应用数学和力学, 第 22 卷 第 4 期(2001 年 4 月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 04_0382_11

Newton_Riemann 时空中的动力学(III)*

张荣业

(中国科学院 数学研究所, 北京 100080)

(钱伟长推荐)

摘要: 讨论了 Newton_Riemann 时空中的动力学——Hamilton 力学及其在流体力学中的应用•

关 键 词: Riemann 流形; 纤维丛; 外微分; 绝对微分; Lie 导数; 不变量; 不变形式; 共同运动时间导数
中图分类号: O313.1　　文献标识码: A

引　言

本文讨论非平稳的 Hamilton 力学•

Hamilton 力学是分析力学的重要组成部分[1]• 平稳的 Hamilton 力学建立在运动系统的构形空间——Riemann 流形的余切丛或辛流形上, 非平稳的 Hamilton 力学则不然[2]•

Hamilton 力学的原理有多方面的推广, 不仅用于力学, 也用于微分方程的研究, 如发展方程的 Hamilton 方法[3]•

至于非平稳的 Hamilton 力学系统, 有的在 jet 丛及 contact 丛中描述和研究[4], 或者在 $T^* M \times R$ 中描述和研究[2]• 我们用 Riemann 几何以自然的方式在 Newton_Riemann 时空 $N = R^1 \times M^n$ 中描述和研究, 并将之应用于流体力学, 可以得到更广泛深入的结果•

余者, 可参阅[5]、[6]、[7]•

1　Newton_Riemann 时空中的 Hamilton 力学

如前(Ⅰ)(见: 应用数学和力学, 2000 年 21 卷 7 期, 746—754 页), $N = R^1 \times M^n$ 是 Newton_Riemann 时空, $n+1$ 维光滑流形, (N, Π, R^1) 是纤维丛, 投影 $\Pi: N \to R^1, (t, \boldsymbol{x}) \mapsto t$, $\forall t \in R^1$, $\Pi^{-1}(t) = M_t^n$ 是丛 N 在 $t \in R^1$ 上的纤维, 这里 M_t^n 是 n_维 Riemann 流形• TN、$T^* N$ 是 N 的切丛及余切丛, 丛投影

$$\Pi: TN \to N, (t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{v}) \mapsto (t, \boldsymbol{x}),$$
$$\Pi^*: T^* N \to N, (t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{p}) \mapsto (t, \boldsymbol{x})•$$

$(I \times U, \varphi = id \times \varphi)$ 是 N 的局部坐标系, $\forall (t, \boldsymbol{x}) \in I \times U \subset N$, $\varphi: (t, \boldsymbol{x}) \mapsto (t, x^1, \cdots, x^n) \in I \times R^n$, 则 $(\Pi^{-1}(I \times U), \phi)$ 是 TN 的局部坐标系,

$$\forall (t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{v}) \in \Pi^{-1}(I \times U) \subset TN, \ \phi: (t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{v}) \mapsto$$

* 收稿日期: 1998_03_07; 修订日期: 2000_07_07
作者简介: 张荣业(1938—), 男, 广东开平人, 研究员, 研究方向: 微分几何、微分方程.

$$(t, x^1, \cdots, x^n, 1, v^1, \cdots, v^n) \in \varphi(I \times U) \times R^{n+1},$$

$(\Pi^{*-1}(I \times U), \psi^*)$ 是 T^*N 的局部坐标系,

$$\forall (t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{p}) \in \Pi^{*-1}(I \times U) \subset T^*N, \ \psi^*: (t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{p}) \mapsto$$
$$(t, x^1, \cdots, x^n, 1, p_1, \cdots, p_n) \in \varphi(I \times U) \times R^{n+1}.$$

在坐标系 $(I \times U, \varphi)$ 下, N 的时空度量

$$g = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + g_{jk}\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k, \tag{1}$$

TN 及 T^*N 都是有一坐标恒等于 1 的 $2n+2$ 维流形, 可视为较大的 $2n+2$ 维流形的 $2n+1$ 维子流形.

设 $C^k(T^*N, R)$ 是定义于 T^*N 中取值于 R 的 k 次连续可微函数的集合. $\forall f \in C^k(T^*N, R), f(t, \boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{p}) = f_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ 即视 f 为 $t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ 的可微函数, 后面均如此运用.

为建立 N 中, 严格地说 T^*N 中的 Hamilton 力学, 把 T^*N 中恒为 1 的坐标变为 r, $\forall H \in C^k(T^*N, R)$. 命

$$H(t, \boldsymbol{x}, r, \boldsymbol{p}) = H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + r. \tag{2}$$

定义 1_形式

$$\omega = p_j \mathrm{d}x^j + r\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

则 ω 的外微分是 2_形式

$$\Omega = -\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}p_j + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r \tag{4}$$

是辛形式. 设向量场

$$\boldsymbol{X} = \lambda\partial/\partial t + \xi^j\partial/\partial x^j + \zeta\partial/\partial r + \eta^j\partial/\partial p_j. \tag{5}$$

命 $$\boldsymbol{X} \lrcorner \Omega = \mathrm{d}H, \tag{6}$$

则得

$$\lambda = \frac{\partial H}{\partial r} = 1, \ \xi^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \ \zeta = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \ \eta^j = -\frac{\partial H}{\partial x^j} = -\frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

引入参数 s

$$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial t}\partial/\partial r - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j,$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \ \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \ \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial x^j},$$

可知 s 就是 t, 且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \ r = -H, \ H = 0.$$

$r = -H$ 起冲量作用, 于是得到

$$\omega = p_j\mathrm{d}x^j - H\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$\Omega = \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}p_j + \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t. \tag{8}$$

ω 就是 Poincaré_Cartan 1_形式.

