应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 03_0321_04

指数型弥散过程的解析解*

王子亭

(石油大学 应用数学系, 山东东营 257062)

(刘慈群推荐)

摘要: 对具有指数型弥散系数的弥散过程建立了数学模型, 应用积分变换把变系数的偏微分方程变为变系数的常微分方程, 应用超几何函数方法和反演技术得到了两类边界条件下的解析解· 利用解析解的表达式和计算结果, 分析了指数型弥散过程和经典线性弥散过程的差异·

关 键 词: 非均质多孔介质; 弥散; 超几何函数; 解析解
中图分类号: O241. 7 文献标识码: A

引 言

非均质多孔介质中的弥散过程是尺度依赖的, 这是由于非均质性的多尺度性决定的· 确定残余油饱和度是三次采油工程中重要问题, 通过注入和采出含化学示踪剂流体的办法来测量地层中的残余油饱和度是确定残余油饱和度的重要方法之一· 被注入的示踪剂粒子除随注入流体流动和由于分子热运动进行扩散外, 还要受到非均匀速度场的影响产生弥散· 示踪剂粒子的运动过程可通过对流弥散方程来描述, 通常认为弥散系数为常数· 然而, 现场数据表明取弥散系数为常数通常是不合适的, 不能描述示踪粒子在储层中的实际流动状态· 实际数据和弥散过程的随机分析证实大尺度上的弥散行为通常依赖于粒子的平均传播距离· 本文取弥散系数为空间位置的指数函数, 研究对流弥散方程的解析模型并解析求解·

1 对流弥散方程模型

考虑一维的流动系统, 粒子的弥散过程的尺度依赖性是由多孔介质的非均质性决定的· 实际的数据表明弥散系统的尺度依赖性可通过把弥散系数 $\alpha(x)$ 表示为空间变量 x 的旨数函数来表示, 即

$$\alpha(x) = aL\left(1 - \exp\left[-\frac{bx}{L}\right]\right) \cdot \tag{1}$$

由表示式可知, 当 $x \to 0$ 时, 弥散系数为零, 而当 $x \to \infty$ 时弥散系数趋近于常值 L· 参数 a、b 和 L 可通过实际数据的拟合而得到, L 为多孔介质系统的特征长度· 考虑粒子的弥散行为, 粒子的传播过程可描述为对流弥散方程

$$R\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial C}{\partial x}\right) - v\frac{\partial C}{\partial x} - \mu RC, \tag{2}$$

* 收稿日期: 1999_02_12; 修订日期: 2000_08_20
基金项目: 石油大学基础研究基金项目资助
作者简介: 王子亭(1956—) , 男, 山东冠县人, 教授, 博士, 系主任.

其中

$$D(x)=\alpha(x)v+D_{\mathrm{d}}=aLv\left(1-\exp\left[-\frac{bx}{L}\right]\right)+D_{\mathrm{d}}\cdot \tag{3}$$

这里 $C(x,t)$ 是粒子的浓度, R 为线性平衡条件的延迟系数, v 为流体的平均速度, μ 为一阶衰变系数• 考虑粒子的初始浓度为零, 而边界条件考虑典型的两类边界条件: 1) 边界浓度为固定常数的第一类边界条件, 和; 2) 边界上有常量流速的第二类边界条件• 这里引入量刚为 1 的变量

$$\eta=x/L,\ \tau=tv/RL,\ \beta=\mu LR/v\cdot \tag{4}$$

对方程(2)做 Laplace 变换得到

$$\frac{D(\eta)}{vL}\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}\eta^2}+\left(\frac{D'(\eta)}{v}-1\right)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\eta}-(\beta+s)C=0\cdot \tag{5}$$

这里 s 是复 Laplace 变量, $C(\eta,s)$ 是浓度 $c(\eta,t)$ 的 Laplace 变换, 或称为 Laplace 空间上的浓度, $D'(\eta)=\mathrm{d}D/\mathrm{d}\eta$• 根据 $D(x)$ 的表示式, 引入自变量的变量替换,

$$\xi=\xi(\eta)=F\exp[b\eta]=(1+D_{\mathrm{d}}/avL)\exp[b\eta] \tag{6}$$

方程可表示为关于变量 ξ 的常微分方程

$$\xi(1-\xi)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\xi^2}-\left(1-\frac{1}{abF}\right)\xi\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\xi}+\frac{(\beta+s)}{ab^2F}C=0\cdot \tag{7}$$

