

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0127_08

C_L 方法及其在工程非线性动力学问题中的应用*

陈予恕, 孟 千

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: C_L 方法可以揭示非线性振动系统的分岔特性, 它结合对称性和奇异性理论并将 Liapunov-Schmidt(简称 LS) 约化方法推广到非自治系统。作为应用实例, 分析了非线性转子动力学低频振动分岔失稳问题的机理及其控制

关键词: C_L 方法; 非线性动力学; 非线性振动; 分岔和混沌

中图分类号: O322; O175 文献标识码: A

引 言

考虑由下列微分方程描述的动力系统

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

其中 x, f 为 n 维向量, \dot{x} 表示 x 对时间 t 的导数, 设 $x = u(t)$ 是以 T 为周期的周期解, Krylov 和 Bogoliubov(1934)^[1] 已经证明, 如 $F(x, t, \varepsilon)$ 为以 T 为周期的周期函数, 对 x, t 是解析的, 则

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon F(x, t, \varepsilon). \quad (2)$$

当 ε 为小参数时, (2) 有以 T 为周期的周期解。但是, 对理论和应用都有重要意义的解的结构和系统参数之间的关系他们没有给出证明。Chen 和 Langford^[2] 于 1988 年首先以 LS 方法和奇异性理论研究了一般形式的非线性马休方程, 并得了 6 种典型的分岔图, 他们将 LS 方法推广到非自治系统。

由于大型高速转子系统的轻型化, 其局部非线性因素对系统的局部和全局动态特性都会有很大的影响(Noah & Sundararajan 1995)^[3], 其非线性因素有, 滑动轴承的油膜、叶顶间隙和密封间隙的气流、材料内阻以及局部摩擦等, 这些非线性因素将使转子系统出现引起故障的低频振动(如油膜振荡、气流振荡等), 此前对非线性转子动力学失稳的分析(Nataraj^[4] 1985, Shaw & Shaw^[5] 1990, Sundararajan & Noah^[6] 1995) 大都采用数值计算的方法, 而数值方法对建立动力学行为和系统参数之间的关系并不是很有效的。本文作者和其合作者应用 C_L 方法分析了转子失稳问题(陈和丁^[7] 1996, 陈和孟^[8] 1996, 陈和丁^[9] 1997, 丁和陈^[10] 1997), 建立了动力学特性和

* 收稿日期: 2000_04_25; 修订日期: 2000_09_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998010316)

作者简介: 陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 博士生导师, 俄国应用科学院国外院士。

系统参数的关系,对大型旋转机械的失稳控制和选择设计参数提供了理论基础。

1 C_L方法(Yu & Hauseyin^[11], 1998)

考虑一般形式的非线性马休方程

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta[f(x) + h(x, x; \mu, \delta)] + (1 + \mu)x + f(x, x; \mu) + \\ 2\varepsilon \cos 2t[f(x) + g(x, x; \mu, \varepsilon)] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 μ 为调谐参数, h, f 和 g 为 x 和 x 的解析函数, 令 $M(\mu, \delta, \varepsilon)$ 为(3)右端的非线性算子, 取移相算子 $T_{\varphi}(t) = x(t + \varphi)$, 不难证明有下列关系

$$\begin{aligned} M(\mu, \delta, \varepsilon): C_{2\pi}^2 \rightarrow C_{2\pi}, \\ M(\mu, \delta, \varepsilon)T_{\pi}x = T_{\pi}M(\mu, \delta, \varepsilon), \end{aligned}$$

此处 $\delta \neq 0$ 和 $\varepsilon \neq 0$, $C_{2\pi}^2$ 和 $C_{2\pi}$ 为周期函数空间, 易知系统(3)有 Z_2 对称性。令 L 为 M 的 Frechet 算子

$$L = D_x M(0, 0, 0)x|_{x=0}, \quad (4)$$

则 L 的零空间和值空间为

$$N(L) = \{ze^{it} + ze^{-it} \mid z \in \mathbb{C}\}, \quad R(L) = \{x \in C_{2\pi} \mid \langle e^{it}, x \rangle = 0\}, \quad (5)$$