定理 1.1 $\forall H \in C^k(T^*N, R)$, 存在唯一的向量场 $\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \boldsymbol{X} \in \mathscr{X}^r(T^*N)$ 使得

$$\boldsymbol{X} \lrcorner \Omega = 0, \tag{9}$$

且 $$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j \in \mathscr{X}(T^*N). \tag{10}$$

这是 T^*N 中的 Hamilton 向量场, 其中

$$\boldsymbol{X} = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j \tag{11}$$

是纤维 $\pi^{*-1}(t) = M_t^n$ 的余切丛 T^*M_t 中的 Hamilton 向量场, $\forall t \in I \subset R^1$, 而 $\Omega = \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}p_j$。

证明 $0 = \boldsymbol{X} \lrcorner \Omega = (\partial/\partial t + \boldsymbol{X}) \lrcorner (\Omega + \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t) = -\mathrm{d}H + \boldsymbol{X} \lrcorner \Omega + \boldsymbol{X} \lrcorner \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t \Leftrightarrow \boldsymbol{X} \lrcorner \Omega = \mathrm{d}H$, $\boldsymbol{X} \lrcorner \mathrm{d}H = 0$, $\forall t \in I$, 在 $\pi^{-1}(t) = M_t^n$ 中。 从而

$$\boldsymbol{X} = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j,$$

且
$$\boldsymbol{X} \lrcorner \mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x^j} - \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0。$$

$\boldsymbol{X}$ 即是(11), $\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \boldsymbol{X}$ 即(10)。

因 Ω 及 Ω 分别是 T^*N 与 TN 之间及 $T^*M_t^n$ 与 TM_t^n 之间的同构映射, 故, $\forall H \in C^k(T^*N, R)$, $\forall t \in I \subset R^1$, $\boldsymbol{X} = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 唯一决定, 从而 $\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \boldsymbol{X}$ 唯一决定。

$\forall \boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \boldsymbol{X} \in \mathscr{X}^r(T^*N)$ ——T^*N 上 r 次连续可微的向量场的集合, 在坐标系 $(\pi^{*-1}(I \times U), \psi^*)$ 中表为

$$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \xi^j\partial/\partial x^j + \eta^j\partial/\partial p_j。 \tag{12}$$

$\boldsymbol{X}$ 的积分曲线 γ 是方程组

$$\dot{t} = 1,\ \dot{x}^j = \xi^j(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}),\ \dot{p}_j = \eta^j(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \tag{13}$$

在初始条件 $(t_0, x_0, p_0) \in \pi^{*-1}(I \times U)$ 下的解

$$\gamma(t) = (t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)) = \sigma_t(t_0, x_0, p_0) =$$
$$(t \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0), x \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0), \boldsymbol{p} \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0)),$$

其中 $x_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$, $p_0 = \boldsymbol{p}(t_0)$, $t \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0) = t + t_0$。 显然

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t(t_0, x_0, p_0) = \partial/\partial t + \frac{\mathrm{d}x^j \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0)}{\mathrm{d}t}\partial/\partial x^j +$$
$$\frac{\mathrm{d}p_j \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0)}{\mathrm{d}t}\partial/\partial p_j = \boldsymbol{X} \circ \sigma_t(t_0, x_0, p_0)。 \tag{14}$$

σ_t 称为 $\boldsymbol{X}$ 的流, $\{\sigma_t\}_{t \in I}$ 称为 $\boldsymbol{X}$ 的(局部)单参数微分同胚群。 计算表明, $\forall \omega \in \mathscr{F}^k(T^*N)$ ——T^*N 上的 k_形式场的集合,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t^*\omega = \sigma_t^*\mathrm{L}_{\boldsymbol{X}}\omega, \tag{15}$$

$\mathrm{L}_{\boldsymbol{X}}\omega$ 是 ω 关于 $\boldsymbol{X}$ 的 Lie 导数。

先给出下面要用到的定义, 定理及命题。

定义 1.2 形式场 $\omega \in \mathscr{F}(M)$ 称为向量场 $\boldsymbol{X} \in \mathscr{X}^r(M)$ 的不变形式, 若它在 $\boldsymbol{X}$ 的流 σ_t 作用下不变。

