应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0267_08

湍流动量、标量及能量的逆梯度输运模型*

蒋剑波, 卢志明, 刘晓明, 刘宇陆

(上海大学 上海市应用数学与力学研究所 200072)

(我刊编委刘宇陆来稿)

摘要: 运用单影响函数的双尺度直接相互作用原理(简称 TSDIA)研究了湍流中广泛存在的动量、标量、能量的逆梯度输运现象, 得到了可定性描述动量、标量及能量逆输运的模型表达式• 然后运用惯性子区的理论对所得结果进行了简化, 在计算中对标量与动量采用了不同的时间尺度, 同时仅引入了动量的低波数截断 k_m• 所得结果对于低阶的情形与前人的结果一致• 最后利用所得结果分析了非对称槽道流与圆柱尾流中出现的动量、被动标量及湍能的逆梯度输运现象•

关 键 词: 湍流; 逆梯度输运; TSDIA
中图分类号: O357.5 文献标识码: A

引 言

湍流是一个非线性的随机过程, 它的一个基本的特征就是具有比层流更强的输运作用• 一般而言这种输运总是顺梯度的, 即湍流引起的动量、标量、湍能的输运沿着平均速度或温度(浓度)、能量减小的方向进行的• 这是与物理学傅立叶定律一致的, 并且早期描述湍流输运的模型也是建立在这假设之上的• 如在工程实际中经常采用的 k_ε 模型, 其中对雷诺应力的模化采用如下的梯度形式:

$$R^{\alpha\beta} = -\langle u^\alpha u^\beta\rangle = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + \nu_e\left(\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}\right)• \tag{1}$$

类似地, 对标量、能量的模化一般有:

$$H^\alpha = -\langle u^\alpha\theta\rangle = \kappa_t\frac{\partial\Theta}{\partial x^\alpha}, \tag{2}$$

$$J^\alpha = -\left(\frac{1}{2}\langle u^\alpha u^\beta u^\gamma\rangle + \langle pu^\alpha\rangle\right) \propto \nu_t\frac{\partial K}{\partial x^\alpha}• \tag{3}$$

但是在实验及工程实际中往往发现存在着逆梯度输运现象[1](简记为 CGF)• 如果充分发展的非对称渠道流中, Hanjalic 和 Launder[2] 发现在中心区存着一个区域, 其中 $\langle uv\rangle$ 与 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 的符号相同• 这就意味着这在此区域内动量是逆梯度输运的• 同时在壁面区存在着能量的逆梯度输运现象• Sreenivasan[3] 在圆柱尾流中也发现了热量的逆梯度输运现象• 这样按照上述模

* 收稿日期: 2000_04_04; 修订日期: 2000_12_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(N19872043)
作者简介: 蒋剑波(1974—), 男, 河北保定人, 博士;
刘宇陆(1959~), 男, 江苏人, 教授, 博导.