(7) 属于超几何型的常微分方程,

2 超几何方程的求解

对于超几何常微分方程, 应用常微分方程解的级数方法可求出级数形式的解, 考虑对应的边界条件, 解可表示为

$$C(\xi,s)=A(s)\xi_2^{\gamma}F_1(\gamma,\gamma+1,\gamma-\mu+1,\xi^{-1}),$$

$$\gamma=\frac{-1+\sqrt{1+4aF(\beta+s)}}{2abF},\ \mu=\frac{-1-\sqrt{1+4aF(\beta+s)}}{2abF}$$

对于第一类边界条件在 Laplace 空间上得到

$$C(\xi_0,\tau)=\frac{C_0}{s},\ C(\xi,0)=0\cdot$$

相应的解用 $C_{\mathrm{D}}(\xi,s)$ 来表示, 则利用边界条件将 $A(s)$ 消去得到

$$\frac{C_{\mathrm{D}}(\xi,s)}{C_0}=\left(\frac{F}{\xi}\right)^{\gamma}\frac{{}_2F_1(\gamma,\gamma+1,\gamma-\mu+1,\xi^{-1})}{{}_2F_1(\gamma,\gamma+1,\gamma-\mu+1,F^{-1})}\cdot$$

对于第二类定流边界条件, 在 Laplace 空间上对应的条件为

$$-abF(\xi-1)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\xi}\Big|_F+C\Big|_F=\frac{C_0}{s},\ C(\xi,0)=0\cdot$$

利用这些边界条件得到定流条件下的解为

$$\frac{C_N(\xi,s)}{C_0}=\left(\frac{F}{\xi}\right)^{\gamma}{}_2F_1(\gamma,\gamma+1,\gamma-\mu+1,\xi^{-1})[s[ab\gamma(F-1)\cdot$$

$${}_2F_1(\gamma+1,\gamma+1,\gamma-\mu+1,F^{-1})+{}_2F_1(\gamma,\gamma+1,\gamma-\mu+1,F^{-1})]]^{-1}$$

要在实空间上求出浓度分布, 必须对所求出的 Laplace 空间上的象浓度进行反演• 利用反演公式可得到, 第一边值问题的解可表示为

$$\frac{C_{\mathrm{D}}(\xi,\tau)}{C_0}=\left(\frac{F}{\xi}\right)^{\gamma_0}\left[\frac{{}_2F_1(\gamma_0,\gamma_0+1,\gamma_0-\mu_0+1,\xi^{-1})}{{}_2F_1(\gamma_0,\gamma_0+1,\gamma_0-\mu_0+1,F^{-1})}\right]-l_{\mathrm{c}},$$

其中,

$$\gamma_0 = \frac{-1+\sqrt{1+4aF\beta}}{2abF},\quad \mu_0 = \frac{-1-\sqrt{1+4aF\beta}}{2abF},$$

$$l_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{F}{\xi}\right)^{-\omega}\int_{\zeta}^{\infty}\left[\left(\frac{F}{\xi}\right)^{\phi}\frac{{}_2F_1(-\omega+\phi, 1-\omega+\phi, 1+2\phi, \xi^{-1})}{{}_2F_1(-\omega+\phi, 1-\omega+\phi, 1+2\phi, F^{-1})} - \left(\frac{F}{\xi}\right)^{-\phi}\frac{{}_2F_1(-\omega-\phi, 1-\omega-\phi, 1-2\phi, \xi^{-1})}{{}_2F_1(-\omega-\phi, 1-\omega-\phi, 1-2\phi, F^{-1})}\right]\frac{\exp[-\chi^2\tau]}{\chi}\,\mathrm{d}\chi$$

$$\omega = \frac{1}{2aFb},\quad \phi = \frac{\mathrm{i}\sqrt{\chi^2-\xi}}{\sqrt{aFb^2}},\quad \zeta = \left(\frac{1}{4aF}+\beta\right)$$

第二边值问题的解为

$$\frac{C_N(\xi,\tau)}{c_0} = \left(\frac{F}{\xi}\right)^{\gamma_0}\Big\{[{}_2F_1(\gamma_0, \gamma_0+1, \gamma_0-\mu_0+1, \xi^{-1})]\cdot[ab\gamma_0(F-1){}_2F_1(\gamma_0+1, \gamma_0+1, \gamma_0-\mu_0+1, F^{-1})+{}_2F_1(\gamma_0, \gamma_0+1, \gamma_0-\mu_0+1, F^{-1})]^{-1}\Big\} - l_f$$