定义 1.3 k_形式场 $\omega \in \mathscr{F}^k(M)$ 称为向量场 $\boldsymbol{X} \in \mathscr{X}^r(M)$ 的绝对积分不变量, 若它在可微流形 M^n 的 k_维区域 $\Sigma \subset M^n$ 上的积分, 当 Σ 在 $\boldsymbol{X}$ 的流 σ_t 的作用下连续变形时此积分不变($k = 1$, Σ 是曲线; $k = 2, \cdots, n-1$; Σ 是曲面)。

定义 1.4 k_形式场 $\omega \in \mathscr{F}^k(M)$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 称为向量场 $\boldsymbol{X} \in \mathscr{X}^r(M)$ 的相对积分不变量, 若它在 $k+1$ 维区域 $\Sigma \subset M^n$ 的 k_维边界 $\partial\Sigma$ 上的积分当 $\partial\Sigma$ 在 $\boldsymbol{X}$ 的流 σ_t 作用下连续变形时此积分不变($k = 1$, Σ 是曲面, $\partial\Sigma$ 是曲面的边界一闭曲线)。

在 σ_t 下 ω 不变则 $\sigma_t^*\omega = \omega$, $\frac{d}{dt}\sigma_t^*\omega = 0$, $\Leftrightarrow L_X\omega = 0$•

又

$$L_X\omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)• \tag{16}$$

定理 1.5　ω 是 X 的不变形式若且仅若

$$L_X\omega = 0 \Leftrightarrow X \lrcorner d\omega = 0,\ d(X \lrcorner \omega) = 0• \tag{17}$$

定理 1.6　ω 是 X 的绝对积分不变量若且仅若 ω 是 X 的不变形式•

证明　设 $\Sigma_0 \subset M^n$ 是某区域, $\Sigma = \sigma_t(\Sigma_0)$ 则

$$\int_\Sigma \omega = \int_{\sigma_t(\Sigma_0)} \omega = \int_{\Sigma_0} \sigma_t^*\omega$$

且

$$\frac{d}{dt}\int_\Sigma \omega = \int_{\Sigma_0} \frac{d}{dt}\sigma_t^*\omega = \int_{\Sigma_0} \sigma_t^* L_X\omega = \int_\Sigma L_X\omega,$$

$$L_X\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\sigma_t^*\omega = 0 \Leftrightarrow \sigma_t^*\omega = \omega \Leftrightarrow \int_\Sigma \omega = \int_{\Sigma_0} \sigma_t^*\omega = \int_{\Sigma_0} \omega•$$

定理 1.7　ω 是 X 的相对积分不变量若且仅若 $X \lrcorner d\omega = 0$(若 $\omega \in \mathscr{F}'(M)$, 则若且仅 $X \lrcorner d\omega$ 是恰当的)•

证明　$\Sigma_0 \subset M^n$ 是 $k+1$ 维区域, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, $\partial\Sigma_0$ 是 k_维边界, σ_t 是 X 的流, $\Sigma = \sigma_t(\Sigma_0)$, $\partial\Sigma = \sigma_t(\partial\Sigma_0)$ •

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma_0} \frac{d}{dt}\sigma_t^*\omega = \int_{\partial\Sigma_0} \sigma_t^* L_X\omega = \int_{\partial\Sigma} L_X\omega = \int_{\partial\Sigma} X \lrcorner d\omega•$$

可见

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial\Sigma} \omega = 0 \Leftrightarrow X \lrcorner d\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\sigma_t^*\omega = 0 \Leftrightarrow \sigma_t^*\omega = \omega, \Leftrightarrow \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma_0} \omega•$$

$k = 1$ 时, $\partial\Sigma_0$ 是闭曲线, 若 $X \lrcorner d\omega$ 恰当, 则 $\exists f \in \mathscr{F}^0(M)$, 使得 $X \lrcorner d\omega = df$, 故 $\int_{\partial\Sigma} X \lrcorner d\omega = 0$, 故 ω 是 X 的相对积分不变量; 反之, ω 是 X 的相对积分不变量, 则 $\int_{\partial\Sigma} X \lrcorner d\omega = 0$, $X \lrcorner d\omega$ 是某函数 $f \in \mathscr{F}^0(M)$ 的全微分, 则 $X \lrcorner d\omega = df$, ω 恰当•

定理 1.8　ω 是 X 的相对积分不变量, 则 $d\omega$ 是 X 的绝对积分不变量•　反之亦然•

证明　由 Stokes 定理,

$$\int_\Sigma d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma_0} \omega = \int_{\Sigma_0} d\omega•$$

命题 1.9　下列命题等价:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \omega \text{ 是 } X \text{ 的相对积分不变量;} \\ 2.\ d\omega \text{ 是 } X \text{ 的绝对积分不变量;} \\ 3.\ d\omega \text{ 是 } X \text{ 的不变形式场•} \end{array}\right\} \tag{18}$$

命题 1.10　若 ω 是 X 的绝对积分不变量, 则

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ L_X\omega = 0; \\ 2.\ \sigma_t^*\omega = \omega; \\ 3.\ \int_\Sigma \omega = \int_{\Sigma_0} \omega,\ \ \Sigma = \sigma_t(\Sigma_0)• \end{array}\right\} \tag{19}$$