其中 z 为 z 的共轭, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示复平面上的内积。

根据 LS 方法(Chow & Hale^[12] 1982), 方程(3)和下列交错方程等价

$$QM(\mu, \delta, \varepsilon)x = 0 \text{ 和 } PM(\mu, \delta, \varepsilon)x = 0, \quad (6)$$

其中 $P: C_{2\pi} \rightarrow N(L)$ 为实投影算子, 其定义为:

$$Px(t) = \langle e^{it}, x \rangle e^{it} + \langle e^{-it}, x \rangle e^{-it}, \quad (7)$$

且 $Q = I - P$, I 是恒等算子, (3) 的解

$$x(t) = ze^{it} + ze^{-it} + w(t), \quad (8)$$

其中 $w(t) \in N(L)^\perp$ 。把算子 M 代入(6)的第一个方程, 可由隐函数定理唯一地确定 $w(t)$

$$w = w(z, z, \mu, \delta, \varepsilon), \quad (9)$$

且 $w(z, z, 0, 0, 0) = 0$ 。将之代入方程(6)的第二个方程得

$$Ge^{it} + Ge^{-it} = 0. \quad (10)$$

因方程(10)对任意 t 都满足, 故有

$$G = (\mu + i\delta)z + \varepsilon + \varepsilon \langle e^{3it}, w \rangle + \langle e^{it}, \delta h + f + 2\varepsilon g \cos 2t \rangle = 0. \quad (11)$$

因 LS 方法不改变对称性, 所以, G 有和 M 相同的对称性。若 $\delta \neq 0$ 和 $\varepsilon \neq 0$, 则有

$$G(-z, -z, \mu, \delta, \varepsilon) = -G(z, z, \mu, \delta, \varepsilon), \quad (12)$$

故 G 的最一般形式是

$$\begin{aligned} G(z, z, \mu, \delta, \varepsilon) = z \left[\mu + \sum a_j |z|^{2j} \right] + i\varepsilon \left[1 + \sum b_j |z|^{2j} \right] + \\ \varepsilon \left[z + \sum_{j+k \geq 3} c_{jk} |z|^j z^k \right] + i\varepsilon \delta \left[\sum_{j+k \geq 3} d_{jk} |z|^j z^k \right], \end{aligned} \quad (13)$$

其中 a_j, b_j, c_j 和 d_j 为 μ, δ, ε 的实解析函数, 且 $j+k$ 为奇数。取 $z = re^{i\theta}$, 则(11)有下列形式:

$$R(r^2, \mu, \delta, \varepsilon)r = 0. \quad (14)$$

方程(14)的非平凡解应满足:

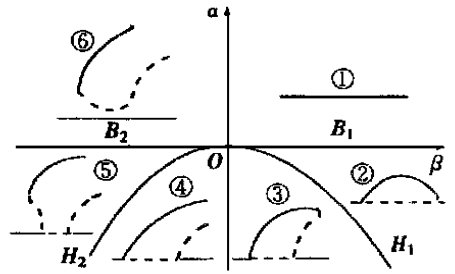
$$R = (\mu + A)^2 + \delta^2(1 + B)^2 - \varepsilon^2[(1 + C)^2 + \delta^2 D^2] = 0, \quad (15)$$

其中 $A = \sum a_j r^{2j}$, $B = \sum b_j r^{2j}$, $C = \sum c_j r^{2j}$ 和 $D = \sum d_j r^{2j}$ 。如满足非退化条件 $a_1 \neq 0$, δ^2

