应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 05_0504_15

基于正弦和余弦函数的小波滤波器的统一解析构造*

李建平[1], 唐远炎[2], 严中洪[1], 张万萍[3]

(1. 后勤工程学院 国际小波分析应用研究中心, 重庆 400016; 2. 香港浸会大学 计算机科学系;
3. 成都电子科技大学 应用数学系, 成都 610054)

(陈正汉推荐)

摘要: 首次提出用正弦函数和余弦函数解析构造任意长度的紧支集正交小波滤波系数· 首先给出了对 $N = 2^{k-1}$ 时(k 个参数) 的解析结构, 其次给出了 $N = 2k$ 时正交小波滤波器的统一构造方法· 此后验证了著名的 Daubechies 小波滤波器的构成参数, 并验证了一些被广泛使用的著名小波分析滤波器, 所有这些滤波器容易用一组参数直接计算出来· 小波滤波器的解析构造使得在应用中动态选择小波基变得极其容易, 这一结果必将在小波理论、应用数学及模式识别等领域产生十分重要的作用·

关 键 词: 小波分析; 滤波器; 三角函数; 解析构造
中图分类号: O242.29 文献标识码: A

1 引言及问题提出

1.1 背景介绍

小波分析与应用已十分深入, 特别是紧支集上的小波变换已广泛应用在信号处理, 如图像压缩、声音处理、文字识别等领域, 但小波基或小波滤波器的构造却是一件十分艰苦的工作, 不仅多尺度方程:

$$\varphi(x) = \sum h_n \varphi(2x - n) \qquad (n \in Z) \tag{1}$$

复杂, 多尺度分析的生成元也很不好寻找, 其中 h_n, $n \in Z$ 也就是要寻找的小波滤波系数·

著名数学家 Daubechies[1] 对较小的 N, 已给出了部分小波滤波系数· 在信号自适应处理中, 有必要弄清这些系数的来历, 以及怎样选择适合特殊信号的小波基是十分重要的· 众所周知, 小波基的构造取决于小波基滤波系数的构造, 由于在紧支集上正交小波基滤波系数只有有限个不为零(设为 $2N$), 它们在数字计算中特别有用, 因此本文仅局限于紧支集上正交小波基的研究[2~9]·

1.2 紧支集上正交小波基条件

* 收稿日期: 2000_05_19; 修订日期: 2001_01_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69903012, 69682011); 后勤工程学院科学研究基金资助项目
作者简介: 李建平(1964—) , 男, 湖南祁阳人, 教授, 博士, 双项士, 国际小波分析应用研究中心主任, 已出版学术著作 6 部, 发表论文 60 余篇, 研究领域为小波分析、分形理论、神经网络与信号信息处理及排队论与电子商务. Email: jpli2222@yahoo.com.

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h_i = \sqrt{2}. \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i} = \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} h_0\ h_1\ h_2\ \cdots h_{2N-1} & & \\ & h_0\ h_1\ h_2\ \cdots h_{2N-1} & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & h_0\ h_1\ h_2\ \cdots\ h_{2N-1} \end{bmatrix}_{N\times 2N} \text{为行正交矩阵}. \tag{4}$$

实际上还有一个条件:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h_i h_i = 1. \tag{5}$$

条件(2)应改为:

$$\max \sum_{i=0}^{2N-1} h_i (\text{关于式}(3),(4),(5)\text{的最大值}).$$

因为在实际应用中 h_n 是一个低通滤波器, 当一组常数信号通过它时(卷积)能量和应最大, 这时小波二分之一抽样才具有最好的信息压缩效率.

(4)中的行正交实际上是卷积

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h_i h_{i+2q} = 0 \qquad (q = 1, 2, 3 \cdots);$$

成立. 其中当 $i+2q$ 超过 $2N-1$ 时 $h_{i+2q} = 0$

既然小波滤波系数计算比较困难, 在应用中要动态选择小波基就更难了, 能否找出满足这一结果的小波滤波器系数将对小波理论及应用、模式识别等研究领域产生十分积极的作用. 能否找出满足小波正交性条件滤波器的解析形式呢? 它有没有统一的形式? 这就是本文的主要目的.

Daubechies 小波及 Coifman 小波、Beylkin 小波等均满足(2)~(4)条件. 在很多实际应用中(2),(3)可以不满足, 如 Vaidyanathan 小波. 本文我们将讨论它们的解析构造问题.