式存在逆梯度输运的区域内 ν_e, κ_e, κ_t 均应为负值，但这是缺乏物理意义的• 因而上述模式不能正确反映逆梯输运现象•

逆梯度输运现象的产生原因及其机理目前仍不是很清楚，目前的研究仅表明：湍流中大尺度涡的存在是导致逆梯度输运现象出现的一个很重要原因• 由于大涡是强烈各向异性的，它的衰减时间极长，往往经过运流或扩散达到很远的距离后才会消失• 而上述模式由于采用梯度型输运的概念，体现的是局部的性质，不能合理地描述大涡的强记忆特性，因而不能反映复杂流动中存在的逆梯度输运等特点• 考虑到大涡的强烈的各向异性性，期望多点封闭模式能合理地描述逆梯度输运现象是自然而然相法• 需要指出的是，尽管微分应力模型(RSM)中对扩散项的模化仍旧采用的是梯度型扩散的假定，但是 RSM 却可以很好地反映动量的逆梯度输运现象• 众所周知，现有的模式理论从本质上来说是一种唯象的方法，封闭依据的往往是敏锐的物理直觉而非严格的数学证明• 但是模式理论在工程实际中取得的巨大成功促使人们去更深入地考虑、发掘其模化的理论基础• 另外，如果由湍流分析理论能够导出与唯象模式理论成功之处相同的结果，那么理论发展的方向也是正确的(Leslie[4])• 在 Kraichnan[5] 的直接相互作用原理(简称 DIA)方面，Yoshizawa[6] 做了有意义的尝试• 他将直接相互作用原理与多重尺度法结合，同时根据平均场与脉动场特征尺度的不同引入了两尺度的直接相互作用原理(简记为 TSDIA)，从而使得仅停留于理论意义上的 DIA 可以应用到具体实际中来• 值得指出的是：依据此理论得出的雷诺应力的表达式可以定性地反映湍流中动量的逆梯度输运现象• 然而在 TSDIA 中高阶速度分量是不满足连续性条件的，因此 Yoshizawa[6] 引入了两个影响函数• 但是这却导致了所理的模型参数与实验值存在较大的偏差• Hamba[7] 的研究表明，通过一个变换在 TSDIA 中只需引入一个影响函数即可使得高阶速度分量满足连续性条件• 之后 Shimomura[8] 运用单个影响函数的 TSDIA 在分析雷诺应力、标量通量的扩散项时得到了优于 Yoshizawa[9] 的结果•

本文的目是运用单影响函数的 TSDIA 将雷诺应力的涡粘模型、被动标量的涡扩散模型、湍流输运模型进行改进，建立能合理地反映逆梯度输运的模型• 本文首先给出基本方程，然后给出计算结果• 之后运用惯性子区的理论对所得结果进行了简化• 最后用得到的模型分别对渠道流、尾流进行分析，进而对其中出现的动量、被动标量及湍流的逆梯度输运现象进行了分析•

1　基本方程

假设湍流是不可压缩的，并且标量为被动标量•

脉动速度、温度、压力、湍能平衡方程与连续性方程分别为:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + U^\alpha \frac{\partial u^a}{\partial x^\alpha} + u^a \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial x^a}(u^a u^\alpha + R^{a\alpha}) = -\frac{\partial p}{\partial x^a} + \nu \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^a \partial x^a}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U^a \frac{\partial \theta}{\partial x^a} + u^a \frac{\partial T}{\partial x^a} + u^a \frac{\partial \theta}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x^a} - H^a\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^a \partial x^a} = -\frac{\partial}{\partial x^a \partial x^b}(u^a u^b + R^{ab}) - \frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial u^a}{\partial x^a}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u_i\left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}\right)} - \overline{u_i u_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}, \tag{7}$$

$$\partial u^\alpha / \partial x^a = 0• \tag{8}$$

其中 $R^{ab} = -\langle u^a u^b \rangle$, $H^a = -\langle u^a \theta \rangle$· ν, κ, p 分别为流体运动学粘度, 标量的分子扩散系数及动压·

2 用单影响函数TSDIA 计算雷诺应力、标量通量与雷诺应力的扩散项

此处运用的单影响函数的TSDIA 是满足速度单值性条件的· TSDIA 的主要步骤可参见文献[6][8]· 我们直接给出计算结果·

通过单影响函数的TSDIA, 我们可以得到雷诺应力、标量通量及湍能扩散项的表达式, 即

$$\langle u^\alpha u^\beta \rangle = \sum_{n=0}^{3} \delta^n \sum_{i=0}^{n} u_i^\alpha u_{n-1}^\beta, \quad \langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle = \int_k \langle u_i^\alpha(k) u_j^\beta(-k) \rangle / \delta(0),$$

$$\langle u^\alpha \theta \rangle = \sum_{n=0}^{3} \delta^n \sum_{i=0}^{n} u_i^\alpha \theta, \quad \langle u_i^\alpha \theta \rangle = \int_k \langle u_i^\alpha(k) \theta(-k) \rangle / \delta(0),$$

