应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2001) 03_0239_11

创刊廿周年纪念特刊论文

关于一类非线性微分方程组的边值问题的渐近解(Ⅰ)*

江福汝

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 应用新的方法, 研究一类非线性微分方程组

$$u'' = v,\ \varepsilon v'' + f(x, u, u')v' - g(x, u, u')v = 0 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

的边值问题的解的渐近性质• 构造出解的渐近展开式, 和估计了余项, 改进并拓广了前人的工作•

关 键 词: 非线性微分方程组; 边值问题; 渐近解
中图分类号: O302 文献标识码: A

引 言

由于下面一类微分方程组的狄立克雷问题

$$\left.\begin{aligned}&u'' = v,\\&\varepsilon v'' + f(x, u, u')v' - g(x, u, u')v = 0 \qquad (0 < x < 1, 0 < \varepsilon \ll 1),\\&u(0; \varepsilon) = 0,\ u(1; \varepsilon) = 0,\\&v(0; \varepsilon) = \alpha,\ v(1; \varepsilon) = \beta,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的解, 给出更复杂的, 描述涡量定态分布的偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\psi = -\omega,\\&\frac{1}{Re}\nabla^2\omega - \psi_y\omega_x + \psi_x\omega_y = 0,\ \left((x, y)\in\Omega,\ 0 < \frac{1}{Re} \ll 1\right)\end{aligned}\right\}$$

(其中 $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, ψ 是流函数, ω 是涡量, Re 是雷诺数) 的解的定性性质, 许多数学家曾进行过研究[1~4]• 在文[3] 中 Howes 和 Shao 曾研究过一类简单微分方程组的狄立克雷问题, 求得解当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限形态• 以后 Harris 和 Shao[4] 又考察了较一般的微分方程组的狄立克雷问题• 本文应用修正多重尺度法[5,6], 即选择变量的适当的多重尺度以构造边界层(或内层) 校正项的方法, 研究更一般的微分方程组的狄立克雷问题• 求得解的渐近展开式, 和估计了余项, 从而改进并拓广了前人的工作•

为了清楚地说明修正多重尺度法在求解边值问题(1) 中的应用, 先考察文[3] 所研究的两个简单模型: $f \equiv u$, $g \equiv 0$; 和 $f \equiv u'$, $g \equiv 0$• 在本文的部分(Ⅱ) 再考察一般的情形•

* 收稿日期: 2000_03_21; 修订日期: 2000_09_23
作者简介: 江福汝(1927—), 男, 江苏人, 教授.

1 模型 $u''=v,\ \varepsilon v''+uv'=0$

考察边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u_\varepsilon''=v_\varepsilon,\ \varepsilon v_\varepsilon''+u_\varepsilon v_\varepsilon'=0\,(0<x<1,\ 0<\varepsilon\ll 1),\\&u_\varepsilon(0)=0,\ u_\varepsilon(1)=0,\\&v_\varepsilon(0)=\alpha,\ v_\varepsilon(1)=\beta,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中 α,β 是常数• 假设边值问题的外部解具有渐近展开式

$$(u_\varepsilon)_{\rm out}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n(x),\ (v_\varepsilon)_{out}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n(x)\bullet\tag{3}$$

p 是待定常数• 易知外部解的主要项是

$$u_0=\frac{-c_0}{2}x(1-x),\ v_0=c_0\tag{4}$$

和

$$u_n''=v_n\quad(n\geqslant 1);\ \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n'=0\bullet\tag{5}$$

为了构造边界层(或内层)校正项, 引入多重尺度变量

$$\xi=\phi(x)/\varepsilon^p,\ \eta=x,\tag{6}$$

其中 $\phi(x)$ 是待定函数, $p>0$ 是待定常数• 导数的展开式是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\varepsilon^{-p}(\delta_x^{(0)}+\varepsilon^p\delta_x^{(1)}),\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}=\varepsilon^{-2p}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon^p\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^{2p}\delta_{x^2}^{(2)})$$

其中

$$\delta_x^{(0)}=\phi_x\frac{\partial}{\partial\xi},\ \delta_x^{(1)}=\frac{\partial}{\partial\eta};$$

$$\delta_{x^2}^{(0)}=\phi_x^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2},\ \delta_{x^2}^{(1)}=2\phi_x\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial}{\partial\xi},\ \delta_{x^2}^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\bullet$$

在多重尺度下, 边值问题(2)具有形式:

$$\begin{cases}\varepsilon^{-2p}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon^p\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^{2p}\delta_{x^2}^{(2)})u_\varepsilon=v_\varepsilon, & (7\mathrm{a})\\ \varepsilon^{1-2p}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon^p\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^{2p}\delta_{x^2}^{(2)})v_\varepsilon+u_\varepsilon\varepsilon^{-p}(\delta_x^{(0)}+\varepsilon^p\delta_x^{(1)})v_\varepsilon=0, & (7\mathrm{b})\\ u_\varepsilon\left(\dfrac{\phi(0)}{\varepsilon^p},0\right)\Big|_{\varepsilon\to0}=0,\ u_\varepsilon\left(\dfrac{\phi(1)}{\varepsilon^p},1\right)\Big|_{\varepsilon\to0}=0, & (7\mathrm{c})\\ v_\varepsilon\left(\dfrac{\phi(0)}{\varepsilon^p},0\right)\Big|_{\varepsilon\to0}=\alpha,\ v_\varepsilon\left(\dfrac{\phi(1)}{\varepsilon^p},1\right)\Big|_{\varepsilon\to0}=\beta\bullet & (7\mathrm{d})\end{cases}$$