$\neq \varepsilon^2, b_1 \delta^2 \neq c_1 \varepsilon^2$ 和取非线性变换 $\hat{r}^2 = \kappa A(r^2)$, $\kappa = \text{sign}(a_1) = \pm 1$ 后, 则(15)可化成一次近似:

$$R_1 = (\mu + \kappa r^2)^2 + \alpha + \beta r^2 = 0, \tag{16}$$

其中 $\alpha = \delta^2 - \varepsilon^2$ 和 $\beta = (2/|a_1|)(b_1 \delta^2 - c_1 \varepsilon^2)(1 + O(\hat{r}^4))$ 为开折参数, \hat{r} 相当于振幅 r 。根据奇异性理论(Golubisky & Schaeffer^[13] 1985) 分岔的转迁集和分岔图如图 1 所示, 其中 $B_i(\alpha = 0)$ 为分岔集; $H_i(\alpha = -\beta^2/4)$ 为滞后集, 这 6 种开域(①, ② ..., ⑥)的每一种域都有自己特殊的分岔图。应该指出的是 Bogoliubov 和 Mitropolsky^[14] 1961 年用平均法、Nayfeh 和 Mook 1979 年用多尺度法对 Mathieu_Duffing 系统的研究结果分别属于域 ③和 ④ 因而都正确, 只是所取系统参数不同, 这就统一了他们似乎矛盾的结果。



— 稳定; --- 不稳定
图 1 转迁集和 6 种分岔图

如考虑退化情况 $a_1 \neq 0, \alpha \approx 0$ 和 $\beta \approx 0$, 则(16) 变成

$$(\mu + \kappa r^2)^2 = 0 \tag{17}$$

由[13] (Golubisky 和 Schaeffer 1985) 知, 芽 $(\mu + \kappa r^2)^2$ 为无穷余维。陈和詹^[15, 16] (1990) 为找一个有限余维的芽重新分析了方程(15), 得到了 14 种分岔图, 进一步研究了 $a_1 = 0, a_2 \neq 0, \alpha \neq 0$ 和 $\beta \neq 0$ 时退化情况, 得到了 15 种分岔图。陈和徐^[17, 18] 1995、1997 年进一步研究了该系统十分丰富的分岔行为。Yu 和 Huseyin^[11] 1998 年在其文章中命名了 C_L 方法, 并将之和 IHB 方法进行了对比, 结果证明, 这两种方法对研究分岔问题同样有效。

近期我们取非退化芽 $\kappa r^4 + 2\tau^2 \mu + \mu^2$, 证明这是一个余维 5 分岔系统, 得到了更丰富的理论结果。

2 非线性转子密封系统的失稳分析

2.1 运动方程

由于越来越多的蒸汽透平和离心压缩机要求高性能设计和运行, 因此, 密封流体力常会引起失稳, Muszynska^[19] (1988) 经过多次试验提出了一种密封流体力的模型。

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K - m_f \tau^2 \omega^2 & \tau \omega D \\ \tau \omega D & K - m_f \tau^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 2\tau \omega m_f \\ -2\tau \omega m_f & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中平均圆周流体速率 τ 是一个关键的参数, 它可完全地描述流体运动的特性, K, D 和 m_f 分别为流体膜的径向刚度、阻尼和惯性效应, K, D 和 τ 都是轴偏心距的非线性函数:

$$K = K_0(1 - e)^{-n}, \quad D = D_0(1 - e)^{-n}, \quad n = 1/2, 1, \dots, 3;$$

$$\tau = \tau_0(1 - e)^b, \quad 0 < b < 1;$$

其中 $e = |z|/c, z = x + iy, c$ 为密封的径向间隙。

现研究两端刚性支承的 Jeffcott 对称转子, 假设密封间隙流体力(18) 作用在转子的圆盘上如图 2 所示, 引入无量纲变量: $x = x/c, y = y/c, \tau = \omega t$, 则转子密封无量纲方程(为方便起