$$\langle u^\alpha u^\beta u^\gamma \rangle = \sum_{n=0}^{3} \delta^n \sum_{i,j=0}^{n} u_i^\alpha u_j^\beta u_{n-i-j}^\gamma,$$

$$\langle u_i^\alpha u_j^\beta u_{n-i-j}^\gamma \rangle = \iiint_{k,p,q} \delta(k-p-q) \langle u_i^\alpha(-k) u_j^\beta(p) u_{n-i-j}(q) \rangle / \delta(0),$$

$$\langle u^\alpha p \rangle = \sum_{n=0}^{3} \delta^n \sum_{i=0}^{n} u_i^\alpha p^\beta, \quad \langle u_i^\alpha p \rangle = \int_k \langle u_i^\alpha(k) p \rangle / \delta(0)·$$

由速度单值性条件知, 上式的计算可以转化为

$$\langle v_i^\alpha v_j^\beta \rangle = \int_k < v_i^\alpha(k) v_j^\beta(-k) > / \delta(0), \quad \langle v_i^\alpha \theta \rangle = \int_k \langle v_i^\alpha(k) \theta(-k) \rangle / \delta(0),$$

$$\langle v_i^\alpha v_j^\beta v_{n-i-j}^\gamma \rangle = \iiint_{k,p,q} \delta(k-p-q) \langle v_i^\alpha(-k) v_j^\beta(p) v_{n-i-j}^\gamma(q) \rangle / \delta(0),$$

$$\langle v_i^\alpha p \rangle = \int_k \langle v_i^\alpha(k) p \rangle / \delta(0)$$

的计算问题· 将 $\langle v_i^\alpha v_j^\beta \rangle$, $\langle v_i^\alpha \theta \rangle$ 的结果再分别代入到 $\langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle$, $\langle u_i^\alpha \theta \rangle$ 中可得