假设解的渐近展开式是

$$\left.\begin{aligned}u_\varepsilon&=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n(\xi,\eta),\\ v_\varepsilon&=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n(\xi,\eta),\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

其右边的第二项表示外部解在边界层(或内层)的校正项• 将(8)式代入边值问题(7), 考虑到 U_n 和 V_n 应是边界层型函数, 即当 $\xi\to\infty$(即 $\varepsilon\to0$) 则是指数型地趋于零, 今取 $1-2p=0$, 即 $p=\frac{1}{2}$• 经比较 ε 的同次幂的系数得到递推方程

$$
\left.
\begin{aligned}
&\phi_x^2\frac{\partial^2 U_0}{\partial\xi^2}=0,\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\xi^2}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2 U_0}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial U_0}{\partial\xi}\right),\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2 U_n}{\partial\xi^2}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial U_{n-1}}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 U_{n-2}}{\partial\eta^2}\right)+V_{n-2}\qquad(n\geqslant 2),
\end{aligned}
\right\}\tag{9}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\phi_x^2\frac{\partial^2 V_0}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-1/2}u_0(\eta)\phi_x\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-1/2}u_0(\eta)\phi_x\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2 V_0}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial V_0}{\partial\xi}\right)-\\
&\qquad\varepsilon^{-1/2}u_0(\eta)\frac{\partial V_0}{\partial\eta}-U_2\phi_x\frac{\partial V_0}{\partial\xi},\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2 V_n}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-1/2}u_0(\eta)\phi_x\frac{\partial V_n}{\partial\xi}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2 V_{n-1}}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial V_{n-1}}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 V_{n-2}}{\partial\eta^2}\right)-\\
&\qquad\varepsilon^{-1/2}u_0(\eta)\frac{\partial V_{n-1}}{\partial\eta}-\sum_{i=2}^{n+1}U_i\left(\phi_x\frac{\partial V_{n-i+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial V_{n-i}}{\partial\eta}\right)\qquad(n\geqslant 2),
\end{aligned}
\right\}\tag{10}
$$

(将负下标的量取作零), 和边界条件

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_n(0)+U_n\left(\frac{\phi(0)}{\varepsilon^{1/2}},0\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=0,\ u_n(1)+U_n\left(\frac{\phi(1)}{\varepsilon^{1/2}},1\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=0\qquad(n\geqslant 0),\\
&v_0(0)+V_0\left(\frac{\phi(0)}{\varepsilon^{1/2}},0\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=\alpha,\ v_0(1)+V_0\left(\frac{\phi(1)}{\varepsilon^{1/2}},1\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=\beta,\\
&v_n(0)+V_n\left(\frac{\phi(0)}{\varepsilon^{1/2}},0\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=0,\ v_n(1)+V_n\left(\frac{\phi(1)}{\varepsilon^{1/2}},1\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=0\qquad(n\geqslant 1).
\end{aligned}
\right\}\tag{11}
$$

在边界点的邻域视 $u_0(\eta)$ 与 $\varepsilon^{1/2}$ 是同阶小量. 从递推方程(10) 可以看出, 校正项 $V_n(n\geqslant 0)$ 的极限形态依赖于 $u_0(\eta)$.

在边界 $x=0$ 的领域, 取待定函数 $\phi(x)=x$, (10) 中的第一方程化为

$$
\frac{\partial^2 V_0}{\partial\xi^2}-\varepsilon^{1/2}\frac{c_0}{2}\eta(1-\eta)\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,\ \text{即}\frac{\partial^2 V_0}{\partial\xi^2}-\frac{c_0}{2}(1-\eta)\xi\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,
$$

当 $c_0<0$ 时, 具有边界层型函数的解

$$
V_0=k_0(\eta)\int_\xi^\infty\exp\left[\frac{c_0(1-\eta)t^2}{4}\right]\mathrm{d}t. \tag{12}
$$

在 $x=1$ 的邻域, 取待定函数 $\phi(x)=1-x$, 则(10) 中的第一方程化为

$$
\frac{\partial^2 V_0}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{-1/2}\frac{c_0}{2}\eta(1-\eta)\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,
$$

即
$$
\frac{\partial^2 V_0}{\partial\xi^2}+\frac{c_0}{2}\eta\xi\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0.
$$

当 $c_0>0$ 时具有边界层型函数的解

$$
V_0=k_0(\eta)\int_\xi^\infty\exp\left[\frac{-c_0\eta t^2}{4}\right]\mathrm{d}t. \tag{13}
$$

因此有下面四种情形:

情形 1 $\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0$

若 $\alpha=\beta=0$, 则是零解 $u_\varepsilon=v_\varepsilon=0$. 所以可假设 α,β 不同时为零. 不妨设 $\alpha>0$, 此

时

$$u_0=\frac{-\alpha}{2}\eta(1-\eta),\ v_0=\alpha\cdot \tag{14}$$

因 $\alpha>0$, 可在 $x=1$ 的邻域构造校正项• 从(13) 式有

$$V_0=k_0(\eta)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\alpha\eta}\xi/2}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t=k_0(\eta)\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{\alpha\eta}\xi}{2}\right)\right], \tag{15}$$