由此可知

定理 1.11 $\Omega = -\mathrm{d}\omega$ 是 Hamilton 向量 $\boldsymbol{X}(10)$ 的绝对积分不变量•

证明 $\mathrm{d}\Omega = 0$, $\boldsymbol{X}\lrcorner\Omega = 0$(见定理 1.1), $\mathrm{L}_X\Omega = \boldsymbol{X}\lrcorner\mathrm{d}\Omega + \mathrm{d}(\boldsymbol{X}\lrcorner\Omega) = 0$, 即 Ω 是 $\boldsymbol{X}$ 的不变形式, 故是 $\boldsymbol{X}$ 的绝对积分不变量•

定理 1.12 $\omega = p_j\mathrm{d}x^j - H\mathrm{d}t$ 是 Hamilton 向量场

$$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j$$

的相对积分不变量即 Poincar_Cartan 积分不变量•

证明 结论已在命题 1.9 中, 再简述如下:

$$\boldsymbol{X}\lrcorner\omega = -H + p_j\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}p_j\wedge\mathrm{d}x^j - \left(\frac{\partial H}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j\right)\wedge\mathrm{d}t,$$

$$\boldsymbol{X}\lrcorner\mathrm{d}\omega = \frac{\partial H}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x^j}\mathrm{d}t + \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}t = 0•$$

由定理 1.7 ω 是 $\boldsymbol{X}$ 的相对积分不变量• 且有

$$\oint_{\gamma}\omega = \oint_{\sigma_t(\gamma_0)}\omega = \oint_{\gamma_0}\sigma_t^*\omega = \int_{\gamma_0}\omega, \tag{20}$$

其中 γ_0 是 T^*N 中一不自相交的光滑闭曲线, σ_t 是 $\boldsymbol{X}$ 的流•

定理 1.13 ω 是 $\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \xi^j\partial/\partial x^j + \eta^j\partial/\partial p_j \in \mathscr{X}^r(T^*N)$ 的相对积分不变量, 则 $\boldsymbol{X}$ 是 Hamilton 向量场

$$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j•$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_X\omega = {}& \frac{\partial H}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j - \xi^j\mathrm{d}p_j - \xi^j\frac{\partial H}{\partial x^j}\mathrm{d}t + \eta^j\mathrm{d}x^j - \\ & \eta^j\frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}t - \mathrm{d}H + \mathrm{d}(p_j\xi^j) = \\ & \eta^j\mathrm{d}x^j - \xi^j\mathrm{d}p_j - \left(\xi^j\frac{\partial H}{\partial x^j} + \eta^j\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}(p_j\xi^j),\end{aligned}$$

于是 $\omega = p_j\mathrm{d}x^j - H\mathrm{d}t$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的相积分不变量, 则

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\gamma}\omega = \oint_{\gamma}\mathrm{L}_X\omega = \oint_{\gamma}\eta^j\mathrm{d}x^j - \xi^j\mathrm{d}p_j - \left(\xi^j\frac{\partial H}{\partial x^j} + \eta^j\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\mathrm{d}t•$$

上式右边的 1_形式是某函数 $f\in C^k(T^*N, R)$ 的全微分即是恰当 1_形式, 故

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t = \eta^j\mathrm{d}x^j - \xi^j\mathrm{d}p_j - \left(\xi^j\frac{\partial H}{\partial x^j} + \eta^j\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\mathrm{d}t,$$

即 $$\eta^j = \frac{\partial f}{\partial x^j},\quad \xi^j = -\frac{\partial f}{\partial p_j},\quad -\frac{\partial f}{\partial t} = \xi^j\frac{\partial H}{\partial x^j} + \eta^j\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial t} = \mathrm{L}_X H$$

且 $$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t - \frac{\partial f}{\partial p_j}\partial/\partial x^j + \frac{\partial f}{\partial x^j}\partial/\partial p_j,$$

但 $\mathrm{L}_X f = \partial f/\partial t$, 故 $\mathrm{L}_X(f + H) = 0$, $f = -H + \mathrm{const}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = -\frac{\partial H}{\partial x^j},\quad \frac{\partial f}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t},$$

故 $$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j•$$

命题 1.14 1_形式 $\omega = p_j\mathrm{d}x^j - H\mathrm{d}t \in \mathscr{F}^1(T^*N)$ 是向量场 $\boldsymbol{X}\in\mathscr{X}^r(T^*N)$ 的相对积分不变量, 若且仅若 $\boldsymbol{X}$ 是 Hamilton 向量场

$$X = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j .$$

定理 1. 15　$k = 1, 2, \cdots, n$, $\Omega^k = \underbrace{\Omega \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{k}$ 是Hamilton向量场(10)的绝对积分不变量, 其中 $\Omega = -\mathrm{d}\omega$ 如(8), $\forall H \in C^k(T^* N, R)$.

此结论由定理1. 11及Lie导数的性质得到.