$$R^{\alpha\beta} = -\langle u^\alpha u^\beta \rangle = \sum_{n=0}^{3} R_n^{\alpha\beta}· \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{其中 } R_0^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} K \delta^{\alpha\beta}, \quad R_1^{\alpha\beta} = \nu_e e^{\alpha\beta}, \quad R_2^{\alpha\beta} = -\sum_{m=1}^{3} \tau_m \left(s_m^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} s_m^{aa} \delta^{\alpha\beta} \right) - \tau_4 \frac{De^{\alpha\beta}}{Dt}, \\
&R_3^{\alpha\beta} = \tau_3 \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^a} e^{\alpha\beta} + \tau_6 s_4^{\alpha\beta} + \tau_7 s_5^{\alpha\beta}, \\
&K = 4\pi(g_1 - g_2) + \left(\frac{4\pi}{3} g_4 + \frac{8\pi}{15} g_6 \right) s_1^{aa} + \frac{8\pi}{15} g_6 s_2^{aa}, \\
&\nu_e = \left(\frac{16\pi}{15} \right) g_3 - \left(\frac{8\pi}{15} \right) (g_5 + 2g_7 + 2g_8), \quad \tau_1 = \left(\frac{8\pi}{35} \right) g_4 + \left(\frac{16\pi}{35} \right) g_6, \\
&\tau_2 = \left(\frac{16\pi}{35} \right) g_4 - \left(\frac{128\pi}{105} \right) g_6, \quad \tau_3 = -\left(\frac{32\pi}{105} \right) g_4 + \left(\frac{32\pi}{21} \right) g_6, \quad \tau_4 = \left(\frac{16\pi}{135} \right) g_6, \\
&\tau_5 = (8\pi/5) g_9, \\
&\tau_6 = (8\pi/15) g_7 \quad \tau_7 = (17\pi/915) g_8, \\
&e^{\alpha\beta} = \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad s_1^{\alpha\beta} = \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial U^\beta}{\partial x^a}, \quad s_2^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial U^a}{\partial x^\beta} + \frac{\partial U^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial U^\beta}{\partial x^a} \right), \\
&s_3^{\alpha\beta} = \frac{\partial U^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial U^a}{\partial x^\beta}, \quad s_4^{\alpha\beta} = \frac{\partial U^a}{\partial x^a} \frac{\partial U^\beta}{\partial x^b} \frac{\partial U^a}{\partial x^b}, \quad s_5^{\alpha\beta} = \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^b} \frac{\partial U^\beta}{\partial x^a} \frac{\partial U^a}{\partial x^b}·
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
g_1 &= \int_0^\infty k^2 Q(k;t,t)\mathrm{d}k, \quad g_2 = \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t)\frac{DQ(k;t,t_1)}{Dt}\mathrm{d}t', \\
g_3 &= \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)Q(k;t,t_1)\mathrm{d}t_1, \\
g_4 &= \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)Q(k;t_1,t_2)\mathrm{d}t_2, \\
g_5 &= \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)\frac{D}{Dt}Q(k;t_1,t_2)\mathrm{d}t_2, \\
g_6 &= \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t G(k;t_1,t_2)Q(k;t,t_2)\mathrm{d}t_2, \\
g_7 &= \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t G(k;t_1,t_2)\frac{D}{Dt}Q(k;t,t_2)\mathrm{d}t_2, \\
g_8 &= \int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t G(k;t,t_2)\frac{D}{Dt}Q(k;t_1,t_2)\mathrm{d}t_2, \\
g_9 &= \int_0^\infty \mathrm{d}k\int_{-\infty}^t G(k;t,t_1)Q(k;t,t_1)\,\mathrm{d}t_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\langle u_i^\alpha\theta\rangle = \kappa_e\frac{\partial\Theta}{\partial x^\alpha} + \kappa_1\frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^a} + \kappa_2\left(\frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial U^b}{\partial x^a} + \frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial U^a}{\partial x^b}\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^\alpha\partial x^\alpha} + \kappa_3\left(\frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial U^b}{\partial x^a} + \frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial U^a}{\partial x^b} + \frac{\partial U^b}{\partial x^a}\frac{\partial U^a}{\partial x^b}\frac{\partial U^c}{\partial x^c}\right)\frac{\partial^3\Theta}{\partial x^d\partial x^d\partial x^\alpha}. \tag{12}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\kappa_e = &-\frac{8\pi}{3}\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG_\theta(k;t,t_1)Q(k;t,t_1) - \\
&\frac{2\pi}{9}\nu\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_2\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG(k;t_1,t_2)G_\theta(k;t,t_2)\times \\
&\frac{\partial^2 Q(k;t_1,t_2)}{\partial y^2} + \frac{4\pi}{45}\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_2\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG(k;t_1,t_2)\times \\
&G_\theta(k;t,t_2)\frac{\partial}{\partial y}\left[G(k;t_1,t_2)\frac{\partial Q(k;t,t_2)}{\partial y}\right] + \\
&\frac{2\pi}{45}\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG_\theta(k;t,t_1)\frac{\partial^2 Q(k;t,t_2)}{\partial y} + \frac{8\pi}{45}\nu\kappa\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_2\int_0^\infty k^4\mathrm{d}k\times \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left[G_\theta(k;t_1,t_2)\int_{-\infty}^{t_2}\mathrm{d}t_3G(k;t_2,t_3)\frac{\partial\theta(k;t_2,t_3)}{\partial y}\right. + \\
&\frac{8\pi}{45}\kappa\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG_\theta(k;t,t_1)\frac{\partial}{\partial y}\left[G_\theta(k;,t_1,t_2)\frac{\partial Q(k;t,t_2)}{\partial y}\right] - \\
&\frac{2\pi}{3}\kappa\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\frac{\partial^2 Q(k;t,t_1)}{\partial y^2}G_\theta(k;t,t_1) - \\
&\frac{32\pi}{45}\nu^2\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_0^\infty k^4\mathrm{d}kG_\theta(k;t,t_1)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial G(k;t,t_1)}{\partial y}\frac{\partial Q(k;t,t_1)}{\partial y} + \right. \\
&\left.\frac{1}{2}G(k;t,t_1)\frac{\partial^2 Q(k;t,t_1)}{\partial y^2}\right],
\end{aligned} \tag{12a$'$}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 = &\frac{4\pi}{315}\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{t_2}\mathrm{d}t_3\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG(k;t,t_1)G_\theta(k;t,t_2)G(k;t_2,t_3)Q(k;t_1,t_3) + \\
&\frac{32\pi}{105}\int_{-\infty}^t\mathrm{d}t_1\int_0^\infty k^2\mathrm{d}kG(k;t,t_1)G_\theta(k;t,t_2)G(k;t,t_1)Q(k;t,t_1),
\end{aligned} \tag{12b$'$}$$