见丢掉字母上面的一):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ -D_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} + \rho^2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中

$$K_1 = \frac{K_e + K - \tau^2 \omega^2 m_f}{M \omega^2}, \quad K_2 = \frac{\tau D}{M \omega}, \quad \rho^2 = \frac{m r_0}{M c},$$

$$D_1 = \frac{D_e + D}{M \omega}, \quad D_2 = \frac{2 \tau m_f}{M}, \quad G = -\frac{m g}{M c \omega^2},$$

其中 m ($M = m + m_f$) 为质量, r_0 为圆盘不平衡半径, K_e 为刚度, D_e 为外阻尼系数, ω 为转动角速度。



图2 转子密封模型

2.2 方程的约化和平均

取 $\rho = 0$, 平衡转子的静平衡位置 $(x, x', y, y') = (x_0, 0, y_0, 0)$ 和转动角速度有关, 可令方程(19)中的 $\dot{x} = x' = 0$ 而求得。令 $X = (x - x_0, x', y - y_0, y')$ 将(19)在静平衡点展成 Taylor 级数:

$$\dot{X} = A(\omega) X + F(\omega, X) + \rho^2 \Gamma(t), \quad (20)$$

其中 $A(\omega) X$ 和 $F(\omega, X)$ 为展式的线性和非线性项, $\rho^2 \Gamma(t) = \rho^2(0, \cos \tau, 0, \sin \tau)^T$ 为周期扰动项, 很显然 $(0, 0, 0, 0)$ 为 $\rho = 0$ 时的静平衡位置, Hopf 分岔发生在 $\omega = \omega_c$ 时, ω_c 为临界速度, 它表示 $A(\omega)$ 的一对复特征值 $\alpha(\omega) \pm i \Omega(\omega)$ 有 $\alpha(\omega_c) = 0$ 和 $\alpha'(\omega_c) \neq 0$, 且其它的两个特征值都有负实部, $-\sigma_1 \pm i \sigma_2, \sigma_1 > 0$ 。经计算(陈和丁^[9]1997), 我们发现当 $\omega = \omega_c$ 时产生 Hopf 分岔, 且此时涡动速度和旋转速度之比约为 1/2, 故不平衡转子也将发生 1/2 共振现象。

一般情况下, 不平衡量 ρ 是一个小量, 故当 $\omega \geq \omega_c$ 时它引起周期扰动的 Hopf 分岔。令 $\sigma = \omega - \omega_c$ 为一个小参数, 把(20)中的 A 和 F 展成 σ 同量级的级数, 采用坐标变换 $X = QY$, Q 为对应 $A(\omega_c)$ 的特征值的特征向量构成的算子, 取 τ (以 2π 为模), σ, ρ 为独立变量, 方程(20)变为:

$$\begin{cases} \tau = 1, \rho = 0, \sigma = 0, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = B_0 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \mathcal{O}B_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \mathcal{O}B_2 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + B_3(Y) + \mathcal{O}B_4(Y) + \rho^2 B_5 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = C_0 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \mathcal{O}C_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \mathcal{O}C_2 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + C_3(Y) + \mathcal{O}C_4(Y) + \rho^2 C_5 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_c \\ -\Omega_c & 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\sigma_1 \end{bmatrix},$$

B_i 和 $C_i (i = 1, 2, 5)$ 为 2×2 常数阵, $B_i (Y)$ 和 $C_i (Y) (i = 3, 4)$ 为 2×1 的非线性多项式矩阵. 对(21)应用中心流形定理^[20] (Carr1981), 可得到中心流形上流的方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\sigma) & \Omega(\sigma) \\ -\Omega(\sigma) & \alpha(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \rho^2 \begin{bmatrix} H_1(u, t) \\ H_2(u, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(u, \sigma) \\ N_2(u, \sigma) \end{bmatrix} + \rho^2 B \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}. \quad (22)$$

(22)的线性部分已化成约当形, H_j 为 u_1, u_2 的线性函数和 τ 的 2π 周期函数; N_j 为 u_1, u_2 的二次和三次函数, 且 $N_j(u, 0) \neq 0$; B 为 2×2 常数阵.

