应用数学和力学, 第 22 卷 第 3 期(2001 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2001) 03_0275_06

连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计

周冬明[1], 曹进德[2], 李继彬[3]

(1 云南大学 信息与电子科学系, 昆明 650091; 2 云南大学 成人教育学院, 昆明 650091;
3 昆明理工大学, 昆明 650093)

(我刊编委李继彬来稿)

摘要: 利用一些实分析技巧和 Liapunov 方法, 重新估计了连续反馈联想记忆模式的吸引域及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度, 得到一些新的结果, 这些结果可用于连续反馈联想记忆网络的容错性能评价及其综合过程

关 键 词: 连续反馈联想记忆; Liapunov 方法; 神经网络; 吸引域; 指数收敛速度

中图分类号: O175; TP183 文献标识码: A

引 言

近年来, 关于连续反馈联想记忆的分析和综合已成为神经网络领域研究的新热点 这方面的工作可参见文献[1]~[8]及文中引用的文献, 这些工作大都只讨论两个基本约束, 而很少真正涉及到连续反馈联想记忆的容错能力的有关估计 连续反馈联想记忆的性能可从容错范围和容错速度两方面加以衡量 为了能够正确评价一个连续反馈联想记忆的性能以及建立有关综合准则, 就必然要对连续联想记忆神经网络的记忆向量的吸引域及其中每一点趋向记忆向量的指数收敛速度进行有关估计 我们已注意到[9]~[12]已开始讨论这个问题, 本文试对此问题作进一步的深入探讨

众所周知, Hopfield 型连续动态反馈神经网络[1]是一类重要的联想记忆模型, 可表述为下列微分方程组

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_j-\frac{u_i}{R_i}+I_i, \tag{1}$$

这里 $v_j = g_j(u_j)$, 现记 $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \cdots, \frac{1}{R_n}\right)$, $\boldsymbol{T} = (T_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, \cdots, I_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = (g_1(u_1), g_2(u_2), \cdots, g_n(u_n))^{\mathrm{T}}$, 这里 $g_i: R\to R\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是连续可微的, 则(1) 式可写成如下矩阵形式:

收稿日期: 1999_11_01; 修订日期: 2000_11_19
基金项目: 云南省自然科学基金资助课题(1999F0017M)
作者简介: 周冬明(1963—), 男, 湖南人, 副教授, 硕士;
曹进德(1963—), 男, 安徽人, 教授, 博士.

$$C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{I}, \tag{2}$$

我们称 $\boldsymbol{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}\in R^n$ 为连续联想记忆神经网络(2)的一个记忆向量,是指 $\boldsymbol{u}^*$ 对应于一个预先给定记忆模式,且满足下列两个基本约束:

(Ⅰ) 平衡态约束

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{I}, \tag{3}$$

(Ⅱ) 渐近稳定性约束,即 $\boldsymbol{u}^*$ 是(2)式的一个渐近稳定的平衡态

关于吸引域和指数收敛速度的一些概念可见文献[8] 最近文献[9],[10]分别在如下条件下,估计了连续反馈联想记忆模式的吸引域,及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度:

$$T_{jj}g_j'(u_j^*)+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|T_{ij}g_j'(u_j^*)|<\frac{1}{R_j}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

$$T_{ii}g_i'(u_i^*)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|T_{ij}g_j'(u_j^*)|<\frac{1}{R_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

而本文利用一些实分析技巧和 Liapunov 方法,在

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|T_{ij}g_j'(u_j^*)|+|T_{ji}g_i'(u_i^*)|)<\frac{1}{R_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

下,得到了一个新的估计结果 容易看出我们的结果与文献[9],[10]已得到的估计结果是相互补充的,不能互相代替的 这里我们可以通过如下一个简单例子来说明:

取 $n=2$, $R_i=\frac{4}{7}$ $(i=1,2)$,记 $a_{ij}=T_{ij}g_j'(u_j^*)$,现令

$$(T_{ij}g_j'(u_j^*))_{2\times 2}=(a_{ij})_{2\times 2}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

对于上面的矩阵我们容易验证它不满足文献[9],[10]的相应条件

$$T_{jj}g_j'(u_j^*)+\sum_{i=1,i\neq j}^{2}|T_{ij}g_j'(u_j^*)|=a_{jj}+\sum_{i=1,i\neq j}^{2}|a_{ij}|<\frac{1}{R_j}\quad(j=1)$$