2　$N = 1$、$N = 2$ 滤波器的解析构造

当 $N = 1$ 时, 滤波器有两个系数. 因为(5), 并记参数角为 α, 我们可设:

$$h_0 = \cos\alpha;\quad h_1 = \sin\alpha$$

即可, 显然若(2),(3)成立, 则 $\alpha = \pi/4$, 此时即Haar小波. 反过来对任意参数 α, (4),(5)自然成立. 但(2),(3)不成立.

定理1　对 $N = 2$ 时满足正交小波基条件(2), (3), (4), (5)的小波滤波系数 $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ 的充要条件是存在参数角 α, β 使得下列等式

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4},$$

$$h_0 = \cos\alpha\cos\beta,\quad h_1 = \sin\alpha\cos\beta,\quad h_2 = -\sin\alpha\sin\beta,\quad h_3 = \cos\alpha\sin\beta,$$

成立.

当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{\pi}{12}$, 得到

$$h_0 = 0.482\,963,\ h_1 = 0.836\,516,\ h_2 = 0.224\,144,\ h_3 = -0.129\,410.$$

这就是所谓 $N=2$ 时 Daubechies 的小波滤波系数• 显然该组公式还可以给出无穷多种类似的滤波系数•

证明 1) 充分性 此时很容易验证(2),(3),(5)• 而 $N=2$ 时(4) 的正交性条件变为:

$$h_0h_2+h_1h_3=0;$$

将上述公式代入

$$h_0h_2=-\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta;$$

$$h_1h_3=\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta;$$

显然 $h_0h_2+h_1h_3=0$ 成立• 证毕•

2) 必要性 根据 $N=2$ 时(4) 的正交性条件: $h_0h_2+h_1h_3=0$;

不妨改为 $\dfrac{-h_1}{h_0}=\dfrac{h2}{h_3}$, 必然存在一参数角 α, 使

$$\tan\alpha=\frac{-h_1}{h_0}=\frac{h_2}{h_3},$$

并不妨设

$$h_0=R_1\cos\alpha,\quad h_1=-R_1\sin\alpha,\quad h_2=R_2\sin\alpha,\quad h_3=R_2\cos\alpha•$$

又由条件(5) 即

$$h_0h_0+h_1h_1+h_2h_2+h_3h_3=1,$$

得到:

$$R_1R_1+R_2R_2=1,$$

因此设 $R_1=\cos\beta$, $R_2=\sin\beta$, $\beta\in(-\infty,\infty)$, 即有

$$h_0=\cos\alpha\cos\beta,\quad h_2=-\sin\alpha\sin\beta,\quad h_1=\sin\alpha\cos\beta,\quad h_3=\cos\alpha\sin\beta•$$

显然此时

$$h_0+h_2=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta),$$

$$h_1+h_3=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)•$$

由条件(3) 有 $h_0+h_2=h_1+h_3$, 即 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$ 得到 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}+n\pi\ (n\in Z)$;

此时 $h_0+h_1+h_2+h_3$ 取值为: $-\sqrt{2},\sqrt{2}$ 两种情形, 又 $h_0+h_1+h_2+h_3=\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\cos\left[(\alpha+\beta)-\dfrac{\pi}{4}\right]$; 它取最大值, 只需取 β 满足:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+2n\pi\qquad(n\in Z)•$$

且最大值为

$$h_0+h_1+h_2+h_3=\sqrt{2}•$$

此时 $h_0+h_2=h_1+h_3=\sqrt{2}/2$ 自动成立, 因此(2),(3) 条件满足了• 不妨取 $n=0$, 必要性得证•

以下我们忽约 $2n\pi$ 或 $n\pi$ 带来的符号影响, 只考虑一个主值的作用• 至此定理 1 得证•

但要构造 $N=3, 4, 5\ldots$, 如果用以上推导方法就很困难了, 但很容易想到:
对任意自然数 N 的小波基滤波系数的总和满足如下形式:

$$\sum_{i=0}^{2N-1}h_i=\cos\alpha_s+\sin\alpha_s,\quad\sum_{i=0}^{N-1}h_{2i}=\cos\alpha_s,\quad\sum_{i=0}^{N-1}h_{2i+1}=\sin\alpha_s•$$

且若(3)成立必然要求 $a_s = \pi/4$, 此处 a_s 是一组参数角的和; 当 $N = 2$ 时

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

它们分别是偶数项 h_0, h_2 与奇数项 h_1, h_3. 因此完全有理由认为: $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ 与 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ 的完全分解产生 8 项, 它们将构成 $N = 4$ 的小波基滤波系数. 后面将看到该结论是完全正确的.