定理 1. 16　$H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \in C^k(T^* N, R)$ 是向量场

$$X = \partial/\partial t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j$$

决定的非平稳的运动系统的总能量, 则不守恒.

事实上

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = L_X H = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 .$$

对每一固定的 $t \in I \subset R^1$, $\mathrm{d}t = 0$,

$$\omega = p_j \mathrm{d}x^j \in \mathscr{F}^1(T^* M_t) \tag{21}$$

是纤维 $\Pi^{-1}(t) = M_t^n$ 的余切丛$T^* M_t$上的1_形式.

定理 1. 17　$\forall H \in C^k(T^* M_t, R)$, ω 是Hamilton向量场

$$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial/\partial x^j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial/\partial p_j \in \mathscr{X}^r(T^* M_t) \tag{22}$$

的相对积分不变量——Poincar 相对积分不变量. 反之 ω 是向量场$X \in \mathscr{X}^r(T^* M_t)$ 的相对积分不变量, 则 X 必是由一函数$H \in C^k(T^* M_t, R)$ 决定的Hamilton向量场.

证明　如前, $\Omega = -\mathrm{d}\omega$, σ_t 是X的流, γ_0 是 $T^* M_t$ 中的闭回路, $\gamma = \sigma_t(\gamma_0)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_\gamma \omega = \oint_\gamma L_X \omega = \oint_\gamma X \lrcorner \mathrm{d}\omega = -\oint_\gamma \mathrm{d}H = 0,$$

即 ω 是$X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的相对积分不变量. 反之 ω 是$X = \xi^j\partial/\partial x^j + \eta^j\partial/\partial p_j \in \mathscr{X}^r(T^* M_t)$ 的相对积分不变量, 则

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_\gamma \omega = \oint_\gamma X \lrcorner \mathrm{d}\omega = \oint_\gamma \eta^j \mathrm{d}x^j - \xi^j \mathrm{d}p_j .$$

积分号下的1_形式是某函数$f \in \mathscr{F}^0(T^* M_t)$ 的全微分, 即$X \lrcorner \mathrm{d}\omega = \eta^j \mathrm{d}x^j - \xi^j \mathrm{d}p_j = -\mathrm{d}f$ 恰当, 故 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}f)$ 是Hamilton场.

命题 1. 18　ω 是X的相对积分不变量若且仅若X是Hamilton向量场.

定理 1. 19　$\Omega = -\mathrm{d}\omega$ 是Hamilton向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的绝对积分不变量, $\forall H \in C^k(T^* M_t, R)$.

结论已在命题1. 9中.

特别

$$\mu = \frac{\Omega^n}{n!} = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}p_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}p_n \tag{23}$$

是Riemann流形 M^n 的余切丛$T^* M$ 的"体积元", 则 $\forall H \in C^k(T^* M)$, μ 是Hamilton向量场 $X = \Omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的绝对积分不变量, 即

$$\int_\Sigma \mu = \int_{\Sigma_0} \mu . \tag{24}$$

这就是Liouvill定理, 其中 Σ_0 是 $T^* M$ 的 $2n$ 维区域, $\Sigma = \sigma_t(\Sigma_0)$.

对 $\boldsymbol{V} = \partial/\partial t + \boldsymbol{V} = \partial/\partial t + v^j \dfrac{\partial}{\partial x^j} \in \mathscr{X}^r(N)$,

$\boldsymbol{V}^\flat = \mathrm{d}t + \boldsymbol{V}^\flat = \mathrm{d}t + g_{jk}v^j\mathrm{d}x^k = \mathrm{d}t + p_k\mathrm{d}x^k \in \mathscr{F}^1(N)$.

定义映射 $\mathscr{L}: TN \to T^*N,\ (t, x^j, 1, v^j) \mapsto (t, x^k, 1, p_k)$

且 $$\mathscr{L}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}^\flat,\quad p_k = g_{jk}v^j, \tag{25}$$

$T = \langle \boldsymbol{V}^\flat, \boldsymbol{V}\rangle/2$ 或 $T = \langle \boldsymbol{V}^\flat, \boldsymbol{V}\rangle/2 = \langle \boldsymbol{V}^\flat, \boldsymbol{V}\rangle/2 + 1/2$ 是动能, $U = U(t, \boldsymbol{x})$ 是势能, 则

$$E = T + U = T + U + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{V}^\flat, \boldsymbol{V}\rangle + U + \frac{1}{2} \in C^k(TN, R) \tag{26}$$

是质点在 N 中运动的总机械能.

$$H = E\circ\mathscr{L}^{-1}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}g^{kj}p_kp_j + U(t, \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} \in C^k(T^*N, R) \tag{27}$$

是 Hamilton 函数, 总机械能的另一表示. 由它决定的 Hamilton 向量场是

$$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + g^{lj}p_j\partial/\partial x^l - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^l}p_kp_j + \frac{\partial U}{\partial x^l}\right)\partial/\partial p_l \in \mathscr{X}^r(T^*N), \tag{28}$$

