University, Nanyang Avenue, Singapore)

Abstract: A microstructural constitutive theory of ER suspensions was formulated in this investigation. The framework was based on the internal variable theory and the mechanism analysis. The ER suspension consists of fine particles with high dielectric constant and the supporting fluid. Under the action of the electric field, the polarized particles will aggregate together to form the chain-like structures along the direction of the electric field. As the size and orientation of the particle aggregates are volatile, and they adjust according to the applied electric field and strain rate, the energy conservation equation and the force equilibrium equation were thus established to determine the orientation and size of the aggregates. Following that, a three-dimensional, explicit form of the constitutive equation was derived based on the interaction energy and the dissipation function of the system. The response of the system under the action of a simple shearing load was considered and discussed in detail. It is found that the shear-thinning viscosity of an ER suspension is well approximated by the power-law $\propto (Mn)^{-0.82}$.

Key words: electrorheological fluid; internal variable theory; constitutive theory