3　$N = 2^{k-1}$ 滤波器的解析构造

3.1　$N = 2^{k-1}$ 时的一般结论

我们先定义分解规则:

规则 1　(严格顺序分解): 称

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

表示的分解形式为一个严格顺序. 并分别用偶数、奇数表示, 如 cos 分解项为偶数项 $h_0, h_2, \ldots$, sin 分解项为奇数项 $h_1, h_3, \ldots$ 之类的记号. 相反称

$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta,\quad \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

为一个逆序分解.

规则 2　(参数角顺序组合): 对多个和角的形式, 称

$$\alpha+\beta+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma),$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta = \alpha+(\beta+\gamma+\theta),$$

这类组合为后组合方式, 而称

$$\alpha+\beta+\gamma = (\alpha+\beta)+\gamma,$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta = (\alpha+\beta+\gamma)+\theta.$$

为前组合方式.

下面先对 $k > 1, N = 2^{k-1}$ 时, 对 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_k)$ 与 $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_k)$ 进行参数角后组合及严格顺序的完全分解, 作一个更简单的描述, 记分解项分别为向量:

$$\boldsymbol{C}(k) = (h_0, h_2, h_4, \ldots, h_{2N-2}), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{S}(k) = (h_1, h_3, h_5, \ldots, h_{2N-1}). \tag{7}$$

则 $\cos(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_k)$, $\sin(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$ 含有 $k+1$ 个参数角的分解项分别为向量

$$\boldsymbol{C}(k+1) = \left\{\cos\alpha C(k), -\sin\alpha S(k)\right\}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{S}(k+1) = \left\{\sin\alpha C(k), \cos\alpha S(k)\right\}. \tag{9}$$

这个结论是容易用初等数学证明的.

引理 1　对任意一组参数角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_k (k > 1, N = 2^{k-1})$, 对 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_k)$, $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_k)$, 进行后组合有严格顺序的完全分解, 即由(6) ~ (9) 所述方法得到的项:

$$\boldsymbol{C}(k) = \left\{h_0, h_2, h_4, \ldots, h_{2N-2}\right\},$$

$$\boldsymbol{S}(k) = \left\{h_1, h_3, h_5, \ldots, h_{2N-1}\right\},$$

满足(4)中的行正交性条件.

证明　用数学归纳法证明. 下面对参数 k 进行归纳.

1. 对 $k = 2$ 时 $N = 2$, 定理 1 已证·

2. 假设对 k 即 $N = 2^{k-1}$ 时成立, 即

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h_i h_{i+2q} = 0 \qquad (q = 1, 2, \cdots, N-1)\cdot$$

也即是

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i} h_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1} h_{2i+1+2q} = 0 \qquad (q = 1, 2, \cdots, N-1)\cdot$$

注意到 $q > N-1$ 时 $h_{i+2q} = 0$, 因此

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h_i h_{i+2q} = 0 \qquad (q = 1, 2, \cdots, 2N-1)\cdot$$

现证 $M = 2^{(k+1)-1}$, 即有 $k+1$ 个参数角也成立, 此时 $M = 2N$·

设参数角为 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$, 记 $\cos(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k)$, $\sin(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k)$ 的分解项分别为向量:

$$\boldsymbol{C} = \{H_0, H_2, H_4, \cdots, H_{2M-2}\},$$
$$\boldsymbol{S} = \{H_1, H_3, H_5, \cdots, H_{2M-1}\}\cdot$$

则按(8)、(9), 有

$$\boldsymbol{C} = \{\cos\alpha(h_0, h_2, \cdots, h_{2N-2}), -\sin\alpha(h_1, h_3, \cdots, h_{2N-1})\}, \tag{10}$$
$$\boldsymbol{S} = \{\sin\alpha(h_0, h_2, \cdots h_{2N-2}), \cos\alpha(h_1, h_3, \cdots h_{2N-1})\}\cdot \tag{11}$$

下面需要证明

$$\sum_{i=0}^{2M-1} H_i H_{i+2q} = 0 \qquad (q = 1, 2, \cdots, M-1) \tag{12}$$

成立·

首先:

$$\sum_{i=0}^{2M-1} H_i H_{i+2q} = \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2i+1+2q} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2(i+q)} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2(i+q)+1}\cdot$$

$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2(i+q)}$ 的含义是分别将偶数项向后平移 q 个分量与自身相乘, 奇数项同理·