相应的 Hamilton 方程是

$$\dot t = 1,\quad \dot x^s = g^{sj}p_j,\quad \dot p_s = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^s}p_kp_j - \frac{\partial U}{\partial x^s}, \tag{29}$$

得到

$$\begin{aligned}
\ddot x^s &= \frac{\mathrm{d}\dot x^s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g^{sj}}{\partial x^l}v^lp_j + g^{sj}\dot p_j = \\
&\frac{\partial g^{sj}}{\partial x^l}g_{kj}v^lv^k + g^{sj}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ar}}{\partial x^j}g_{ba}v^bg_{mr}v^m - \frac{\partial U}{\partial x^j}\right) = \\
&-g^{sj}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}v^lv^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ra}}{\partial x^j}g^{ar}g_{mr}v^rv^m - \frac{\partial U}{\partial x^j}\right) = \\
&-\frac{1}{2}g^{sj}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right)v^lv^k - g^{sj}\frac{\partial U}{\partial x^j} = \\
&-\Gamma^s_{kl}v^kv^l - g^{js}\frac{\partial U}{\partial x^j},
\end{aligned}$$

即 $$\ddot x^s + \Gamma^s_{kl}\dot x^k\dot x^l = -g^{js}\frac{\partial U}{\partial x^j}, \tag{30a}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}t} + \Gamma^s_{kl}v^kv^l = -g^{js}\frac{\partial U}{\partial x^j}, \tag{30b}$$

$$\frac{\partial v^s}{\partial t} + \frac{\partial v^s}{\partial x^l}v^l + \Gamma^s_{kl}v^kv^l = -g^{js}\frac{\partial U}{\partial x^j}. \tag{30c}$$

它们是 Newton 方程

$$\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{d}U^\# \tag{31}$$

在纤维 $\Pi^{-1}(t) = M^n_t,\ t \in I \subset R^1$, 中的坐标表示. (31) 也可表为

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}^\flat}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^\flat - \frac{1}{2}\mathrm{d}\langle \boldsymbol{V}^\flat, \boldsymbol{V}\rangle = -\mathrm{d}U. \tag{32}$$

若运动是平稳的, $\dot x^j = v^j(\boldsymbol{x})$, 则用(30a)或(30b), 若运动是非平稳的 $\dot x^j = v^j(t, \boldsymbol{x})$, 则必须用(30c).

当 $M^n = R^n$ 或 M^n 局部平坦时, $g_{jk} = \delta_{jk}$, $\Gamma^s_{kl} = 0$. $s, j, k, s, l = 1, 2, \ldots, n$. 这时 $p_j = v^j$,

$$V^\flat = \mathrm{d}t + v^j \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}t + p_j \mathrm{d}x^j. \tag{33}$$

Hamilton 向量场

$$X = \partial/\partial t + v^l \partial/\partial x^l - \frac{\partial U}{\partial x^l}\partial/\partial p_l \in \mathscr{X}^r(T^* N) \tag{34}$$

也是 Lagrange 向量场

$$X = \partial/\partial t + v^l \partial/\partial x^l - \frac{\partial U}{\partial x^l}\partial/\partial v^l \in \mathscr{X}^r(TN). \tag{35}$$

Hamilton 方程

$$\dot t = 1, \dot x^j = v^j, \dot v^j = -\frac{\partial U}{\partial x^j} \tag{36}$$

也是 Newton 方程

$$\ddot x^j = -\frac{\partial U}{\partial x^j} \tag{37}$$

或
$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^s} v^s = -\frac{\partial U}{\partial x^j}. \tag{37$'$}$$

由此可见, 构形空间是 Riemann 流形的非平稳的质点或系统的运动可看作 Newton_Riemann 时空中相应的运动. Poincar _Cartan 形式

$$\omega = V^\flat - H\mathrm{d}t$$

或
$$\omega = V^\flat - H\mathrm{d}t = V^\flat - \left(H - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t,$$

二者等效. 综上述有:

定理 1.20　具有单位质量 $(m = 1)$ 的质点在势场 $U(t, \boldsymbol{x})$ 下以速度 $V = v^j(t, \boldsymbol{x})\partial/\partial x^j$ 于 M^n 中运动时, 可看作以速度 $V = \partial/\partial t + V$ 在 $N = R^1 \times M^n$ 中运动, 其加速度

$$\frac{\mathbf{D} V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{D} V}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial t} + v^s \frac{\partial v^j}{\partial x^s} + \Gamma^j_{ls} v^l v^s\right)\partial/\partial x^j.$$

运动方程

$$\frac{\mathbf{D} V}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{d}U^\#, \qquad \forall t \in I \subset R^1$$

在 $\Pi^{-1}(t) = M^n_t$ 中,

即
$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + v^s \frac{\partial v^j}{\partial x^s} + \Gamma^j_{ls} v^l v^s = -g^{kj}\frac{\partial U}{\partial x^k}. \tag{38}$$

总能量

$$E = T + U = \frac{\langle V^\flat, V\rangle}{2} + U(t, \boldsymbol{x}), \tag{39}$$

那么
$$\oint_\gamma V^\flat - H\mathrm{d}t \tag{40}$$

是解方程(31)的速度场 V 也是Hamilton向量场(28) X 的相对积分不变量, 其中 $H = E \circ \mathscr{L}^{-1}$, γ 是 $T^* N$ 中的闭回路. $M^n = R^n$ 时, (40) 变为

$$\oint_\gamma v^j \mathrm{d}x^j - E(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\mathrm{d}t, \tag{41}$$

这时 γ 是 TN 或 $T^* N$ 中的闭回路.

