

文章编号: 1000-0887(2001)05-0541-09

# 无锁定的退化的等参壳元\*

章向明, 王安稳, 何汉林

(海军工程大学 基础部, 武汉 430033)

(龙驭球推荐)

摘要: 构造了一个无锁定的 8 节点退化的等参壳元。在自然坐标系中, 对横向剪应变项插值修正使单元满足必要的模式(平移、转动和纯弯曲)以消除“剪切锁定”; 在局部坐标系中, 对薄膜应变插值修正以消除“薄膜锁定”。这样构造的 8 节点单元的刚度矩阵具有正确的秩, 同时具有恰当的零特征值和相应的刚体位移模式。这种单元对大跨厚比情形既无“剪切锁定”又无“薄膜锁定”, 无虚假的零能模式和机构出现, 可用于厚壳和薄壳。

关键词: 退化的等参壳元; 剪切锁定; 薄膜锁定; 有限元

中图分类号: O242 文献标识码: A

## 引 言

退化的等参壳元在工程实际中得到越来越广泛的应用。这种由 Ahmad 等人提出<sup>[1]</sup>的通用的壳单元是在三维等参数单元中强加入某些几何和静力约束后退化成为曲边壳单元, 以适应板、壳结构的分析。

退化的等参壳元用于中厚壳的分析能给出令人满意的结果, 然而, 对于薄壳分析, 当全数值积分规则用于计算刚度矩阵时, 出现“锁定”现象并给出超刚度解。“剪切锁定”产生附加的横向剪应力; “薄膜锁定”产生附加的薄膜应力。有两类方法<sup>[2]</sup>可以消除锁定现象: 1) 隐式方法, 包括节减积分技术<sup>[3]</sup>和选择积分技术<sup>[4, 5]</sup>。2) 显式方法, 对应力或应变的插值方式进行修正以消除附加的应力<sup>[6]</sup>。

节减积分或选择积分技术能大大地改善等参壳元的锁定问题, 然而, 在结构边界强约束时, 特别是单元网格划分稀疏的情况下, 并不能完全克服锁定, 可能仍给出超刚度解; 此外, 结构边界弱约束时, 则会导入单元机构和虚假的零能模式, 这些机构可能一个单元接一个单元地扩展, 最终导致总刚度矩阵秩不足, 进而无解。更危险的情况是单元的近机构状态产生虚假的解。本文采用显式方法修正横向剪应变场和薄膜应变场, 以消除两类“锁定”现象。然后, 单元刚度矩阵用全 Gauss 积分规则计算, 这样构造的单元既无“锁定”又无虚假的零能模式和机构出现。

## 1 常规的退化的等参壳元

在退化的等参壳元中, 对于坐标  $X$ , 整体位移  $u = \{u_x, u_y, u_z\}^T$  和整体转角  $\phi =$

\* 收稿日期: 1998\_10\_26; 修订日期: 2000\_08-18

作者简介: 章向明(1963—), 男, 副教授, 博士。

$\{\phi_x, \phi_y, \phi_z\}^T$  均采用  $C^0$  连续的插值函数

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) X_i, \\ u &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i, \\ \phi &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \phi_i, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\xi, \eta$  为自然坐标,  $n$  是单元节点数,  $N_i$  是对应节点  $i$  的插值函数。

应变在局部坐标系  $(x, y, z)$  中计算。设  $e_x, e_y$  和  $e_z$  是坐标方向的单位矢量, 其中  $e_z$  垂直壳体中面。薄膜应变由下式计算:

$$\epsilon_m = \sum_{i=1}^n B_{mi} \cdot u_i, \quad (2)$$

其中

$$B_{mi} = \begin{bmatrix} N_{i,x} e_x \\ N_{i,y} e_y \\ N_{i,y} e_x + N_{i,x} e_y \end{bmatrix}. \quad (3)$$

曲率的改变为:

$$\epsilon_c = \sum_{i=1}^n B_{ci} \cdot \phi_i, \quad (4)$$

其中

$$B_{ci} = \begin{bmatrix} N_{i,x} e_y \\ -N_{i,y} e_x \\ -N_{i,y} e_y + N_{i,x} e_x \end{bmatrix}. \quad (5)$$