其中 $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t$ 是 z 的误差函数, 当 $z\to\infty$ 时

$$\Phi(z)\approx 1-\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(1/2)}{z}\exp[-z^2]\cdot$$

根据边界条件(11), 今取 $k_0(\eta)=\beta-\alpha$, 得到渐近解的主要项

$$\left.\begin{aligned}&u_\varepsilon^{(0)}=\frac{-\alpha}{2}\eta(1-\eta),\\&v_\varepsilon^{(0)}=\alpha+H(x)(\beta-\alpha)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\alpha x}(1-x)/2\varepsilon^{1/2}}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中 $H(x)$ 是截断函数,

$$H(x)=\begin{cases}1 & \left(当\ 3/4\leqslant x\leqslant 1\right),\\ h(x) & \left(当\ 1/2\leqslant x\leqslant 3/4\right),\\ 0 & \left(当\ 0\leqslant x\leqslant 1/2\right)\cdot\end{cases} \tag{17}$$

$h(x)$ 是连接 0 与 1 的二次连续可微函数•

从(5) 式 $(p=1/2)$, (9) 式和边界条件(11), 得到

$$u_1=-2^{-1}c_1\eta(1-\eta),\ v_1=c_1,\ U_1=0, \tag{18}$$

(c_1 是待定常数) 和确定 U_2 的微分方程

$$\partial^2U_2/\partial\xi^2=V_0\cdot$$

求得边界层型函数的解

$$U_2=\frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{\pi}}\int_\xi^\infty\mathrm{d}z\int_z^\infty\mathrm{d}s\int_{\sqrt{\alpha\eta}s/2}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t\cdot \tag{19}$$

将 u_0, V_0, U_2 代入(10) 中的第二方程, 得到确定 V_1 的微分方程

$$\frac{\partial^2V_1}{\partial\xi^2}+\frac{\alpha}{2}\eta\xi\frac{\partial V_1}{\partial\xi}=\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha\sqrt{\alpha\eta}}{4}\xi^2-\sqrt{\alpha\eta}-\right.$$
$$\left.\frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha\eta}\int_\xi^\infty\mathrm{d}z\int_z^\infty\mathrm{d}s\int_{\sqrt{\alpha\eta}s/2}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t\right)\exp\left[\frac{-\alpha\eta\xi^2}{4}\right]\equiv$$
$$Q_1(\xi,\eta)\exp\left[\frac{-\alpha\eta^2}{4}\right],$$

具有边界层型函数的解

$$V_1=\int_\xi^\infty\exp\left[\frac{-\alpha\eta s^2}{4}\right]\mathrm{d}s\int_s^\infty Q_1(t,\eta)\,\mathrm{d}t\cdot \tag{20}$$

根据边界条件 $v_1(1)+V_1(0,1)=0$ 可以求出 c_1• 求得了渐近的次一项 u_1, v_1, U_1, V_1 和 U_2•

将 u_0, v_0, U_0, V_0, …等等代入(5) 式($p=1/2$) 和(9), (10) 式中的第三方程($n=3$), 以及(11) 式, 得到关于 u_2, v_2, U_2, V_2, U_3 的边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u_2''=v_2,\ u_0v_2'=0,\ \frac{\partial^2U_3}{\partial\xi^2}=2\frac{\partial^2U_2}{\partial\xi\partial\eta}+V_1,\\&\frac{\partial^2V_2}{\partial\xi^2}+\frac{\alpha}{2}\eta\xi\frac{\partial V_2}{\partial\xi}=2\frac{\partial V_1}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2V_0}{\partial\eta^2}-\frac{1}{2}\alpha\eta\xi\frac{\partial V_1}{\partial\eta}+U_3\frac{\partial V_0}{\partial\xi},\\&u_2(0)+U_2(\xi,0)\big|_{\xi\to\infty}=0,\ u_2(1)+U_2(0,1)=0,\\&v_2(0)+V_2(\xi,0)\big|_{\xi\to\infty}=0,\ v_2(1)+V_2(0,1)=0\cdot\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

可以求得

$$u_2=x\left(\frac{c_2}{2}x+b_2\right),\ v_2=c_2,\ U_3=\int_\xi^\infty dz\int_z^\infty A(s,\eta)\exp\left[\frac{-\alpha\eta s^2}{4}\right]ds\tag{22}$$

(c_2, c_2 是待定常数, $A(\xi,\eta)$ 是 ξ 的三次多项式), 和关于 V_2 的微分方程组

$$\frac{\partial^2V_2}{\partial\xi^2}+\frac{\alpha}{2}\eta\xi\frac{\partial V_2}{\partial\xi}=Q_2(\xi,\eta)\exp\left[\frac{-\alpha\eta\xi^2}{4}\right],\tag{23}$$

其中 $Q_2(\xi,\eta)$ 是 ξ 的三次多项式与指数型趋于零项的和• 具有边界层型函数的解 V_2:

$$V_2=\exp\left[\frac{-\alpha\eta\xi^2}{4}\right]\int_0^\xi Q_2(t,\eta)\,dt\cdot\tag{24}$$