与

$$T_{ii}g_i'(u_i^*)+\sum_{j=1,j\neq i}^{2}|T_{ij}g_j'(u_j^*)|=a_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^{2}|a_{ij}|<\frac{1}{R_i}\quad(i=2),$$

但它满足我们本文定理的条件,即

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(|T_{ij}g_j'(u_j^*)|+|T_{ji}g_i'(u_i^*)|)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(|a_{ij}|+|a_{ji}|)=$$

$$\frac{3}{2}<\frac{1}{R_i}=\frac{7}{4}\quad(i=1,2)$$

1 吸引域和指数收敛速度的估计结果

现记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*$, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$, $f_i(x_i)=g_i(x_i+u_i^*)-g_i(u_i^*)$, $i=1,2,\cdots,n$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm{T}}$,于是(2)式可化为

$$C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

先引入记号:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | > 0,\ C_{\max} = \max_{1\ i\ n} C_i > 0,$$
$$C_{\min} = \min_{1\ i\ n} C_i > 0$$

定理 1 若 $\boldsymbol{u}^*$ 满足(3) 式, 且 $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(| T_{ij}g_j(u_j^*)| + | T_{ji}g_i(u_i^*)|) < \frac{1}{R_i}$ $(i = 1, 2, \ , n)$, 则 $\boldsymbol{u}^*$ 是神经网络(2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态, $\boldsymbol{u}^*$ 的吸引域的一个不变子集是

$$G(\boldsymbol{u}^*) = \left\{\boldsymbol{u}\quad R^n \mid \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i(u_i - u_i^*)^2 < \quad\right\}, \tag{5}$$

即从 $G(\boldsymbol{u}^*)$ 中任一点 u_0 出发的神经网络轨道 $\boldsymbol{u}(t; u_0)$ 满足

$$\boldsymbol{u}(t; u_0) \quad G(\boldsymbol{u}^*), \text{对所有 } t \quad 0 \tag{6}$$

另外, $\boldsymbol{u}(t; u_0)$ 满足下列不等式:

$$\boldsymbol{u}(t; u_0) - \boldsymbol{u}^* \quad \left(\frac{C_{\max}}{C_{\min}}\right)^{1/2} \quad u_0 - \boldsymbol{u}^* \quad \exp\left(-\ \frac{1}{2}\ t\right),$$
$$\text{对所有 } u_0 \quad G(u^*) \text{ 和 } t \quad 0, \tag{7}$$

其中 > 0 是使得以下不等式(10) 成立的最大可能取值,

$$= \frac{T}{C_{\max}},$$

而 是从 $\left(0, \frac{|\quad|}{T}\right)$ 中事先任意取定的一个正数

$$\max_{1\ i\ n}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(| T_{ij}g_j(u_j^*)| + | T_{ji}g_i(u_i^*)|) - \frac{1}{R_i}\right)$$

证明 考虑 Liapunov 函数, $V(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i^2$, 沿(4) 的解对 $V(x)$ 求导, 可得

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i\left[\sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(x_j) - \frac{x_i}{R_i}\right] =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(x_j) x_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{R_i}$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | (| f_j(0) | x_i^2 + | f_j(0) | x_j^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{R_i} +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | \left[| f_j(x_j) x_i | - \frac{1}{2} | f_j(0) | x_i^2 - \frac{1}{2} | f_j(0) | x_j^2\right]$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} f_j(0) | + \sum_{j=1}^{n} | T_{ji} f_i(0) | - \frac{1}{R_i}\right) x_i^2 +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | \left(| g_j(\ _j) | | x_j x_i | - \frac{1}{2} | g_j(u_j^*) | x_i^2 - \frac{1}{2} | g_j(u_j^*) | x_j^2\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} f_j(0) | + \sum_{j=1}^{n} | T_{ji} f_i(0) | - \frac{1}{R_i}\right) x_i^2 +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | \left(| g_j(\ _j) | \frac{x_j^2 + x_i^2}{2} - \frac{1}{2} | g_j(u_j^*) | x_i^2 - \frac{1}{2} | g_j(u_j^*) | x_j^2\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} f_j(0) | + \sum_{j=1}^{n} | T_{ji} f_i(0) | - \frac{1}{R_i}\right) x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | | o(x_i x_j) |, \tag{8}$$