横向剪应变为:

$$\gamma_t = \sum_{i=1}^n [B_{ti} \cdot u_i - N_{ti} \cdot \phi_i], \quad (6)$$

其中

$$B_{ti} = \begin{bmatrix} N_{i,y} e_z \\ N_{i,x} e_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$N_{ti} = \begin{bmatrix} N_i e_x \\ -N_i e_y \end{bmatrix}. \quad (8)$$

当上述列式应用于薄壳时, 随着壳体厚度的减少, 横向剪应变不能消失而退化到 Kirchhoff 薄壳理论的情形, 同时, 薄膜刚度主宰整个单元刚度矩阵也是不合理的, 出现了所谓的“锁定”。

## 2 修正的横向剪应变

对于薄壳, 按薄壳理论其横向剪应变应趋向于零, 即:  $\gamma_t = 0$ , 但当全积分规则用于计算单元刚度矩阵时, 常规的等参壳元出现了超刚度解, 这就是“剪切锁定”。为了消除“剪切锁定”, 可对病态的横向剪应变进行修正。

常规的法向位移的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \mathbf{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \mathbf{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $w$  是壳中面的法向位移,  $w_i = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_z$ . 将其中形函数的导数  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  修正, 改为由其节点

值  $\left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right)_j$ ,  $\left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)_j$  按下式插值得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right)_j L_j(\xi, \eta), \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)_j M_j(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中插值函数  $L_j(\xi, \eta)$  和  $M_j(\xi, \eta)$  的确定将在后面讨论. 修正后的法向位移的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \mathbf{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right)_j L_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_j L_j, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \mathbf{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)_j M_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_j M_j. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

此外, 节点处局部坐标系下的转角分量定义为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\xi} &\equiv \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{t}_{\xi} = \boldsymbol{\phi} \cdot \left( \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right)_j \times \mathbf{e}_z \right) = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{X}_i \times \mathbf{e}_z) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j = \frac{1}{a} \phi_{\xi j}, \\ \phi_{\eta} &\equiv \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{t}_{\eta} = \boldsymbol{\phi} \cdot \left( \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r} \right)_j \times \mathbf{e}_z \right) = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{X}_i \times \mathbf{e}_z) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j = \frac{1}{b} \phi_{\eta j}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中  $ds = a d\xi$ ,  $dr = b d\eta$ ;  $s, r$  是  $\xi, \eta$  方向的曲线坐标;  $a, b$  是与单元尺寸有关的常数, 以及

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\xi j} &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{X}_i \times \mathbf{e}_z) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j, \\ \phi_{\eta j} &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{X}_i \times \mathbf{e}_z) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

修正转角分量, 也按形函数的导数相同的方式进行插值

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\xi} &= \sum_{j=1}^n \phi_{\xi j} L_j(\xi, \eta), \\ \phi_{\eta} &= \sum_{j=1}^n \phi_{\eta j} M_j(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$\phi_{\xi}$ ,  $\phi_{\eta}$  将分别与  $\phi_{\xi j}$ ,  $\phi_{\eta j}$  具有相同的插值方式

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\xi} &= \sum_{j=1}^n \phi_{\xi j} L_j(\xi, \eta), \\ \phi_{\eta} &= \sum_{j=1}^n \phi_{\eta j} M_j(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

横向剪应变可写成

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\xi r} &= \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} - \phi_{\xi} &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - \phi_{\xi} \right), \\ \gamma_{\eta r} &= \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} - \phi_{\eta} &= \frac{1}{b} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} - \phi_{\eta} \right). \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(10)和式(14)中的插值函数  $L_j(\xi, \eta)$ ,  $M_j(\xi, \eta)$  应在所有无剪应变的状态下, 式(16)表示的横向剪应变为零。一般  $L_j(\xi, \eta) \neq \delta_{ij}$ ,  $M_j(\xi, \eta) \neq \delta_{ij}$ , 同时  $\phi_{\xi}(\xi, \eta) \neq (\phi_{\xi})_i$ ,  $\phi_{\eta}(\xi, \eta) \neq (\phi_{\eta})_i$ 。

考虑下列无横向剪应变的状态:

### 1 刚体平移

此状态下,  $u_i = u$  是常数,  $\phi = \phi = \mathbf{0}$ , 原始形状函数  $N_i(\xi, \eta) = 1$ , 因此有  $\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} =$

$\mathbf{0}$ ,  $\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \mathbf{0}$ , 式(11)和式(15)都为零, 式(16)中的横向剪应变为零。

### 2 刚体转动

此状态下,  $\phi = \phi$  是常数,  $u_i = \phi \times X_i$  代入式(11):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_j &= \mathbf{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n \phi \times X_i \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j = \sum_{i=1}^n \phi \cdot (X_i \times \mathbf{e}_z) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j = \phi_{\xi}, \\ \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_j &= \mathbf{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n \phi \times X_i \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j = \sum_{i=1}^n \phi \cdot (X_i \times \mathbf{e}_z) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j = \phi_{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(11)和式(15)中的节点值相等, 式(16)中的横向剪应变为零。

### 3 纯弯曲

在局部坐标系  $(x, y, z)$  中, 考虑  $x, y$  平面内法向位移是下列二列式

$$u = (\alpha^2 + \beta xy + \gamma y^2) \mathbf{e}_z, \quad (18)$$

相应的转角为

$$\phi = -(2\alpha + \beta y) \mathbf{e}_y + (\beta x + 2\gamma y) \mathbf{e}_x. \quad (19)$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为任意常数, 式(18)代入式(11)有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha^2 + \beta x_i y_i + \gamma y_i^2) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j L_j, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha^2 + \beta x_i y_i + \gamma y_i^2) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j M_j. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(19)代入式(13)和(15)有:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\xi} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x_i(2\alpha\gamma_j + \beta y_j) + y_i(\beta x_j + 2\gamma y_i)] \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j L_j, \\ \phi_{\eta} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x_i(2\alpha\gamma_j + \beta y_j) + y_i(\beta x_j + 2\gamma y_i)] \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j M_j. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

令式(20)与式(21)相等可得如下结果:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2x_i x_j) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j L_j &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_i - x_i y_j - x_j y_i) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j L_j &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i^2 - 2y_i y_j) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)_j L_j &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 - 2x_i x_j) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j M_j &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_i - x_i y_j - x_j y_i) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j M_j &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i^2 - 2y_i y_j) \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)_j M_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

由式(10)和式(22)可以确定插值函数  $L_j(\xi, \eta), M_j(\xi, \eta)$ 。

8节点单元正常的插值函数  $N_i(\xi, \eta)$  为:

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= 0.25(\xi^2 \eta_i + \xi \eta_i^2 + \xi^2 + \eta^2 + \xi \eta_i - 1) \quad (i = 1-4), \\ N_i(\xi, \eta) &= 0.5(1 + \eta_i - \xi^2 - \eta \xi^2) \quad (i = 5, 7), \\ N_i(\xi, \eta) &= 0.5(1 + \xi_i - \eta^2 - \xi \eta^2) \quad (i = 6, 8), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中  $\xi_i = \xi/\xi_i$  和  $\eta_i = \eta/\eta_i$ , 单元节点序号如图1所示。形函数对  $\xi$  的

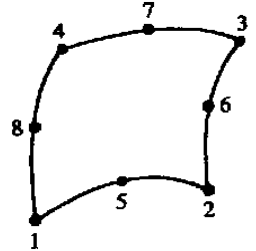


图1 8节点单元节点序号

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= 0.25 \left[ 2\xi \eta_i + \frac{\eta_i^2}{\xi} + 2\xi + \frac{\eta_i}{\xi} \right] \quad (i = 1-4), \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= 0.5(-2\xi - 2\eta \xi) \quad (i = 5, 7), \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= 0.5 \left[ \frac{1}{\xi} - \frac{\eta^2}{\xi} \right] \quad (i = 6, 8). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