再根据边界条件 $u_2(1)+U_2(0,1)=0$, $v_2(1)+V_2(0,1)=0$ 可以求出 c_2 和 b_2• 求得渐近解的第三项: u_2, v_2, U_2, V_2 和 U_3• 重复以上的步骤可以求得渐近解的第 $N+1$ 次项 u_N, v_N, U_N, V_N 和 $U_{N+1}U_{N+2}$, (U_{n+1} 和 U_{N+2} 可以由递推方程(9) 令 $n=N+1$ 和 $N+2$ 求得)• 根据截断函数的定义和递推关系式(5)(令 $p=1/2$), (9), (10) 和(11) 容易证明

$$\left.\begin{aligned}&u_\varepsilon^{(N)}=\frac{-\alpha}{2}x(1-x)+\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n/2}u_n(x)+H(x)\sum_{n=0}^{N+2}\varepsilon^{n/2}U_n\left(\frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}},x\right),\\&v_\varepsilon^{(N)}=\alpha+H(x)\frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\alpha x}(1-x)/2\varepsilon^{1/2}}^{\infty}e^{-t}dt+\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n/2}V_n\left(\frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}},x\right),\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

是边值问题(2) 的 N 阶形式渐近解, 即成立

$$\left.\begin{aligned}&(u_\varepsilon^{(N)})''-v_\varepsilon^{(N)}=O(\varepsilon^{(N+1)/2}),\ \varepsilon(v_\varepsilon^{(N)})''+u_\varepsilon^{(N)}(v_\varepsilon^{(N)})'=O(\varepsilon^{(N+1)/2}),\\&u_\varepsilon^{(N)}(0)=O(\varepsilon^{(N+1)/2}),\ u_\varepsilon^{(N)}(1)=O(\varepsilon^{(N+1)/2}),\\&v_\varepsilon^{(N)}(0)=\alpha+O(\varepsilon^{(N+1)/2}),\ v_\varepsilon^{(N)}(1)=\beta+O(\varepsilon^{(N+1)/2})\cdot\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

有定理:

定理 1 边值问题(2) 当 $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$ 时, 存在解 $u_\varepsilon(x)$, $v_\varepsilon(x)$, 和成立估计式

$$u_\varepsilon^{(N)}(x)-KR(x)\varepsilon^{(N+1)/2}\leqslant u_\varepsilon(x)\leqslant u_\varepsilon^{(N)}(x)+KR(x)\varepsilon^{(N+1)/2},\tag{27}$$

$$v_\varepsilon^{(N)}(x)-KS(x)\varepsilon^{(N+1)/2}\leqslant v_\varepsilon(x)\leqslant v_\varepsilon^{(N)}(x)+KS(x)\varepsilon^{(N+1)/2},\tag{28}$$

其中 K 是适当大的正数; $R(x)\geqslant\delta>0$, $S(x)\geqslant\delta>0$ 是满足关系式

$$R''+S\leqslant-\delta<0,\ S'\geqslant\delta>0\qquad(\text{当 }0<x<1)\tag{29}$$

的函数(例如可取 $R(x)=\exp\left[-\frac{x^2}{8}\right]$, $S(x)=\frac{1+x}{16}\exp\left[-\frac{x^2}{8}\right]$), δ 是正数•

证 作函数

$$\alpha_1=u_\varepsilon^{(N)}-KR\varepsilon^{(N+1)/2},\ \alpha_2=v_\varepsilon^{(N)}-KS\varepsilon^{(N+1)/2},$$

$$\beta_1=u_\varepsilon^{(N)}+KR\varepsilon^{(N+1)/2},\ \beta_2=v_\varepsilon^{(N)}+KS\varepsilon^{(N+1)/2},$$

显然成立 $\alpha_1 \leqslant \beta_1$, $\alpha_1(0) \leqslant 0 \leqslant \beta_1(0)$, $\alpha_1(1) \leqslant 0 \leqslant \beta_1(1)$,

$$\alpha_2 \leqslant \beta_2,\ \alpha_2(0) \leqslant 0 \leqslant \beta_2(0),\ \alpha_2(1) \leqslant \beta \leqslant \beta_2(1).$$

又当 $0 < x < 1$ 时成立 $\alpha_1'' \geqslant \beta_2$, 事实上

$$\begin{aligned}\alpha_1'' &= (u_\varepsilon^{(N)})'' - KR''\varepsilon^{(N+1)/2} = \\ &\quad v_\varepsilon^{(N)} + O(\varepsilon^{(N+1)/2}) - KR''\varepsilon^{(N+1)/2} = \\ &\quad \beta_2 + O(\varepsilon^{(N+1)/2}) - K(R'' + S)\varepsilon^{(N+1)/2} \geqslant \beta_2\end{aligned}$$

当 K 适当大和成立关系式(29). 类似地可以证明 $\beta_1'' < \alpha_2$. 此外, 对于任意函数 $u(x)$: $\alpha_1(x) \leqslant u(x) \leqslant \beta_1$, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha_2'' + u\alpha_2' = {}& \varepsilon[(v_\varepsilon^{(N)})'' - KS'\varepsilon^{(N+1)/2}] + (u_\varepsilon^{(N)} + \mu KR\varepsilon^{(N+1)/2})[(v_\varepsilon^{(N)})' - \\ & KS'\varepsilon^{(N+1)/2}] = O(\varepsilon^{(N+1)/2}) + K\varepsilon^{(N+1)/2}[\mu R(v_\varepsilon^{(N)})' - u_\varepsilon^{(N)}S'],\end{aligned}$$

其中 $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$. 因当 $0 < x < 1$ 时 $u_0 = \dfrac{-\alpha(1-x)}{2} < 0$, $V_0'\left(\dfrac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}, x\right) \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$, 所以当 K 适当大时成立

$$\varepsilon\alpha_2' + u\alpha_2' \geqslant 0 \qquad (0 < x < 1),$$

类似地可以证明

$$\varepsilon\beta_2'' + u\beta_2' \leqslant 0 \qquad (0 < x < 1).$$

所以边值问题(2)的解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ 存在和成立 $\alpha_1 \leqslant u_\varepsilon \leqslant \beta_1$, $\alpha_2 \leqslant v_\varepsilon \leqslant \beta_2$, (见文[3]或[1].) 定理证毕.