$$\kappa_2 = \frac{8\pi}{45}\kappa\nu\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2\int_0^{\infty}k^4\mathrm{d}kG_\theta(k,t,t_1)\frac{\partial}{\partial y}\times$$
$$\left[G_\theta(k;t_1,t_2)\int_{-\infty}^{t_2}\mathrm{d}t_3G(k;t_2,t_3)\times\frac{\partial}{\partial y}Q(k;t_2,t_3)\right]+$$
$$\frac{8\pi}{45}\kappa\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2\int_0^{\infty}k^2\mathrm{d}kG_\theta(k,t,t_1)\frac{\partial}{\partial y}\left[G_\theta(k;t_1,t_2)\frac{\partial}{\partial y}Q(k;t,t_2)\right], \tag{12c}$$

$$\kappa_3 = \frac{\pi}{9}\kappa\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_1\int_0^{\infty}k^2\mathrm{d}kG_\theta(k,t,t_1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2G_\theta(k;t_1,t_2)Q(k;t,t_2)\right]\cdot \tag{12d$'$}$$

$$\langle u_i^\alpha u_j^\beta u_{n-i-j}^\gamma\rangle = \left[\delta^{\beta\gamma}\iiint_{k>k_M,p>k_M,q>k_M}\delta(k-p-q)B_1\int_{-\infty}^{t}G(-k;t,t_1)\times\right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}Q(p;t,t_1)Q(q;t,t_1)\mathrm{d}t_1+(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)\right]+$$
$$\left[\delta^{\alpha\beta}\iiint_{k>k_M,p>k_M,q>k_M}\delta(k-p-q)B_2\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2G(-k;t,t_1)\times\right.$$
$$\left.\frac{DQ(p;t,t_2)}{Dt}\frac{\partial Q(q;t,t_2)}{\partial x^\gamma}\mathrm{d}t_1+(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)\right]\times$$
$$\left[\delta^{\beta\gamma}\iiint_{k>k_M,p>k_M,q>k_M}\delta(k-p-q)B_1\int_{-\infty}^{t}G(-k;t,t_1)+\right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}Q(p;t,t_1)Q(q;t,t_1)\mathrm{d}t_1+(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)\right], \tag{13}$$

其中,

$$B_1 = \frac{1}{15}(1-2x^2-5y^2-6z^2-7xy^2z),\quad B_2 = \frac{1}{105}(2xy-3y^2z+14xyz),$$
$$B_3 = -\frac{4}{315}(1+y^2-z^2-2xyz),$$