定理 1.21　对每一固定的 $t \in I \subset R^1$, $\mathrm{d}t = 0$, 在纤维 $\Pi^{-1}(t) = M^n_t$ 中

$$\oint_\gamma V^\flat \tag{42}$$

是Newton 方程

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = \mathrm{d}F \text{ 或 } \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{43}$$

的解 $\boldsymbol{V}$ 或 Hamilton 向量场

$$\boldsymbol{X} = g^{lj}p_j\frac{\partial}{\partial x^l} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^l}p_kp_j - \frac{\partial F}{\partial x^l}\right)\partial/\partial p_l$$

的相对积分不变量, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\gamma}\boldsymbol{V}^{\flat} = 0 \cdot \tag{44}$$

$\gamma = \sigma_t(\gamma_0)$, σ_t 是 $\boldsymbol{V}$ 的流, γ_0 是 M_t^n 上的闭回路•

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t^*\boldsymbol{V}^{\flat} = \sigma_t^*\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}^{\flat}}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat}\right) = \sigma_t^*\mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat},\ \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat} = \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat},$$

而 $$\mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\right)\boldsymbol{V}^{\flat} = \left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} + \frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{V}^{\flat},\boldsymbol{V}\rangle}{2} = \mathrm{d}\left(F + \frac{\langle\boldsymbol{V}^{\flat},\boldsymbol{V}\rangle}{2}\right),$$

故 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\gamma}\boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma}\mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat} = \int_{\gamma}\mathrm{d}\left(F + \frac{\langle\boldsymbol{V}^{\flat},\boldsymbol{V}\rangle}{2}\right) = 0 \cdot$$

上述定理等价于

定理 1.22 质点按Newton 方程(43) 运动, 则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\right)\boldsymbol{V}^{\flat} = 0 \cdot \tag{45}$$

定理 1.23 质点按Newton 方程(43) 运动, 则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat} = 0 \cdot \tag{46}$$

本定理利用外微分 d 与 Lie 导数的可交换性: $\mathrm{d}\circ\mathrm{L}_{\boldsymbol{V}} = \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\circ\mathrm{d}$• 定理 1.20~ 1.23 可直接应用于流体力学•

2 应 用

考虑在流体力学中的应用•

设一密度 $\rho(t,\boldsymbol{x})$ 的理想流体在势场 $U(t,\boldsymbol{x})$ 的作用下以速度 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $M^n = R^n$ 中即以速度 $\boldsymbol{V} = \partial/\partial t + \boldsymbol{V}$ 在$N = R^1\times R^n$ 中运动, 从中取出一占有体积元素 $\mu = \mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$ 表面为S 的流体元素, 它受流体其余部分的压力 $p(t,\boldsymbol{x})$, 此流体元素的质量为 $m = \rho\mu$• 它的运动在时空 $N = R^1\times R^n$ 中划出一条曲线称世界线• 运动过程中, 质量守恒, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\mu) = 0$, 于是得到连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V}) = 0 \cdot \tag{47}$$

运动方程是Newton 方程, 即 Euler 方程

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = -\mathrm{d}U - \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \cdot \tag{48}$$

若密度 ρ 是压力p 的函数$\rho = f(p)$, 则令

$$U = U + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \tag{49}$$

便得 $$\left(\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = -\mathrm{d}U, \tag{50}$$
那么积分
$$J = \oint_{\gamma} \boldsymbol{V}^{\flat} - E\mathrm{d}t \tag{51}$$
是 Hamilton 向量场
$$\boldsymbol{X} = \partial/\partial t + v^{j}\partial/\partial x^{j} - \frac{\partial U}{\partial x^{j}}\partial/\partial p_{j} \tag{52}$$
的相对积分不变量． 由定理 1.21, 对每一固定的 $t \in I \subset R^{1}$, $\mathrm{d}t = 0$, 在 $N = R^{1} \times R^{n}$ 的纤维 $\Pi^{1}(t) = R_{t}^{n}$ 中, (51) 变为
$$J_{1} = \oint_{\gamma} \boldsymbol{V}^{\flat}, \tag{53}$$
γ 是 R_{t}^{n} 中的闭回路, 即 R_{t}^{n} 中的紧致 1_流形． γ_{0} 在 $\boldsymbol{V}$ 的流 σ_{t} 作用下在此固定的时刻 $t \in I$ 时的曲线 $\gamma = \sigma_{t}(\gamma_{0})$． $\boldsymbol{V}^{\flat} = v^{j}(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}x^{j}$． J_{1} 是速度环量且, 由 (50)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\gamma} \boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma} \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma}\left[\left(\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} + \frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{V}^{\flat}, \boldsymbol{V}\rangle}{2}\right] = \oint_{\gamma}\left(\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = 0. \tag{54}$$
它表明时间 t 变化时, $\gamma = \sigma_{t}(\gamma_{0})$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的流 σ_{t} 也就是在 $\boldsymbol{V} = \partial/\partial t + \boldsymbol{V}$ 的流 σ_{t} 的作用下, 在 R^{n} 中也就是 $N = R^{1} \times R^{n}$ 中运动变形时, 积分 J_{1} 不变而 J_{1} 是环流量, 故有