情形 2 $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$. 若作代换 $z = 1 - x$, $\hat{u}_\varepsilon = -u_\varepsilon$, $\hat{v}_\varepsilon = -v_\varepsilon$ 则边值问题(2) 化为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{u}_\varepsilon'' = \hat{v}_\varepsilon,\ \varepsilon\hat{v}_\varepsilon'' + \hat{u}\hat{v}_\varepsilon' = 0 \qquad (0 < z < 1),\\ &\hat{u}_\varepsilon(0) = 0,\ \hat{u}_\varepsilon(1) = 0,\\ &\hat{v}(0) = -\alpha,\ \hat{v}_\varepsilon(1) = -\beta.\end{aligned}\right\}$$

而属于情形 1, 将在 $z = 1$ 即 $x = 0$ 点出现边界层, 这里不再赘述.

情形 3 $\alpha > 0$, $\beta < 0$. 此时在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 都不出现边界层, 只可能在(0, 1) 中的某点 x_0 出现内层. 下面先构造边值问题的形式渐近解.

在 x_0 的左侧和右侧分别引进多重尺度变量

$$\xi_L = \frac{x_0 - x}{\varepsilon^{1/2}},\ \eta = x;\ \xi_R = \frac{x - x_0}{\varepsilon^{1/2}},\ \eta = x.$$

假设

$$u_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon^L = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}u_n^L(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}U_n^L(\xi_L, \eta)\ (\text{当 } 0 \leqslant x < x_0), \\ u_\varepsilon^R = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}u_n^R(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}U_n^R(\xi_R, \eta)\ (\text{当 } x_0 < x \leqslant 1), \end{cases} \tag{30}$$

$$v_\varepsilon = \begin{cases} v_\varepsilon^L = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}v_n^L(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}V_n^L(\xi_L, \eta)\ (\text{当 } 0 \leqslant x < x_0), \\ v_\varepsilon^R = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}v_n^R(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}V_n^R(\xi_R, \eta)\ (\text{当 } x_0 < x \leqslant 1), \end{cases} \tag{31}$$

将(30), (31) 式代入边值问题(7). 当 $0 \leqslant x < x_0$ 时, 重复情形 1 的计算(在区间的右端点 x_0 的

邻域构造边界层校正项; 在 x_0, $u_\varepsilon(x_0)=0$) 得到外部解的主要项在 x_0 的左侧的表示式:

$$u_0^L=-2^{-1}\alpha\eta(x_0-\eta),\ v_0^L=\alpha,\ U_0^L=0,\ U_1^L=0, \tag{32}$$

和确定 V_0^L 的微分方程

$$\frac{\partial^2 V_0^L}{\partial\xi_L^2}+\varepsilon^{-1/2}\frac{\alpha}{2}\eta(x_0-\eta)\frac{\partial V_0^L}{\partial\xi_L}=0.$$

求得边界层型函数的解

$$V_0^L=k_0(\eta)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\alpha\eta}\xi_L/2}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t, \tag{33}$$

其中 $k_0(\eta)$ 是任意函数(参看(14),(15)式). 当 $x_0<x\leqslant 1$ 时类似地可以求得外部解的主要项在 x_0 的右侧的表示式:

$$\left.\begin{aligned}&U_0^R=-2^{-1}\beta(1-\eta)(\eta-x_0),\ v_0^R=\beta,\ U_0^R=0,\ U_1^R=0,\\&V_0^R=m_0(\eta)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{-\beta(1-\eta)}\xi_R/2}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$m_0(\eta)$ 是任意函数. 从 v_ε 在 x_0 点的连续性知 $k_0(\eta)=\eta\beta/x_0$, $m_0(\eta)=\eta\alpha/x_0$. 求得渐近解的主要项:

$$u_\varepsilon^{(0)}=\begin{cases}\dfrac{-\alpha}{2}x(x_0-x)\ (\text{当 }0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \dfrac{-\beta}{2}(1-x)(x-x_0)\ (\text{当 }x_0\leqslant x\leqslant 1),\end{cases} \tag{35}$$

$$v_\varepsilon^{(0)}=\begin{cases}\alpha+H^L(x)\dfrac{\beta x}{x_0}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\sqrt{\alpha x}(x_0-x)/2\varepsilon^{1/2}}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t\quad(\text{当 }0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \beta+H^R(x)\dfrac{\alpha x}{x_0}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\sqrt{-\beta(1-x)}(x-x_0)/2\varepsilon^{1/2}}^{\infty}\exp[-t^2]\,\mathrm{d}t\quad(\text{当 }x_0\leqslant x\leqslant 1),\end{cases} \tag{36}$$