$$\langle u_i^\alpha p\rangle = \iiint_{k>k_M,p>k_M,q>k_M}\delta(k-p-q)B_4\int_{-\infty}^{t}G(-k;t,t_1)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}Q(p;t,t_1)Q(q;t,$$
$$t_1)/\delta(0)\mathrm{d}t_1+\iiint_{k>k_M,p>k_M,q>k_M}\delta(k-p-q)B_5\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}G(-k;t,t_1)\frac{D}{Dt}Q(p;t,$$
$$t_1)Q(q;t,t_1)/\delta(0)\mathrm{d}t_1+\delta^{\alpha\beta}\iiint_{k>k_M,p>k_M,q>k_M}\delta(k-p-q)B_6\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_2$$
$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}G(-k;t,t_1)\times$$
$$\frac{\partial Q(p;t,t_2)}{\partial x^a}\frac{\partial Q(q;t,t_1)}{\partial x^a}/\delta(0)\mathrm{d}t_1\cdot \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_4 &= -\frac{1}{3}(2-2y^2-2z^2+xyz+3xy^2z^2),\\
B_5 &= \frac{1}{9}(1+2y^4-y^2z^2-6x^2z+7xyz),\\
B_6 &= -\frac{17}{105}(y-xy-xy^2-2z^2-3x^2y^2z)\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

3 简　　化

我们采用惯性子区域理论来对扩散项进行简化, 即将关联函数与影响函数用惯性区的形

式来代替. 假定 $Q(k;t,t')$, $G(k;t,t')$, $Q_\theta(k;t,t')$, $G_\theta(k;t,t')$ 具有如下形式:

$$Q(k;t,t') = \Phi(k)\exp[-\omega(k)|t-t'|], \tag{16}$$

$$G(k;t,t') = H(t-t')\exp[-\omega(k)|t-t'|], \tag{17}$$

$$Q_\theta(k;t,t') = \Phi_\theta(k)\exp[-\omega_\theta(k)|t-t'|], \tag{18}$$

$$G_\theta(k;t,t') = H(t-t'))\exp[-\omega_\theta(k)|t-t'|]. \tag{19}$$

与Yoshizawa[6], Shimomura[8]不同我们在(18),(19)中时间尺度并没有采用 $\omega(k)$ 而是还原为 $\omega_\theta(k)$. 其中 $H(t)$ 为单位阶梯函数, 对速度场而言可得

$$\delta(k) = \delta\varepsilon^{2/3}k^{-11/3}H(k-k_m), \quad \omega(k) = \omega\varepsilon^{1/3}k^{2/3}. \tag{20}$$

其中

$$\omega = 0.42, \quad \sigma = 0.12. \tag{21}$$

计算可得 $\Phi_\theta(k)$, $\omega_\theta(k)$ 的表达式为如下:

$$\Phi_\theta(k) = 0.089\,\varepsilon_\theta\delta\varepsilon^{12/3}k^{-11/3}, \quad \omega_\theta(k) = 1.67\,\varepsilon^{1/3}k^{2/3}. \tag{22}$$

由以上计算可见, 我们并没有引入标量的低波数截断 k_θ. 而Yoshizawa[6]及Shimomura[8]均在计算中引入了 k_m, k_θ. 然而需要说明的是 k_θ 的引入是没有足够的理论依据的[8]. 事实上波数截断 k_m 的引入是为了消除响应函数积分的发散问题的. 从物理角度来说, 响应函数积分的发散是由于直接应用EDIA时夸大了大涡对小涡的对流作用. 类似地, 文献[6]、[8]中引入 k_θ 也是由于标量的响应函数积分的发散, 但是引入 k_θ 将会进一步消除大涡的对流作用. 事实上, 在计算中采用文献[8]中引入的 k_m, 标量的响应函数在低波数端是收敛的, 因而在本文中仅引入了 k_m.

计算结果取到三阶, 最后得:

$$\begin{aligned}\langle u_i^\alpha u_j^\beta u_{n-i-j}^\gamma\rangle + \langle u_i^\alpha p\rangle = &-\frac{k^2}{\varepsilon}\left[0.067\,3\left(\frac{\partial k}{\partial x^\alpha}\delta^{\beta\gamma} + (\alpha\leftrightarrow\beta) + (\alpha\leftrightarrow\gamma)\right)\right] - \\ &0.019\,5\,\frac{k}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\alpha}\delta^{\beta\gamma} + (\alpha\leftrightarrow\beta) + (\alpha\leftrightarrow\gamma)\right] - \\ &\frac{k}{\varepsilon}\left\{0.093\,7\left[\frac{\partial^3 k}{\partial x^\alpha\partial x^\beta\partial x^\gamma} + \left(\frac{\partial^3 k}{\partial x^\alpha\partial x^\alpha\partial x^\alpha}\delta^{\beta\gamma} + (\alpha\leftrightarrow\beta) + (\alpha\leftrightarrow\gamma)\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{23}$$