注意到(10), (11) 与 $M = 2N$ 得: 对任意 $q = 1, 2, \cdots 2N-1$,

1) 当 $1 \leqslant q \leqslant N-1$ 时, 我们作一图解:

$$\{\cos\alpha(h_0, h_2, \cdots h_{2q} \cdots, h_{2N-2}), -\sin\alpha(h_1, h_3, \cdots, h_{2N-1})\}$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \cdots$$
$$\{\cos\alpha(h_0, h_2, \cdots h_{2q} \cdots h_{2N-2}), -\sin\alpha(h_1, h_3, \cdots h_{2N-1})\}$$

$$\{\sin\alpha(h_0, h_2, \cdots h_{2q} \cdots h_{2N-2}), \cos\alpha(h_1, h_3, \cdots h_{2N-1})\}$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \cdots$$
$$\{\sin\alpha(h_0, h_2, \cdots h_{2q} \cdots h_{2N-2}), \cos\alpha(h_1, h_3, \cdots h_{2N-1})\}$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i+2q} = \cos\alpha\cos\alpha \sum_{i=0}^{N-1-q} h_{2i} h_{2i+2q} - \cos\alpha\sin\alpha \sum_{i=0}^{q-1} h_{2i+1} h_{2N-2q+2i} +$$

$$\sin\alpha\sin\alpha\sum_{i=0}^{N-1-q}h_{2i+1}h_{2i+2q},$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}H_{2i+1}H_{2i+1+2q}=\sin\alpha\sin\alpha\sum_{i=0}^{N-1-q}h_{2i}h_{2i+2q}+$$

$$\cos\alpha\sin\alpha\sum_{i=0}^{q-1}h_{2i+1}h_{2N-2q+2i}+$$

$$\cos\alpha\cos\alpha\sum_{i=0}^{N-1-q}h_{2i+1}h_{2i+1+2q}.$$

其中注意到 $\cos\alpha\sin\alpha\sum_{i=0}^{q-1}h_{2i+1}h_{2N-2q+2i}$ 是由卷积产生的交叉项,

当 $i>N-1-q$ 时, $2i+2q>2(N-1)$, $2i+2q>2(N-1)+1$, 于是有 $h_{2i+2q}=0$, $h_{2i+1+2a}=0$

因此

$$\sum_{i=0}^{M-1}H_{2i}H_{2i+2q}+\sum_{i=0}^{M-1}H_{2i+1}H_{2i+1+2q}=$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}h_{2i}h_{2i+2q}+\sum_{i=0}^{M-1}h_{2i+1}h_{2i+1+2q}.$$

根据归纳假设结论(12)成立.

2) $N\leqslant q\leqslant 2N-1$ 时, 根据(10), (11) 有:

$$\sum_{i=0}^{M-1}H_{2i}H_{2i+2q}=-\cos\alpha\sin\alpha\sum_{i=0}^{2N-1-q}h_{2i}h_{2i+1+2q-2N},$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}H_{2i+1}H_{2i+1+2q}=\cos\alpha\sin\alpha\sum_{i=0}^{2N-1-q}h_{2i}h_{2i+1+2q-2N}.$$

此时(12)仍成立.

因此引理证毕.

定理2　对任意一组参数角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ ($k>1$, $N=2^{k-1}$), 对 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$, $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$, 进行后组合有严格顺序的完全分解, 即由(6) ~ (9) 所述方法得到的项, 若所有参数角之和为 $\pi/4$, 则这些项构成满足正交小波基条件(2), (3), (4), (5) 的小波滤波系数.

在下面对 $N=2^{k-1}$ 证明定理2的正确性.

证明　因为所有参数角之和为 $\pi/4$, 又 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$ 的分解项构成滤波系数的偶数项, $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$ 的分解项构成滤波系数的奇数项. 所以正交性条件(2), (3) 自然成立. 根据归纳法以及(8), (9) 也容易得到(5) 的结论, 因此, 仅需证明(4) 的行正交性. 而行正交性正是引理1所得到的结论.

3.2　对 $N=2^{k-1}$ 的特殊情形

下面就含有几个参数(设为 k 个)的情形作一些具体讨论.

注意, 分解、组合、合并的顺序都是极其重要的.