取 $\Omega_c = 1/2 + \varepsilon\mu$, ε 是正的小参数, μ 是调谐值. 并取 $\sigma = \varepsilon\varphi$, $\rho^2 = \varepsilon\varrho$, $\alpha(\sigma) = \alpha'(0)\sigma + O(\sigma^2) = \varepsilon\alpha'(0)\sigma + O(\varepsilon^2)$, $\Omega(\sigma) = \Omega_c + \Omega'(0)\sigma + O(\sigma^2) = 1/2 + \varepsilon[\Omega'(0)\sigma + \mu] + O(\varepsilon^2)$; 取 $u = \varepsilon^{1/2}v$ 重新标度方程(22)中的状态变量 $u = (u_1, u_2)$, 然后再由 $v_1 = r\cos\theta$, $v_2 = r\sin\theta$, $\theta = t/2 + \varphi$ 化成新变量 r, φ (解的振幅和相位), 为方便计去掉所有的 ε 则得:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon\alpha'(0)\varphi + \varepsilon^{1/2}\varrho H'(\varphi, t, K) + \varepsilon^{1/2}N'_1(r, \theta) + \varepsilon^{1/2}N'_2(r, \theta) + \varepsilon^{1/2}\varrho B'(t), \\ \dot{\varphi} = \varepsilon[\mu + \Omega'(0)\sigma] + \varepsilon^{1/2}\varrho H''(\varphi, t, K) + \varepsilon^{1/2}N''_1(r, \theta) + \varepsilon^{1/2}N''_2(r, \theta) + \varepsilon^{1/2}\varrho B''(t), \end{cases} \quad (23)$$

其中 H', H'' 包含常数项和以 2π 为周期的周期项; N'_j, N''_j 为 r 的二阶和三阶项; B', B'' 只含周期项. 对(23)式应用平均法, 得二次近似的平均方程:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left[\alpha'(0)\varphi + \operatorname{Re} \left[c_1 \left[\frac{1}{2}, \sigma \right] \right] r^3 + r \varrho U \sin 2(\varphi + \beta) \right], \\ \dot{\varphi} = \varepsilon \left[\Omega'(0)\sigma + \mu + \operatorname{Im} \left[c_1 \left[\frac{1}{2}, \sigma \right] \right] r^2 + \varrho U \cos 2(\varphi + \beta) \right], \end{cases} \quad (24)$$

其中 $U > 0$, β 为常数, $c_1(1/2, \sigma)$ 为自治系统(22) Hopf 分岔 PB 正规形的第一个非线性项的系数 ($\rho = 0$), Sethna1995^[21] 曾证明平均方程和正规形理论是等价的.

2.3 平均系统的稳定性和分岔

在(24)中取 $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$ 则得到定常解的响应方程

$$A_1 r^4 + A_2 r^2 + A_3 = 0, \quad (25)$$

$$r = 0. \quad (26)$$

从方程(25)可得非平凡解:

$$r_{1,2} = (-A_2 \pm \sqrt{\Delta})^{1/2} / \sqrt{2A_1}, \quad (27)$$

其中 $\Delta = A_2^2 - 4A_1A_3$. 因 r^2 只有正实根才有意义, 故有:

(i) 一个正实根 r_1 的条件

$$(\alpha'(0)\sigma)^2 + (\Omega'(0)\sigma + \mu)^2 < (\varrho U)^2; \quad (28)$$

(ii) 两个正实根 r_1, r_2 的条件

$$\begin{cases} [R\alpha'(0) + I\Omega'(0)]\sigma + I\mu < 0, \\ (\alpha'(0)\sigma)^2 + (\Omega'(0)\sigma + \mu)^2 \geq (\varrho U)^2, \\ A_1 U^2 \varrho^2 \geq [(R\Omega'(0) - I\alpha'(0))\sigma + R\mu]^2. \end{cases} \quad (29)$$

式中 $R = \operatorname{Re}[c_1(1/2, \sigma)]$, $I = \operatorname{Im}[c_1(1/2, \sigma)]$.