4 实例分析

1. 对于完全发展的非对称槽道流[2]而言, $\overline{uv}$ 可以化简为

$$-\langle uv\rangle \approx \nu_e\frac{\partial U}{\partial y} + \tau_5\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \tau_6\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^3. \tag{24}$$

易见此时我们的结果与Yoshizawa[6]的略有不同, 即等式右端的最后一项是多出项(当然 g_i 的含义也略有不同). 造成这种差别的原因在于Yoshizawa[6]的计算过程中针对此流动做了简化, 而我们的计算适用范围稍微广泛一些. (稍后将对计算中所做的简化进行说明). 等式右端二、三项可以视为修正项. 易见此时 $\nu_e > 0$, $\tau_5 > 0$, $\tau_6 > 0$

a. 在中心区域内存在着动量的逆梯度输运区域, 其中 $\langle uv\rangle$ 与 $\frac{dU}{dy}$ 同号. 因此, $\langle uv\rangle = 0$ 与 $\frac{dU}{dy} = 0$ 的点是不重合的. 从式(24)我们有:

$$\text{当 } \frac{dU}{dy} = 0 \text{ 时}, \quad -\langle uv\rangle \approx \tau_5\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \neq 0. \tag{25}$$

b. 在粗糙壁面区存在着湍动能的逆梯度输运区域, 在此区域内 $k = \frac{1}{2}\langle u^i u^i \rangle$ 与 $\frac{1}{2}\langle u^i u^i u^2 \rangle$ 是同号的• 由式(23) 可得:

$$\langle u^a u^a u^2 \rangle = - \frac{k^2}{\varepsilon}\left[0.332\left(\frac{\partial k}{\partial y}\right) - 0.098\,7\,\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right] - 0.593\,\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - 0.733\left[\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial^3 k}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 k}{\partial y^3}\right]• \tag{26}$$

易见当 $\frac{dk}{dy} = 0$ 时, $\langle u^a u^a u^2 \rangle \neq 0$•

因而式(24)、(26) 可以定性地反映动量、湍动能的逆梯度输运现象•

2. 对于文献[3] 中的四组实验_均匀流动及非均匀流(圆柱尾流), 此时有

$$\langle u_2 \theta \rangle = \kappa_e \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \kappa_1 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \kappa_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \kappa_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^3 \Theta}{\partial y^3}• \tag{27}$$

1) 对于均匀湍流 $\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = 0, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = \mathrm{cons\ tant} > 0, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = \mathrm{cons\ tant} < 0\right)$, 由上式易见 $\langle u_2 \theta \rangle = 0$ 与 $\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$ 是重合的, 即标量通量是顺梯度输运的•

2) 对于非均匀湍流 $\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} \neq \mathrm{cons\ tant}\right)$, 由上式易见有 $\langle u_2 \theta \rangle = 0$ 与 $\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$ 是不重合的, 即标量通量是逆梯度输运的• 因而式(27) 可以定性地反映标量的逆梯度输运现象•

5 结论与讨论

本文运用单影响函数的TSDIA 导出了雷诺应力及被动标量通量的表达式, 并将所得结果用以解释湍流中存在的逆输运现象• 在这里我们首先将所得结果与 Yoshizawa[6] 进行比较•

1) 对于雷诺应力的表达式, 本文所得结果与 Yoshizawa 的结果符合• 但是应注意的是本文中仅引入了单个影响函数;

2) 在 Yoshizawa[9] 有:

$\langle u^\alpha \theta \rangle = c_k \frac{k^2}{\varepsilon} r^{-2}$, 其中 r (表示与热壁的距离) 的引入为了说明湍流 Prandtle 数对于 r 的依赖性• 但是这却违反了被动标量的线性迭加原理• 在本文中运用了 Hamba[7] 的结果, 使得速度场满足连续性条件, 所得结果是满足被动标量的线性迭加原理•

湍流中的动量、标量与能量的逆梯度输运现象在自然界与工程实际中广泛存在• 目前而言其发生、发展的机理仍然不是很清楚• 现有的模式理论中只有微分应力模型与一些非线性模型能比较满意地描述动量的逆梯度输运现象• 但是其中各项的模化基本上采用的是唯象的方法, 缺乏严格的理论基础; 同时需要指出的是在对扩散项的模化时仍旧采用的是梯度输运模型, 因而是不能合理地反映湍能的逆梯度输运现象的• 本文运用单影响函数的TSDIA 研究了湍流中的逆梯度输运现象, 分别得到了可反映动量、标量、能量逆梯度输运的模型表达式, 为构造能合理地反映逆梯度输运现象的湍流模式提供理论基础• 然后运用惯性子区的理论对所得结果进行了简化, 这里需要说明的是: 由于假定惯性子区的下限延伸到了低波数端, 因而该简化得到的结果在处理近壁面区的各向异性时并不可靠• 本文最后利用所得结果分析了槽道流与尾流, 对其中出现的动量、被动标量及湍流的逆梯度输运现象进行了定性的分析, 所得结果与实验定性地符合• 如何将其定量化将是下一步的工作•

[参 考 文 献]

[1] Eskinazei S, Erian F. Energy reversal in turbulent flows[J]. *Phys Fluids*, 1988, **12**(10): 1988—1998.

[2] Hanjalic K, Launder B E. Fully developed asymmetric flow in a plane channel[J]. *J Fluid Mech*, 1972, **51**(2): 301—335.

[3] Sreenivasan K R, Tavoularis S, Corrsin S. A test of gradient transport and its generalizations[J]. *Turbulent Shear Flows*, 1983, **3**(1): 96—112.

[4] Leslie D C. *Developments in the Theory of Turbulence*[M]. New York: Oxford Clarendo, 1972.

[5] Kraichnan R H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers[J]. *J Fluid Mech*, 1959, **5**(1): 497—529.

[6] Yoshizawa A. Statistical analysis of the deviation of Reynolds stress from its eddy viscosity representation[J]. *Phys Fluids*, 1984, **27**(1): 1337—1346.

[7] Hamba F. Statistical analysis of chemically reacting passive scalars in turbulent shear flows[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1987, **56**(1): 79—86.

[8] Shimomura Y. A theoretical study of the turbulent diffusion in incompressible shear flows and in passive scalars[J]. *Phys Fluids*, 1998, **10**(10): 2636—2348.

[9] Yoshizawa A. Statistical modeling of a passive_scalar diffusion in turbulent shear flows[J]. *J Fluid Mech*, 1988, **195**(1): 541—549.

[10] Veeravalli S, Warhaft Z. Thermal dispersion from a line source in the shearless turbulence mixing layer[J]. *J Fluid Mech*, 1990, **216**(10): 35—70.

Models for the Counter_Gradient_ Transport Phenomena

JIANG Jian_bo, LU Zhi_ming, LIU Xiao_ming, LIU Yu_lu

(Shanghai Institute of Applied Mathematics & Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: The counter gradient transport phenomena on momentum, energy and passive scalar in turbulent flows were studied by use of the single response function for TSDIA. As a result, models that can describe qualitatively the phenomena are obtained. Then the results are simplified by use of the inertial range theory, and the results for lower degrees agree with results of predecessor. Finally the counter gradient_transport phenomena in channel flow and circular wake flow are analyzed.

Key words: turbulence; counter_gradient_transport; TSDIA