对 $k=3$ 的讨论

1) 首先构造 $N=2^{k-1}$ 的小波基滤波系数, 对 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ 作参数角后组合严格顺序完全分解:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+(\beta+\gamma))=\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)=$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma,$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+(\beta+\gamma))=\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)=$$
$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

并按相应顺序记 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ 的分解项为偶数项得:

$$h_0=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,\quad h_2=-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$
$$h_4=-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\quad h_6=-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

同理,按相应顺序记 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ 的分解项为奇数项得:

$$h_1=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma,\ h_3=-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\ h_5=\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma,\ h_7=\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

使

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi/4,$$

则 $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7$ 构成 $N=4$ 时的小波基滤波系数.

2) 可以证明,对偶数项与奇数项分别进行中心相邻合并,即将 h_4 合并到 h_2 上, h_5 合并到 h_3 上,其合并过程为

h_0	h_2 h_4	h_6	h_1	h_3 h_5	h_7
↓	↘ ↙	↓	↓	↘ ↙	↓
(不变)	(相加和作为 h_2)	(作业 h_4)	(不变)	(相加和作为 h_3)	(作为 h_5)

可得到:

$$h_0=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,\ h_2=-\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta,\ h_4=-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma,$$
$$h_1=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma,\ h_3=\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta,\ h_5=\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

则 $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$ 构成 $N=3$ 时小波基的 6 个滤波系数,证明此处略. 同时当

$$\alpha=\pi/2.66295,\quad \beta=-\pi/6.28518,\quad \gamma=\pi/2.7792,$$

得到 $N=3$ 时 Daubechies 基滤波系数:

$$h_0=0.332671,\quad h_1=0.806892,\quad h_2=0.459878,$$
$$h_3=0.135011,\quad h_4=-0.085441,\quad h_5=0.0352263.$$

如果使 $\gamma=0$, 并将 0 元素去掉,将得到 $N=2$ 时的小波基滤波系数公式,即定理 1.

4 一般滤波器 ($N=2k$) 的解析构造

4.1 分解方法定义

递归分解法:

$N=1$ 时 $\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$ 不用分解,即 $h_0=\cos\alpha$, $h_1=\sin\alpha$.

下面先当 $N\geqslant 1$ 时,对 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$ 与 $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$ 分解作一个简单描述,记分解项分别为向量:

$$\boldsymbol{C}(N)=(h_0, h_2, h_4, \cdots, h_{2N-2});\tag{13}$$
$$\boldsymbol{S}(N)=(h_1, h_3, h_5, \cdots, h_{2N-1});\tag{14}$$

则 $\cos(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$, $\sin(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$ 含有 $N+1$ 个参数角的分解项分别为向量

$$\boldsymbol{C}(N+1)=\left\{\cos\alpha(\boldsymbol{C}(N),0)-\sin\alpha(0,\boldsymbol{S}(N))\right\};\tag{15}$$
$$\boldsymbol{S}(N+1)=\left\{\sin\alpha(\boldsymbol{C}(N),0)+\cos\alpha(0,\boldsymbol{S}(M))\right\};\tag{16}$$

引理 2　记 $\boldsymbol{C}(N)$、$\boldsymbol{S}(N)$ 的各分量之和分别为 $\sum\boldsymbol{C}(N)$、$\sum\boldsymbol{S}(N)$ 则

$$\sum\boldsymbol{C}(N)=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N),\tag{17}$$

$$\sum\boldsymbol{S}(N)=\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N).\tag{18}$$

证明

1) 当 $N=1$ 时, $\cos\alpha_1$ 与 $\sin\alpha_1$ 不用分解, 即 $h_0=\cos\alpha_1$, $h_1=\sin\alpha_1$. (4) 显然成立.

2) 假设对 $N>1$ 时结论成立. 即

$$\sum\boldsymbol{C}(N)=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N),$$

$$\sum\boldsymbol{S}(N)=\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N).$$

现证对 $N+1$ 成立. 设 $M=N+1$, 设参数角为 α, α_1, α_2, …, α_N, 即证

$$\sum\boldsymbol{C}(M)=\cos(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_N),$$

$$\sum\boldsymbol{S}(M)=\sin(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_N).$$

根据(15), (16)

$$\sum\boldsymbol{C}(M)=\cos\alpha\sum\boldsymbol{C}(N)-\sin\alpha\sum\boldsymbol{S}(N),$$

$$\sum\boldsymbol{S}(M)=\sin\alpha\sum\boldsymbol{C}(N)+\cos\alpha\sum\boldsymbol{S}(N),$$

容易根据归纳假设得到结论. 引理得证.