将上式代入式(10)可得:

$$\left. \begin{aligned} -3L_1 + L_2 - L_5 + L_6 - L_8 &= 0.5(-2\xi \eta - \eta^2 + 2\xi + \eta), \\ -L_1 + 3L_2 + L_5 + L_6 - L_8 &= 0.5(-2\xi \eta - \eta^2 + 2\xi - \eta), \\ 3L_3 - L_4 + L_7 + L_6 - L_8 &= 0.5(2\xi \eta - \eta^2 + 2\xi + \eta), \\ L_3 - 3L_4 - L_7 + L_6 - L_8 &= 0.5(2\xi \eta - \eta^2 + 2\xi - \eta), \\ 2L_1 - 2L_2 - L_6 + L_8 &= -\xi + \xi \eta, \quad L_6 + L_8 = 1 - \eta^2, \\ -2L_3 + 2L_4 - L_6 + L_8 &= -\xi - \xi \eta, \quad -L_6 - L_8 = -1 + \eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

上列方程组并非全部独立, 通过加、减运算可得5个独立的方程, 方程的解可用三个参量函数  $A_1(\xi, \eta), A_2(\xi, \eta)$  和  $A_3(\xi, \eta)$  表示为:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 0.25(\xi \eta + A_1 - A_2 - A_3), \quad L_2 = 0.25(-\xi \eta + A_1 - A_2 + A_3), \\ L_3 &= 0.25(\xi \eta + A_1 + A_2 + A_3), \quad L_4 = 0.25(-\xi \eta + A_1 + A_2 - A_3), \\ L_5 &= 0.5(-\eta + \eta^2 - A_1 + A_2), \quad L_6 = 0.5(1 + \xi - \eta^2 - A_3), \\ L_7 &= 0.5(\eta + \eta^2 - A_1 - A_2), \quad L_8 = 0.5(1 - \xi - \eta^2 + A_3). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

同理, 可得用三个参量函数  $B_i(\xi, \eta)$  表示的插值函数  $M_i(\xi, \eta)$  为:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0.25(\xi\eta + B_1 - B_2 - B_3), \\ M_2 &= 0.25(-\xi\eta + B_1 + B_2 - B_3), \\ M_3 &= 0.25(\xi\eta + B_1 + B_2 + B_3), \\ M_4 &= 0.25(-\xi\eta + B_1 - B_2 + B_3), \\ M_5 &= 0.5(1 - \eta - \xi^2 + B_3), M_6 = 0.5(\xi + \xi^2 - B_1 - B_2), \\ M_7 &= 0.5(1 + \eta - \xi^2 - B_3), M_8 = 0.5(-\xi + \xi^2 - B_1 + B_2) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

将式(26)和式(27)代入式(22)得到六个含参变量  $A_i, B_i$  的方程, 但要显式形式解出这六个参变量是不可能的, 好在我们感兴趣的只是函数  $L_j(\xi, \eta)$  和  $M_j(\xi, \eta)$  在积分点处的值, 这样我们很容易地建立数值计算参变量  $A_i, B_i$  的代数方程组, 继而求出参变量  $A_i, B_i$  和插值函数  $L_j(\xi, \eta)$  和  $M_j(\xi, \eta)$ 。

### 3 修正的薄膜应变

对于薄壳, 尽管薄膜应变很重要但它不应主宰单元刚度矩阵, 为了消除“薄膜锁定”, 应对薄膜应变进行修正。薄膜应变应在局部直角坐标系中修正。

在局部坐标系下, 面内位移可以写成:

$$u = u_0 + z\theta_x, \quad v = v_0 + z\theta_y, \quad (28)$$

上式中  $u_0$  和  $v_0$  是单元的中面位移, 对于 8 节点二次等参元,  $u_0$  和  $v_0$  应是  $x$  和  $y$  的函数 ( $z = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0(1, x, y, \overline{xy}, (x)^2, (y)^2, (x)^2y, x(y)^2), \\ v_0 &= v_0(1, x, y, \overline{xy}, (x)^2, (y)^2, (x)^2y, x(y)^2) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

薄膜应变项可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{mx} &= u_{0,x} = u_{0,x}(1, x, y, \overline{xy}, (y)^2), \\ \epsilon_{my} &= v_{0,y} = v_{0,y}(1, x, y, \overline{xy}, (x)^2), \\ \frac{1}{2}\epsilon_{mxy}^{(a)} &= v_{0,x} = v_{0,x}(1, x, y, \overline{xy}, (y)^2), \\ \frac{1}{2}\epsilon_{mxy}^{(b)} &= u_{0,y} = u_{0,y}(1, x, y, \overline{xy}, (x)^2) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