其中 $H^L(x)$ 和 $H^R(x)$ 是截断函数:

$$H^L(x)=\begin{cases}0 & (\text{当 }0\leqslant x\leqslant\frac{x_0}{3}),\\ h(x) & (\text{当}\frac{x_0}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2x_0}{3}),\\ 1 & (\text{当}\frac{2x_0}{3}\leqslant x\leqslant x_0),\end{cases}$$

$$H^R(x)=\begin{cases}1 & (\text{当 }x_0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}(1-x_0)),\\ \hbar(x) & (\text{当 }x_0+\frac{1}{3}(1-x_0)\leqslant x\leqslant x_0+\frac{2}{3}(1-x_0)),\\ 0 & (\text{当 }x_0+\frac{2}{3}(1-x_0)\leqslant x\leqslant 1),\end{cases}$$

$h(x)$ 和 $\hbar(x)$ 分别是连接0, 1和1, 0的二次连续可微函数. 重复前面的步骤可以求得边值问题的 N 阶形式渐近解

$$u_\varepsilon^{(N)}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n/2}u_n^L+\sum_{n=0}^{N+2}\varepsilon^{n/2}U_n^L & (当\ 0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n/2}u_n^R+\sum_{n=0}^{N+2}\varepsilon^{n/2}U_n^R & (当\ x_0\leqslant x\leqslant 1),\end{cases} \tag{37}$$

$$v_\varepsilon^{(N)}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n/2}v_n^L+\sum_{n=0}^{N+2}\varepsilon^{n/2}V_n^L & (当\ 0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n/2}v_n^R+\sum_{n=0}^{N+2}\varepsilon^{n/2}V_n^R & (当\ x_0\leqslant x\leqslant 1).\end{cases} \tag{38}$$

类似地有定理:

定理 2 边值问题(2)当 $\alpha>0$, $\beta<0$ 时存在解 $u_\varepsilon(x)$, $v_\varepsilon(x)$, 并在(0, 1)中的内点 x_0 存在内层和成立估计式:

$$u_\varepsilon^{(N)}-KR\varepsilon^{(N+1)/2}\leqslant u_\varepsilon\leqslant u_\varepsilon^{(N)}+KR\varepsilon^{(N+1)/2}, \tag{39}$$

$$v_\varepsilon^{(N)}-KS\varepsilon^{(N+1)/2}\leqslant v_\varepsilon\leqslant v_\varepsilon^{(N)}+KS\varepsilon^{(N+1)/2}, \tag{40}$$

其中 K 是适当大的正数; R 和 S 是满足下面条件的正函数:

$$\left.\begin{aligned}&R(x)\geqslant\delta,\ S(x)\geqslant\delta,\ R''+S\leqslant-\delta \quad (当\ 0\leqslant x\leqslant 1),\\ &S'\geqslant\delta\quad(当\ 0\leqslant x\leqslant x_0),\ S'\leqslant-\delta\quad(当\ x_0\leqslant x\leqslant 1),\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

δ 是小的正数. (例如当 $x_0\leqslant x\leqslant 1$ 时取 $S=\dfrac{2-x}{16}\exp\left[\dfrac{-x^2}{8}\right]$, 见定理 1).

定理的证明与定理 1 的证明相同. 出现内层的点 x_0 在文[3]中已求出 $x_0=(-\beta)^{1/3}/[(-\beta)^{1/3}+\alpha^{1/3}]$. 这里给出一致有效解.

情形 4 $\alpha<0$, $\beta>0$

此时, 在两边界点 $x=0$ 和 $x=1$ 都出现边界层. 在文[3]中已证明 $\lim_{\varepsilon\to 0}v_\varepsilon(x)=0$ (当 $0<\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$), $\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x)=0$ (当 $0\leqslant x\leqslant 1$). 关于边界层校正项将在另一文中给出.

2 模型 $u''=v,\ \varepsilon v''+u'v'=0$

考察边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u_\varepsilon''=v_\varepsilon,\ \varepsilon v_\varepsilon''+u_\varepsilon'v_\varepsilon'=0\quad(0<x<1),\\ &u_\varepsilon(0)=0,\ u_\varepsilon(1)=0,\ u_\varepsilon(0)=\alpha,\ v_\varepsilon(1)=\beta.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

假设其外部解是

$$(u_\varepsilon)_{\text{out}}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n(x),\ (v_\varepsilon)_{\text{out}}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n(x), \tag{43}$$

其中 p 是待定常数, 易知其主要项是

$$u_0=-c_0x(1-x)/2,\ v_0=c_0, \tag{44}$$

和成立 $u_n''=v_n,\ (n\geqslant 1);\ \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n'\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n'=0.$ (45)

为了构造边界层(或内层)校正项, 引入多重尺度 ξ, η(参见(6)式), 边值问题(42)化为

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2p}\left(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon^{p}\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^{2p}\delta_{x^2}^{(2)}\right)u_\varepsilon=v_\varepsilon,\\
&\varepsilon^{1-2p}\left(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon^{p}\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^{2p}\delta_{x^2}^{(2)}\right)v_\varepsilon+\varepsilon^{-p}u_\varepsilon'\left(\delta_x^{(0)}+\varepsilon^{p}\delta_x^{(1)}\right)v_\varepsilon=0,\\
&u_\varepsilon(\phi(0)/\varepsilon^{p},0)\mid_{\varepsilon\to0}=0,\ u_\varepsilon(\phi(1)/\varepsilon^{p},1)\mid_{\varepsilon\to0}=0,\\
&v_\varepsilon(\phi(0)/\varepsilon^{p},0)\mid_{\varepsilon\to0}=0,\ v_\varepsilon(\phi(1)/\varepsilon^{p},1)\mid_{\varepsilon\to0}=\beta.
\end{aligned}\right\}\tag{46}
$$