定理 2.1　Lord Kelvin 环流量定理: 上述流体满足方程 (50), 则速度 $\boldsymbol{V}$ 的环流量 J_{1} 在时间上是常数．

此结论对 $\mathbf{D}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t = 0$ 的运动也成立． (54) 意味
$$J = \oint_{\gamma} \boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma_{0}} \sigma_{t}^{*}\boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma_{0}} \boldsymbol{V}^{\flat} = J_{0}. \tag{55}$$

定理 2.2　Thomsion 环流量守恒定理: 上述理想流体在 R^{n} 中运动满足方程 (50) 时, 其速度 $\boldsymbol{V}$ 在 t_{0} 沿回路 γ_{0} 的速度环量 J_{0} 等于在 t 时沿回路 $\gamma = \sigma_{t}(\gamma_{0})$ 的速度环量 J_{0}．

上述二定理等价于
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\right)\boldsymbol{V}^{\flat} = 0. \tag{56}$$
$\boldsymbol{V}^{\flat}$ 的外微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat}$ 是涡旋． 如前回路 γ_{0} 所界的 2_维曲面是 2_维子流形 Σ_{0}, 则 $\gamma = \sigma_{t}(\gamma_{0})$ 所界的曲面是 $\Sigma = \sigma_{t}(\Sigma_{0})$． 由 Stokes 定理,
$$\int_{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma}\boldsymbol{V}^{\flat} = \oint_{\gamma_{0}}\boldsymbol{V}^{\flat} = \int_{\Sigma_{0}}\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat}. \tag{57}$$

定理 2.3　Helmholtz's 定理: 上述流体以满足方程 (50) 的速度 $\boldsymbol{V}$ 在 R^{n} 中流动时, 此运动流体的速度 $\boldsymbol{V}$ 的涡旋, 越过由随此流体运动的 $\gamma = \sigma_{t}(\gamma_{0})$ 所界的曲面 $\Sigma = \sigma_{t}(\Sigma_{0})$ 的通量 J, 在时间上是常数．

又 $$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\gamma}\boldsymbol{V}^{\flat} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat} = \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat}. \tag{58}$$
定理 2.3 等价于
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_{\boldsymbol{V}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat} = 0. \tag{59}$$

定理 2.4　上述理想流体的涡旋的共同运动时间导数为零, 即涡旋在时间上是常数．

若上述理想流体在 Riemann 流体 M^{n} 中运动看作在时空 $N = R^{1} \times M^{n}$ 中运动, 则运动方程

——Newton_Euler 方程是

$$\left(\frac{\mathbf{D}\,\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = -\,\mathrm{d}U - \frac{1}{\rho\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\mathrm{d}\left(\sqrt{|\boldsymbol{g}|}\,\rho\right)· \tag{60}$$

$|\boldsymbol{g}| = \det(g_{jk})$, g_{jk} 是 Riemann 度量张量· 上述定理2.1～ 2.4不适用, 除非外作用力之合力为零或是某函数 $F \in C^k(N, R)$ 的全微分, 即合力有势·

顺便, 若

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\varphi^{\#} = g^{kj}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\partial/\partial x^j, \tag{61}$$

则 $$\boldsymbol{V}^{\flat} = \mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat} = 0· \tag{62}$$

即若流体的速度场 $\boldsymbol{V}$ 是梯度场, 则无旋, 在单连通区域中速度环量为零· 余略·

[参 考 文 献]

[1] 甘特马赫尔 Φ P. 分析力学[M]. 钟奉俄, 薛问西 译. 北京: 人民教育出版社, 1963, 1—161.

[2] von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North_Holland Publishing Company, 1978.

[3] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[4] Burke W L. Applied Differential Geometry [M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[5] Schutz B F. Geometrical Methods of Mathematical Physics [M]. Bath, Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[6] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics [M]. Orlando, Florida: Acadmic Press Inc, 1985.

[7] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics [M]. New York: Springer_Verlag, 1978.

Dynamics in Newtonian_Riemannian Space_Time(Ⅲ)

ZHANG Rong_ye

(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080, P R China)

Abstract: The Hamiltonian mechanics in Newtonian_Riemannian space_time and its application to hydromechanics are discussed.

Key words: Riemannian manifold; fiber bundle; exterior differential; absolute differential; Lie derivative; invariant form; integral invariant; comoving time derivative