局部坐标系下薄膜应变场, 应具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{mx} &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4\overline{xy} + a_5(y)^2, \\ \epsilon_{my} &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4\overline{xy} + b_5(x)^2, \\ \frac{1}{2}\epsilon_{mxy}^{(a)} &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4\overline{xy} + c_5(y)^2, \\ \frac{1}{2}\epsilon_{mxy}^{(b)} &= d_1 + d_2x + d_3y + d_4\overline{xy} + d_5(x)^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$\epsilon_{mx}$  和  $\mathcal{Z}^{-1}\epsilon_{mxy}^{(a)}$  在  $x$  方向是线性的, 在  $y$  方向是二次的;  $\epsilon_{my}$  和  $\mathcal{Z}^{-1}\epsilon_{mxy}^{(b)}$  在  $y$  方向是线性的, 在  $x$  方向是二次的。修正应变场的取样点的位置为<sup>[7]</sup>:  $\epsilon_{mx}$  和  $\mathcal{Z}^{-1}\epsilon_{mxy}^{(a)}$  的 5 个取样点是在  $\eta = -1$  和  $\eta = +1$  两条线上的两个高斯点 ( $\xi = \pm 3^{-1/2}$ ), 外加单元的中心点;  $\epsilon_{my}$  和  $\mathcal{Z}^{-1}\epsilon_{mxy}^{(b)}$  的 5 个取样点是在  $\xi = -1$  和  $\xi = +1$  两条线上的两个高斯点 ( $\eta = \pm 3^{-1/2}$ ), 外加单元的中心点。

修正的薄膜应变场将由原应变场在取样点的值按下式插值得到:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{mx} &= \sum_{i=1}^r R_i(\xi, \eta) \varepsilon_{mx}^i, \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{mxy}^{(a)} &= \sum_{i=1}^r R_i(\xi, \eta) \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_{mxy}^i \right], \\ \varepsilon_{my} &= \sum_{i=1}^r S_i(\xi, \eta) \varepsilon_{my}^i, \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{mxy}^{(b)} &= \sum_{i=1}^r S_i(\xi, \eta) \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_{mxy}^i \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

上式中插值函数  $R_i(\xi, \eta) = S_i(\eta, \xi)$  为:

$$\left. \begin{aligned} R_1(\xi, \eta) &= S_1(\eta, \xi) = \frac{1}{4} \left[ \eta + \frac{\xi}{a} \right] (1 + \eta), \\ R_2(\xi, \eta) &= S_2(\eta, \xi) = \frac{1}{4} \left[ \eta - \frac{\xi}{a} \right] (1 + \eta), \\ R_3(\xi, \eta) &= S_3(\eta, \xi) = (1 - \eta) (1 + \eta), \\ R_4(\xi, \eta) &= S_4(\eta, \xi) = \frac{1}{4} \left[ -\eta + \frac{\xi}{a} \right] (1 - \eta), \\ R_5(\xi, \eta) &= S_5(\eta, \xi) = \frac{1}{4} \left[ -\eta - \frac{\xi}{a} \right] (1 - \eta), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

上式中  $a = 3^{-1/2}$ , 最终面内剪应变  $\varepsilon_{mxy} = \frac{1}{2} \varepsilon_{mxy}^{(a)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{mxy}^{(b)}$  在两个方向都是二次的。

## 4 数值分析

### 4.1 特征值分析

对单元的刚度矩阵进行特征值分析可以发现它只有 6 个零特征值, 每一个特征值对应一个刚体位移模式, 因而所构造的 8 节点单元无假的零能模式, 也不出现机构。

### 4.2 “剪切锁定”测试

中心受横向集中力的四边简支方板用来测试单元的“剪切锁定”行为, 板的尺寸:  $a \times a = 10 \times 10$ , 弹性模量:  $E = 210 \times 10^9$ , 泊松比:  $\nu = 0.3$ , 根据结构的对称性取其  $1/4$  划分  $2 \times 2$  有单元网格, 中心处挠度  $w$  与解析解的无量纲化结果列于表 1 中, 可以看出, 随着跨厚比的增加, 本文构造的单元有很好的收敛性, 而常规的单元在  $a/t \geq 10^3$  时已给出较差的解。