假设解的渐近展开式是

$$
\left.\begin{aligned}
u_\varepsilon&=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}u_n(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}U_n(\xi,\eta),\\
v_\varepsilon&=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}v_n(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{np}V_n(\xi,\eta).
\end{aligned}\right\}
$$

代入边值问题(46). 为了求得边界层型函数的校正项, 今取 $p=1$. 比较 ε 的同次幂的系数, 得到关于 U_n, V_n, $(n=0,1,2,\cdots)$ 的递推方程

$$
\left.\begin{aligned}
&\phi_x^2\frac{\partial^2U_0}{\partial\xi^2}=0,\ \phi_x^2\frac{\partial^2U_1}{\partial\xi^2}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2U_0}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial U_0}{\partial\xi}\right),\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2U_n}{\partial\xi^2}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2U_{n-1}}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial U_{n-1}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial^2U_{n-2}}{\partial\eta^2}+V_{n-2}\qquad(n\geqslant2),
\end{aligned}\right\}\tag{47}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\phi_x^2\frac{\partial^2V_0}{\partial\xi^2}+u_0'\phi_x\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2V_1}{\partial\xi^2}+u_0'\phi_x\frac{\partial V_1}{\partial\xi}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2V_0}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial V_0}{\partial\xi}\right)-u_0'\frac{\partial V_0}{\partial\eta}-u_1'\phi_x\frac{\partial V_0}{\partial\xi}-\\
&\qquad\sum_{i=0}^{1}v_i'\left(\phi_x\frac{\partial U_{1-i}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{1-i-1}}{\partial\eta}\right)-\left(\phi_x\frac{\partial U_2}{\partial\xi}+\frac{\partial U_1}{\partial\eta}\right)\phi_x\frac{\partial V_0}{\partial\xi},\\
&\phi_x^2\frac{\partial^2V_n}{\partial\xi^2}+u_0'\phi_x\frac{\partial V_n}{\partial\xi}=-\left(2\phi_x\frac{\partial^2V_{n-1}}{\partial\xi\partial\eta}+\phi_{xx}\frac{\partial V_{n-1}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial^2V_{n-2}}{\partial\eta^2}-\\
&\qquad u_0'\frac{\partial V_{n-1}}{\partial\eta}-\sum_{i=1}^{n}u_i'\left(\phi_x\frac{\partial V_{n-i}}{\partial\xi}+\frac{\partial V_{(n-i)-1}}{\partial\eta}\right)-\sum_{i=0}^{n}v_i'\left(\phi_x\frac{\partial U_{n-i}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{(n-i)-1}}{\partial\eta}\right)-\\
&\qquad\sum_{i=1}^{n}\left(\phi_x\frac{\partial U_{i+1}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_i}{\partial\eta}\right)\left(\phi_x\frac{\partial V_{n-i}}{\partial\xi}\frac{\partial V_{(n-i)-1}}{\partial\eta}\right)(n\geqslant2),
\end{aligned}\right\}\tag{48}
$$

将负下标的量取作零. 在(48)式中, 已令 $U_0=U_1=0$, 这一事实从 U_0, U_1 所满足的微分方程(见(47)式)和边界条件立知.

在边界 $x=0$ 的邻域令 $\phi(x)=x$, 则(48)中的第一方程化为

$$
\frac{\partial^2V_0}{\partial\xi^2}-\frac{c_0(1-2\eta)}{2}\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,\tag{49}
$$

仅当 $c_0<0$ 时才有边界层型函数的解.

在 $x=1$ 的邻域令 $\phi=1-x$, (48)中的第一方程化为

$$
\frac{\partial^2V_0}{\partial\xi^2}+\frac{c_0(1-2\eta)}{2}\frac{\partial V_0}{\partial\xi}=0,\tag{50}
$$

也是 $c_0<0$ 时才有边界层型函数的解.

下面仍就四种情形来讨论.

情形 1 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$. 若 $\alpha = \beta = 0$, 则是零解 $u_\varepsilon = v_\varepsilon = 0$. 所以可假设 α, β 不同时为零. 若 $\alpha > 0, \beta > 0$, 则在两边界点均不出现边界层, 而只可能在 $(0, 1)$ 中的某点 x_0 出现内层. 容易知道外解的主要项是

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}x^2 + c_1 x & (\text{当 } 0 \leqslant x \leqslant x < x_0), \\ \dfrac{\beta}{2}x^2 + d_1 x - \left(\dfrac{\beta}{2} + d_1\right) & (\text{当 } x_0 < x \leqslant 1), \end{cases}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} \alpha & (\text{当 } 0 \leqslant x < x_0), \\ \beta & (\text{当 } x_0 < x \leqslant 1), \end{cases}$$

其中 c_1, d_1 是待定常数. 根据条件 $u_0(x_0^+) = u_0(x_0^-)$, $u_0'(x_0^+) = u_0'(x_0^-) = 0$, 可以求得 $c_1 = -\alpha x_0$, $d_1 = -\beta x_0$ 和

$$x_0 = \beta^{1/2}/(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}).$$

利用递推式(45), (47), (48) 可以采用模型 1, 情形 3 的步骤求得边值问题(43) 的渐近解.