其中 $o(x_ix_j) = \frac{1}{2}(|g_j'(\ _j)|x_j^2 + |g_j'(\ _j)|x_i^2 - |g_j'(u_j^*)|x_i^2 - |g_j'(u_j^*)|x_j^2)$, $_j$ 介于 $x_i + u_j^*$ 与 u_j^* 之间

现设

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|T_{ij}g_j'(u_j^*)| + |T_{ji}g_i'(u_i^*)|) < \frac{1}{R_i} \quad (i = 1, 2, \quad , n), \tag{9}$$

记 $\max_{1 \quad i \quad n}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|T_{ij}g_j'(u_j^*)| + |T_{ji}g_i'(u_i^*)|) - \frac{1}{R_i}\right)$, 显然由(9) 式知 < 0 由于 $g_i(u_i)(i = 1, 2, \quad , n)$ 是连续可微的, 由此易知 $g_i'(u_i)$, $|g_i'(u_i)|(i = 1, 2, \quad , n)$ 在 R 上也是连续的, 故对任意 $\left(0, \frac{|\quad|}{T}\right)$, 存在 > 0, 使得当 $V(x) <$ 时, 有

$$|o(x_ix_j)| \quad \frac{1}{2}||g_j'(\ _j)| - |g_j'(u_j^*)||x_j^2 + \frac{1}{2}|g_j'(\ _j)| -$$

$$|g_j'(u_j^*)||x_i^2 \quad \left(\frac{|\quad|}{T} - \right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \tag{10}$$

设 $G = \left\{\boldsymbol{x} \quad R^n | V(x) < \right\}$, 则 G 是 R^n 中一个包含原点的非空开区间 设 $= 2\frac{T}{C_{\max}} > 0$, 则由不等式(8) 和(10) 式可知, 当 $\boldsymbol{x} \quad G$ 时, 有

$$\frac{dV(x)}{dt} \quad - \quad T\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad - \quad V(x) \tag{11}$$

设 $p = p(t; p_0)$ 是(11) 式的比较系统 $\frac{dp}{dt} = - \quad p$ 在初始条件 $p(0; p_0) = p_0 \quad R^n$ 下的解, 则有

$$p(t; x_0) \quad p_0\exp(- \quad t), \quad \text{对所有 } t \quad 0 \tag{12}$$

令 $p_0 = V(x_0)$, $(x_0 \quad G)$, 则由不等式(11) 和(12), 并利用比较原理[8], 可得

$$V(x(t; x_0)) \quad V(x_0)\exp(- \quad t), \quad \text{对所有 } t \quad 0 \tag{13}$$

易知, $C_{\min} \quad x \quad ^2 \quad V(x) \quad C_{\max} \quad x \quad ^2(x \quad R^n)$, 则由不等式(13) 式得

$$\boldsymbol{x}(t; x_0) \quad \left(\frac{C_{\max}}{C_{\min}}\right)^{1/2} \quad x_0 \quad \exp\left(-\frac{1}{2} \quad t\right), \quad \text{对所有 } x_0 \quad G \text{ 和 } t \quad 0 \tag{14}$$

设 $u_0 = x_0 + \boldsymbol{u}^*$, 则 $\boldsymbol{u}(t; u_0) = \boldsymbol{x}(t; x_0) + \boldsymbol{u}^*$, 再综合上述结果, 这就完成了定理 1 的证明

如果选择 $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(P_1, P_2, \quad , P_n) > 0$, $(P_i > 0, i = 1, 2, \quad , n)$, 则(2) 式等价于

$$\boldsymbol{CP}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\boldsymbol{APu} + \boldsymbol{PTg}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{PI} \tag{15}$$

对(15) 式直接应用定理 1, 我们亦可仿文献[9], [10] 进行相应的推广 这里从略

定理 2 设 > 0 是使得这个命题 若 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}C_ix_i^2 <$, 则存在 > 0, 使得 $V(x)$ 沿(4) 式的导数满足: $\frac{dV(x)}{dt} \quad - \quad V(x)$, $x \quad G(0)$ 成立的最大可能值, 则 $\boldsymbol{u}^*$ 是神经网络(2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态, $G(\boldsymbol{u}^*)$ 是 $\boldsymbol{u}^*$ 的吸引域的不变子集, 且定理 1 中定义的神经网络轨道 $\boldsymbol{u}(t; u_0)$ 仍满足不等式(7) 式