其中,

$$l_f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{F}{\xi}\right)^{-\omega}\int_{\zeta}^{\infty}\Big\{\left(\frac{F}{\xi}\right)^{\phi}[({}_2F_1(-\omega+\phi, 1-\omega+\phi, 1-2\phi, \xi^{-1}))\cdot(ab(-\omega+\phi)(F-1){}_2F_1(-\omega+\phi+1, 1-\omega+\phi, 1+2\phi, F^{-1})+{}_2F_1(-\omega+\phi, 1-\omega+\phi, 1+2\phi, F^{-1}))^{-1}] - \left(\frac{F}{\xi}\right)^{-\phi}[({}_2F_1(-\omega-\phi, 1-\omega-\phi, 1-2\phi, \xi^{-1}))\cdot(ab(-\omega-\phi)(F-1){}_2F_1(-\omega-\phi, 1-\omega-\phi, 1-2\phi, F^{-1}))^{-1}]\Big\}\frac{\exp[-\chi^2\tau]}{\chi}\,\mathrm{d}\chi$$

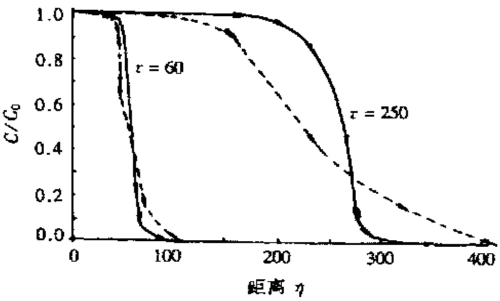

图 1　指数弥散和常数弥散的不同时刻的标准化浓度分布图
(左端的曲线对应于 $\tau=60$, 右边的曲线对应于 $\tau=250$, 实线表示指数弥散, 点线对应于常数弥散)

3　计 算 实 例

对于 Dirichlet 问题和 Neumann 问题我们推导了以超几何函数表示的解析解, 可通过数值计算进行赋值. 为了说明解析表示式的应用, 这里对 Dirichlet 问题, 取不同的时刻计算计算标准化浓度的空间分布变化规律. 取参数

$$R=1,\ b=0.05,\ \nu=0.25,\ L=1,\ a=0.2,\ D_{\mathrm{diff}}=0.05$$

这对应于没有时间延迟的扩散, 其计算结果示于图 1 中. 图 1 表示的是在 $\tau=60$(左) 和 $\tau=250$(右) 时的标准化浓度 C/C_0 的空间分布, 实线对应于指数弥散系数, 点线对应于常数弥散系数.

4　结　　论

在经典的弥散模型中把弥散系数视为空间不变或者是线性的, 而大量的现场数据表明分形多孔介质中存在着多个尺度上的非均质结构, 导致弥散过程是以非线性的方式依赖于尺度. 这种尺度依赖的弥散过程和经典的弥散过程有什么相似之处和什么差异, 这是一个非常重要的理论问题和实际问题. 本文对具有指数型弥散系数的弥散过程进行解析求解, 所得

到的解一方面可为模型检验工具, 检验某些有限差分算法或有限元算法的精度或有效性, 另一方面可和经典的弥散过程相比较, 分析尺度依赖弥散过程的特征•

指数型弥散系数在原点附近近似于线性弥散, 对于充分大的传播距离弥散渐进于常值•与线性弥散过程相比较, 对于较小的时间(即弥散早期) 其解差别不大, 但对于弥散的晚期其两种解的差别比较大•

[参 考 文 献]

[1] Erich Zauderer. Partial Differential Equations of Applied Mathematics[M]. New York: Wiley_Interscience Publication, 1983.

[2] Barry D A, Sposito G. Analytical solution of a convection_dispersion model with time_dependent transport coefficients[J]. Water Resour Res, 1989, **25**(11): 2407—2416.

An Analytical Solution for an Exponential_Type Dispersion Process

WANG Zi_ting

(Department of Applied Mathematics, University of Petroleum, Dongying, Shandong 257062, P R China)

Abstract: The dispersion process in heterogeneous porous media is distance_dependent, which results from multi_scaling property of heterogeneous structure. An analytical model describing the dispersion with an exponential dispersion function is build, which is transformed into ODE problem with variable coefficients, and obtained analytical solution for two type boundary conditions using hypergeometric function and inversion technique. According to the analytical solution and computing results the difference between the exponential dispersion and constant dispersion process is analyzed

Key words: heterogeneous porous media; dispersion; hypergeometric function; analytical solution