若 α 或 β 有一为零, 设 $\beta = 0$, 则出现内层的点 x_0 移到边界点 $x = 0$, 内层成为边界层.

情形 2 $\alpha < 0, \beta < 0$

此时在两边界点都出现边界层. 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 的邻域分别引进多重尺度变量

$$\xi_0 = x/\varepsilon, \eta = x; \xi_1 = (1 - x)/\varepsilon, \eta = x.$$

从(48) 的第一方程, 在 $x = 0$ 的邻域可以求得 $V_0 = k_0(\eta)e^{c_0(1-2\eta)\xi_0/2}$; 在 $x = 1$ 的邻域可以求得 $V_0 = k_1(\eta)e^{-c_0(1-2\eta)\xi_1/2}$, 当 $c_0 < 0$ 时是边界层型函数. 考虑到边界条件, 渐近解的主要项是

$$\begin{cases} u_\varepsilon^{(0)} = -c_0 x(1 - x)/2, \\ v_\varepsilon^{(0)} = c_0 + H_0(x)(\alpha - c_0)\exp\left[\dfrac{c_0 x(1 - x)}{2\varepsilon}\right] + \\ \qquad H_1(x)(\beta - c_0)\exp\left[\dfrac{-c_0(1 - 2x)(1 - x)}{2\varepsilon}\right], \end{cases}$$

其中 c_0 是待定常数; H_0 和 H_1 是截断函数:

$$H_0(x) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1/8), \\ h_0(x) & (\text{当 } 1/8 \leqslant x \leqslant 1/4), \\ 0 & (\text{当 } 1/4 \leqslant x \leqslant 1), \end{cases}$$

$$H_1(x) = \begin{cases} 0 & (\text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 3/4), \\ h_1(x) & (\text{当 } 3/4 \leqslant x \leqslant 7/8), \\ 1 & (\text{当 } 7/8 \leqslant x \leqslant 1), \end{cases}$$

其中 $h_0(x)$ 和 $h_1(x)$ 分别是连接 1, 0 和 0, 1 的二次连续可微函数. 根据条件 $(v_\varepsilon^{(0)})'|_{x=0} = (v_\varepsilon^{(0)})'|_{x=1}$ 可以确定出 c_0,

$$c_0 = (\alpha + \beta)/2.$$

利用(45) 式 $(p = 1)$, 递推方程(47) 和(48), 以及边界条件, 可以仿照模型 1 情形 1 中采用的步骤求出各阶展开式.

情形 3 $\alpha < 0, \beta > 0$

此时由于 $\alpha < 0$, 在 $x = 0$ 的邻域具有边界层型函数 $V_0 = k_0(\eta)\exp\left[\dfrac{\alpha(1 - 2\eta)\xi_0}{2}\right]$, 在 $x = 1$ 的邻域具有边界层型函数 $V_0 = k_1(\eta)\exp\left[\dfrac{-\alpha(1 - 2\eta)\xi_1}{2}\right]$, 所以渐近解的主要项是

$$\begin{cases} u_\varepsilon^{(0)} = -\alpha x(1-x)/2, \\ v_\varepsilon^{(0)} = \alpha + H(x)(\beta-\alpha)\exp\left[\dfrac{-\alpha(1-2x)(1-x)}{2\varepsilon}\right], \end{cases}$$

其中 $H(x)$ 是截断函数(见(17)式)• 重复模型 1 情形 1 中的步骤,可以求出解的各阶渐近展开式•

情形 4 $\alpha > 0$, $\beta < 0$• 此时作代换 $z = 1-x$,可化到情形 3,将在 $x = 0$ 出现边界层•

本文应用修正多重尺度法导出较已有工作更精确的结果• 关于更一般的微分方程组的边值问题,将在部份(Ⅱ)中讨论•

[参 考 文 献]

[1] Dorr F W, Parter S V. Singular perturbations of nonlinear boundary value problems with turning points[J]. J Math Anal Appl, 1970, **29**: 273—293.

[2] Dorr F W, Parter S V. Shampine L F. Applications of the maximum principle to singular perturbation problems[J]. SIAM Rev, 1973, **15**: 43—88.

[3] Howes F A, Shao S. Asymptotic analysis of model problems for a coupled systems[J]. Nonlinear Anal, 1989, **13**(9): 1013—1024.

[4] Harris W A, Shao S. Refined approximations of the solutions of a coupled system with turning points [J]. J Differential Equations, 1991, **92**: 125—144.

[5] JIANG Fu_ru. On the boundary layer method[J]. Appl Math and Mech (English Edition), 1981, **2**(5): 505—518.

[6] JIANG Fu_ru. On the singular perturbations of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations[J]. Scientia Sinica, 1987, **30**(6): 588—600.

On the Asymptotic Solutions of Boundary Value Problems for a Class of Systems of Nonlinear Differential Equations(Ⅰ)

JIANG Fu_ru

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: A new method is applied to study the asymptotic behavior of solutions of boundnary value problems for a class of systems of nonlinear differential equations

$$u'' = v,\ \varepsilon v'' + f(x, u, u')v' - g(x, u, u')v = 0 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1).$$

The asymptotic expansions of solutions are constructed, the remainders are estimated. The former works are improved and generalized.

Key words: system of nonlinear differential equations; boundary value problem; asymptotic solution