2.3.1 平凡解的稳定性

引入 $a_1 = r\cos(\varphi + \beta)$, $a_2 = r\sin(\varphi + \beta)$, 则方程(24)可化成:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \varepsilon[\alpha'(0)a_1 + (\varrho U - \Omega'(0)\sigma - \mu)a_2 + (a_1^2 + a_2^2)(Ra_1 - Ia_2)], \\ \dot{a}_2 = \varepsilon[(\varrho U + \Omega'(0)\sigma + \mu)a_1 + \alpha'(0)a_2 + (a_1^2 + a_2^2)(Ra_2 + Ia_1)]. \end{cases} \quad (30)$$

方程(30)的线性部分对应平凡解 $r = 0$ 的变分方程,其特征方程为:

$$\lambda^2 - 2\alpha'(0)\sigma\lambda + (\alpha'(0)\sigma)^2 + (\Omega'(0)\sigma + \mu)^2 - (\rho U)^2 = 0 \quad (31)$$

由于 $\alpha'(0) > 0$ (陈和丁^[9]1997),为使平凡解稳定,则需满足下列条件:

$$\sigma < 0, (\alpha'(0)\sigma)^2 + (\Omega'(0)\sigma + \mu)^2 > (\rho U)^2 \quad (32)$$

(32)的第二个方程表示图3上椭圆锥体之外(如 $\Omega'(0) < 0$,只需将 σ 以 $-\sigma$ 代替)的域。固定 μ ,则可得到在 (σ, ρ) 平面上的平凡解的稳定边界,如图3所示。

$$B: \sigma = -\frac{\mu\Omega'(0)}{(\alpha'(0))^2 + (\Omega'(0))^2}, \rho = \frac{|\mu\alpha'(0)|}{U\sqrt{(\alpha'(0))^2 + (\Omega'(0))^2}};$$

$$C: \sigma = 0, \rho = |\mu|/U.$$

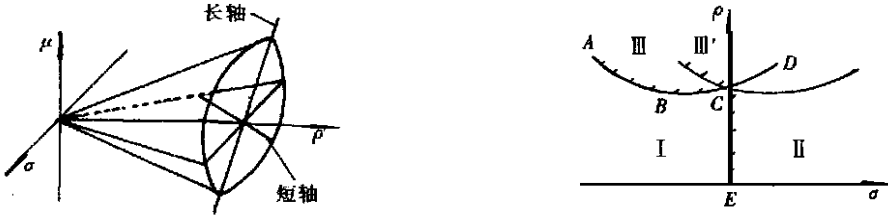


图3 方程(24)平凡解的稳定边界

很显然,有 $\rho_C > \rho_B$,在域 I 中平凡解是稳定的,平凡解有三种途径会失稳:

- (i) 沿 \overline{EC} 发生 Hopf 分岔;
- (ii) 沿 ABC 发生树枝分岔;
- (iii) 在 C 点发生全局分岔。

由平凡解的稳定性分析知, r_2 总是不稳定;若 ρ 大于某一临界值,在 σ 的某一临界值上 r_1 将发生 Hopf 分岔(二次分岔)。沿 $\Delta = 0$ 将发生鞍形分岔,这时 r_1 和 r_2 合而为一。