表 1 剪切锁定测试结果\*

网格	$a/t$	本文单元	常规单元
$2 \times 2$	$10^2$	1.008	0.951
$2 \times 2$	$10^3$	1.007	0.834
$2 \times 2$	$10^4$	1.007	0.840

表 2 薄膜锁定测试结果

模型	$w_c$
QUAD8RF	140.338
QUAD8RR	165.538
本文单元	163.863
精确解	164.240

\* 结果用解析解无量纲化

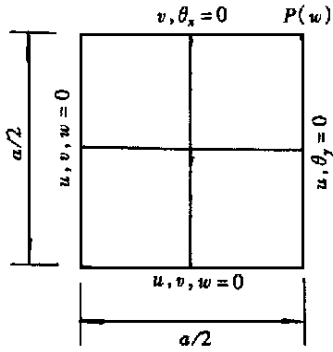


图2 剪切锁定测试网格划分

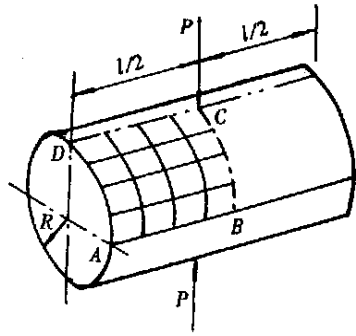


图3 对径受压圆柱壳参数

$$E = 10.5 \times 10^6, \nu = 0.313,$$

$$t = 0.094, R = 4.953,$$

$$l = 10.35, P = 100.0$$

### 4.3 “薄膜锁定”测试

图3所示的对径受压圆柱壳用来测试单元的“薄膜锁定”行为,圆柱壳在其两端部简支并受到方向相反的两集中力作用,取其1/8用 $4 \times 4$ 网格进行计算,计算结果列于表2中,用节减积分规则计算剪切刚度、全积分规则计算薄膜刚度(QUAD8RF)得到了超刚度解,用节减积分规则计算剪切刚度和薄膜刚度(QUAD8RR)得到了较精确的解,本文单元所得的解几乎与节减积分得到的解相同。

## 5 结 论

用修正应变场构造的8节点单元既无“锁定”问题又不出现机构,可用于厚的或薄的壳体结构的分析。本文构造的单元具有常规单元相同的自由度,只需在现有的程序上略加改动即可实现,是一种具有实际意义的单元。

### [参 考 文 献]

- [1] Ahmad S, Irons B M, Zienkiewicz O C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1970, 2(2): 419—451.
- [2] Belytschko T, Stolarski H, Liu W K, et al. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1985, 51(1—3): 221—258.
- [3] Zieniewicz O C, Taylor R C, Too J M. Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1971, 3(2): 275—290.
- [4] Hughes T J R, Talor R L, Kanoknukulchai W. A simple and efficient finite element for plate bending [J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1977, 11(10): 1529—1547.
- [5] MacNeal R H. A simple quadrilateral shell element[J]. Comput & Structures, 1978, 8(2): 175—183.
- [6] Huang H C, Hinton E. A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation[J]. Engrg Comput, 1984, 1(3): 369—379.
- [7] Hinton E, Huang H C. A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields[J]. Comput & Structures, 1986, 23(3): 409—431.



# Locking-Free Degenerated Isoparametric Shell Element

ZHANG Xiang\_ming, WANG An\_wen, HE Han\_lin

(Department of Basic Courses, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, P R China)

**Abstract:** An 8\_noded locking\_free degenerated isoparametric shell element is presented. A revised interpolation for shear strain terms was constructed in natural co\_ordinate system such that all necessary modes ( translation, rotation and constant curvature) are preserved, which can be used to eliminate shear locking. A revised interpolation for membrane strains was produced in the local Cartesian co\_ordinate system to overcome membrane locking behavior. The new 8\_noded element has the proper rank, with the requisite number of zero eigenvalues each associated with a rigid mode. The element does not exhibit membrane or shear locking for large span\_thickness ratio. The element does not form element mechanisms or extra spurious zero energy modes. Therefore, it can be used for both thin and thick shells.

**Key words:** degenerated isoparametric shell element; shear locking; membrane locking; finite element method