2 结 论

我们本文应用实分析技巧及 Liapunov 方法得到的局部指数稳定性结果与有关估计结果,

并不要求 $W(\boldsymbol{u}^{*})$ (这里 $W(\boldsymbol{u})$ $(W_{ij}(\boldsymbol{u}))_{n\ n} = \left(T_{ij}g_j(u_j) - \frac{_{ij}}{R_i}\right)_{n\ n}$ 其中 $_{ij}$ 是 Kronecker 符号, 当 $i = j$ 时取 1, 且当 i j 取 0($i, j = 1, 2, , n$)) 一定是主对角元全为负的广义严格行对角占优阵, 或者是主对角元全为负的严格列对角占优阵; 并且我们本文所得的新的估计结果与文献[9] ~ [12] 已得到的估计结果是相互补充且不能互相替代的 另外, 利用本文的结果可综合或设计有效的连续反馈联想记忆网络 我们可采用如下启发式方法来综合有效的连续联想记忆网络:

第一步: 选取电容参数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的初始值; 第二步: 从平衡态方程组(3) 式的解集中选取 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, 让 充分小, 从而使得 尽量大; 第三步: 选取足够小的 > 0, 并将 $\boldsymbol{C}$ 赋值给 $\boldsymbol{C}$, 可使收敛指数 $\frac{}{2}$ 达到事先任意给定的正数 注意这里的第三步是在保证没有减小吸引域的同时获取了任意大的指数收敛速度, 因此, 在实际综合过程中, 应先获取尽量大的吸引域, 再通过 $\boldsymbol{C}$ 的尺度变换来获取任意大的指数收敛速度

[参 考 文 献]

[1] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons[J]. Proc Natl Acad Sci U S A, 1984, **81**(5): 3088 3092.

[2] Michel A N, Farrel J A. Associative memories via artificial neural networks[J]. IEEE Contr Syst Mag, 1990, **10**(4): 6 17.

[3] Guez A, Protopopolsecu V, Barhen J. On the stability, storage, capacity, and design of nonlinear continuous neural neworks[J]. IEEE Trans, 1988, SMC_**18**(1): 80 87.

[4] Li J H, Michel A N, Porod W. Qualitative analysis and synthesis of a class of neural networks[J]. IEEE Trans, 1988, CAS_**35**(8): 976 986.

[5] Michel A N, Farrell J A, Porod W. Qualitative theory of neural networks[J]. IEEE Trnas, 1989, CAS_**36**(2): 229 243.

[6] Farrell J A, Michel A N. A synthesis procedure for Hopfield s continuous_time associative memory [J]. IEEE Trans, 1990, CAS_**37**(7): 877 884.

[7] Atiya M, Abu_Mostafu Y S. An analog feedback associative memory[J]. IEEE Trans, 1993, NN_**4**(1): 117 126.

[8] Michel A N, Miller R K. Qualitative Analysis of Large_Scale Dynamical Systems[M]. New York: Academic, 1997, 15 57.

[9] 梁学斌, 吴立德. 连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用[J]. 电子科学学刊, 1996, **18**(1): 1 6.

[10] 梁学斌, 吴立德. Hopfield 连续联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用[J]. 电子学报, 1996, **24**(1): 40 43.

[11] 曹进德. Hopfield 连续联想记忆的吸引域和收敛速度的研究[J]. 电子科学学刊, 1999, **21**(3): 332 336.

[12] 曹进德. Hopfield 连续联想记忆的吸引域和收敛速度的估计及其应用[J]. 信息与控制, 1999, **28**(7): 488 491.

Estimation of Attraction Domain and Exponential Convergence Rate of Continuous Feedback Associative Memory

ZHOU Dong_ming[1], CAO Jin_de[2], LI Ji_bin[3]

(1 Department of Information and Electronic Science, Yunnan University, Kunming 650091, P R China;

2 Adult Education College, Yunnan University, Kunming 650091, P R China;

3 Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P R China)

Abstract: The attraction domain of memory patterns and exponential convergence rate of the network trajectories to memory patterns for continuous feedback associative memory are estimated again by using of some analysis techniques and Liapunov method, some new results are obtained, and these results can be used for evaluation of fault_tolerance capability and the synthesis procedures for continuous feedback associative memory neural networks.

Key words: continuous feedback associative memory; Liapunov method; neural network; attraction domain; exponential convergence rate