2.3.2 周期响应的分岔

从方程(28)、(29)和(32)知,方程(25)的一个和二个实根存在于图3的不稳定区 III(或 III')和图4的阴影区内。图4上表示有各种不同 ρ 值的分岔途径:(i)沿 L_1 平凡解通过 Hopf 分岔失稳,在这种情况下,同步涡动,或原方程(19)的周期运动变成调幅、调相的拟周期运动。(ii)沿 $2_2 \sim 4_4$ 线,在图4(a)和4(b)上标注的点 a, b, \dots, h 是相对应的。平均方程(24)非平凡解的产生意味着倍周期分岔,对方程(19)则产生工程上所称的半速涡动。值得指出的是,当达到 AB ,有 $\sigma < 0$ 或 $\omega < \omega_c$,即在线性理论的临界值前就将发生失稳,随着 ρ 的增加或 $|\mu|$ 的减小,失稳将越来越早,因此在正常情况下,欲推迟失稳的发生有两种方法:对转子进行精密平衡以降低 ρ 和设计转子的 Ω_c 远离 $1/2$ 。

取系统参数使 $\omega_c = 351 \text{ s}^{-1}$, $\Omega_c = 0.53$ 时,数值计算方程(19)的失稳运动是:当 $r_0 = 0.1 \text{ mm}$ 时为拟周期解,当 $r_0 = 0.4 \text{ mm}$ 时为倍周期解,如图5所示。

3 结 论

1. C_L 方法对研究非线性振动(自治的、非自治的)系统的分岔特性是十分有效的方法,克服了此前非线性振动理论只能分析周期解的不足,它将 LS 方法从自治系统推广到非自治系统。

2. 在各种不同参数条件下,转子密封系统通过 Hopf 分岔或倍周期分岔失稳。本文的结论

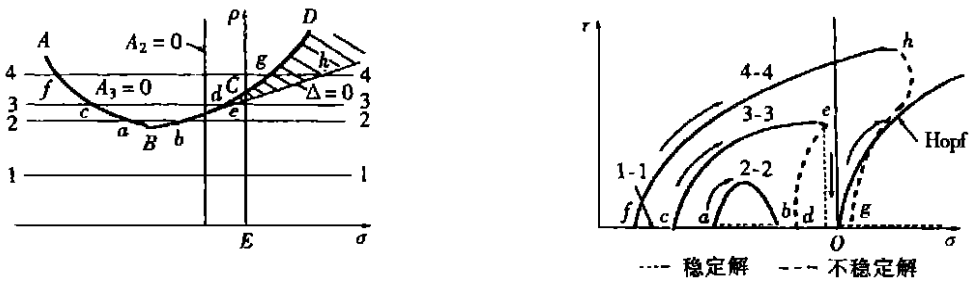
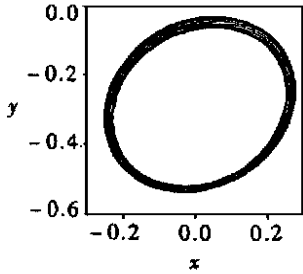
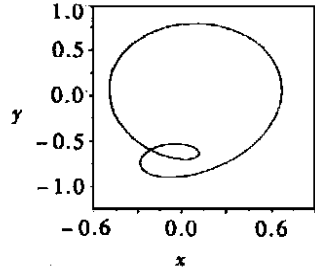


图 4 方程(24)的分岔图



(a) 拟周期解 ($r_0 = 0.1 \text{ mm}$, $\omega = 358 \text{ s}^{-1} > \omega_c$)



(b) 倍周期解 ($r_0 = 0.4 \text{ mm}$, $\omega = 340 \text{ s}^{-1} < \omega_c$)

图 5 转子密封系统两种失稳型式

对大型旋转机械低频振动的失稳控制提供了理论基础

[参 考 文 献]

- [1] Krylov N, Bogoliubov N. Les methodes de la mecanique nonlineaire[J]. Chaire de la Phys, and Math of Academic Science U K, 1934, 8, 44—51.
- [2] Chen Y S, Langford W F. The subharmonic bifurcation solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamically buckling problem[J]. Acta Mech Sinica, 1988, 4(4): 350—362.
- [3] Noah S T, Sundararajan P. Significance of considering nonlinear effects in predicting the dynamic behavior of rotating machinery[J]. J Vib Control, 1995, 1(1): 431—458.
- [4] Nataraj C, Nelson H D, Arkere N. The effect of a Coulomb spine on rotor dynamics/ analysis[A]. In: Instability in Rotating Machinery NASA CP_2409[C]. New York: Springer, 1985, 225—233.
- [5] Shaw J, Shaw S W. The effects of unbalance on oil whirl[J]. Nonlinear Dynamics, 1990, 1(4): 293—311.
- [6] Sundararajan P, Noah S T. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting arc length continuation method[J]. ASME J Vib Acous, 1997, 119(1): 9—20.
- [7] Chen Y S, Ding Q. Stability and bifurcation of nonlinear rotor dynamics[J]. J Nonlinear Dynamics in Sci Tech, 1996, 3(1): 13—22.
- [8] Chen Y S, Meng Q. Bifurcations of a nonlinear rotor/ bearing system[J]. J Vib Engng, 1996, 9(3): 266—275.
- [9] Chen Y S, Ding Q. Stability and Hopf bifurcation of nonlinear rotor/ bearing system[J]. J Vib Engng, 1997, 10(3): 368—374.
- [10] Ding Q, Chen Y S. Study on mechanism subharmonic instability of nonlinear rotor/ bearing system

- [J]. *J Vib En gng*, 1997, **10**(4): 404—412.
- [11] Yu P, Huseyin K. Parametrically excited nonlinear systems: a comparison of certain methods[J]. *Int J Nonli Mech*, 1998, **33**(6): 967—978.
- [12] Chow S Y, Hale J K. *Methods of Bifurcation Theory* [M]. New York: Springer, 1982.
- [13] Golubisky M, Schaeffer D G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* [M]. Vol. 1. New York: Springer, 1985.
- [14] Bogoliubov N, Mitropolsky Y A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations* [M]. New York: Gordon & Breach, 1961.
- [15] 陈予恕, 詹凯君. 《非线性 Mathieu 方程亚谐共振分叉理论》的一些推广[J]. *应用数学和力学*, 1990, **11**(3): 239—245.
- [16] Chen Y S, Zhan K J, Langford W F. New results on bifurcation theory of subharmonic resonance in nonlinear system with parametric excitation: degenerate bifurcation solution[J]. *J Vib En gng*, 1990, **3**(2): 38—47.
- [17] Chen Y S, Xu J. Global bifurcations and chaos in Van der Pol_Duffing_Mathieu's system with three-well potential oscillator[J]. *Acta Mech Sinica*, 1995, **11**(4): 357—372.
- [18] Chen Y S, Xu J. Bifurcations in nonlinear systems with parametric excitation[J]. *Doklady Mathematics*, Russia, 1997, **56**(3): 880—883.
- [19] Muszynska A. Improvements in lightly loaded rotor/ bearing and rotor/ seal models[J]. *ASME J Vib Acous*, 1988, **110**(2): 129—136.
- [20] Carr J. *Application of Center Manifold Theory* [M]. New York: Springer, 1981.
- [21] Sethna P R. On averaged and normal form equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1995, **7**(1): 1—10.
- [22] CHEN Yu_shu, Andrew Leung. *Bifurcation and Chaos in Engineering* [M]. London: Springer-Verlag, 1988.

C_L Method and Its Application to Engineering Nonlinear Dynamical Problems

CHEN Yu_shu, DING Qian

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: The C_L method was generalized from Liapunov-Schmidt reduction method, combined with theory of singularities, for study of non-autonomous dynamical systems to obtain the typical bifurcating response curves in the system parameter spaces. This method has been used, as an example, to analyze the engineering nonlinear dynamical problems by obtaining the bifurcation programs and response curves which are useful in developing techniques of control to subharmonic instability of large rotating machinery.

Key words: C_L method; nonlinear dynamics; nonlinear oscillations; bifurcation and chaos