4.2　一般性结论

引理 3　对任意一组参数角 α_1, α_2, …, α_N 对 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$, $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$ 按(13) ~ (16) 所述的递归分解法得到的项:

$$\boldsymbol{C}(N)=\left\{h_0, h_2, h_4, \cdots, h_{2N-2}\right\};\ \boldsymbol{S}(N)=\left\{h_1, h_3, h_5, \cdots, h_{2N-1}\right\},$$

满足(4) 中的行正交性条件.

证明　用数学归纳法证明. 下面对参数 N 进行归纳.

1. 对 $N=1$, (4) 自然成立.

2. 假设对 $N>1$ 时成立, 即

$$\sum_{i=0}^{2N-1}h_ih_{i+2q}=0\qquad(q=1,2,\cdots,N-1).$$

也即是
$$\sum_{i=0}^{N-1}h_{2i}h_{2i+2q}+\sum_{i=0}^{N-1}h_{2i+1}h_{2i+1+2q}=0\qquad(q=1,2,\cdots,N-1).$$

注意到 $q>N-1$ 时 $h_{i+2q}=0$, 因此

$$\sum_{i=0}^{2N-1}h_ih_{i+2q}=0\qquad(q=1,2,\cdots,2N-1).$$

现证 $M=N+1$, 即有 $N+1$ 个参数角也成立.

设参数角为 α, α_1, α_2, …, α_N, 记 $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$, $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)$ 的分解项分别为向量:

$$\boldsymbol{C}(M)=\left\{H_0, H_2, H_4, \cdots, H_{2M-2}\right\};\ \boldsymbol{S}(M)=\left\{H_1, H_3, H_5, \cdots, H_{2M-1}\right\};$$

则按(15), (16) 有

$$\boldsymbol{C}(M)=\left\{\cos\alpha(h_0, h_2, \cdots, h_{2N-2}, 0)-\sin\alpha(0, h_1, h_3, \cdots, h_{2N-1})\right\};\tag{19}$$

$$\boldsymbol{S}(M)=\left\{\sin\alpha(h_0, h_2, \cdots, h_{2N-2}, 0)+\cos\alpha(0, h_1, h_3, \cdots, h_{2N-1})\right\};\tag{20}$$

下面需要证明

$$\sum_{i=0}^{2M-1} H_i H_{i+2q} = 0 \qquad (q = 1, 2, \cdots, M-1), \tag{21}$$

成立•

首先:

$$\sum_{i=0}^{2M-1} H_i H_{i+2q} = \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2i+1+2q} =$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2(i+2q)} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2(i+2q)+1} •$$

$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2(i+2q)}$ 的含义是分别将偶数项向后平移 q 个分量与自身相乘, 奇数项同理• 注意到(19), (20) 与 $M = N+1$, $h_{2N} = 0$, 同时记 $h_{-1} = 0$, 则 $C(M)$, $S(M)$ 的一般项可分别表示为:

$$\cos\alpha h_{2i} - \sin\alpha h_{2i-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, N),$$

$$\sin\alpha h_{2i} + \cos\alpha h_{2i-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, N)•$$

故

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i+2q} = \sum_{i=0}^{M-1} (\cos\alpha h_{2i} - \sin\alpha h_{2i-1})(\cos\alpha h_{2i+2q} - \sin\alpha h_{2i-1+2q}) = \sum_{i=0}^{M-1} (\cos^2\alpha h_{2i} h_{2i+2q} - \cos a \sin\alpha (h_{2i} h_{2i-1+2q} + h_{2i-1} h_{2i+2q}) + \sin^2\alpha h_{2i-1} h_{2i-1+2q})$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2i+1+2q} = \sum_{i=0}^{M-1} (\sin\alpha h_{2i} + \cos\alpha h_{2i-1})(\sin\alpha h_{2i+2q} + \cos\alpha h_{2i-1+2q}) = \sum_{i=0}^{M-1} (\sin^2\alpha h_{2i} h_{2i+2q} + \cos a \sin\alpha (h_{2i} h_{2i-1+2q} + h_{2i-1} h_{2i+2q}) + \cos^2\alpha h_{2-1} h_{2i-1+2q})•$$

当 $2i + 2q > 2(N-1)$, $2i + 2q > 2(N-1) + 1$ 有 $h_{2i+2q} = 0$, $h_{2i+1+2q} = 0$• 因此

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2i+1+2q} = \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i} h_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1} h_{2+1+2q} \qquad * * *$$

根据归纳假设, 结论(21) 成立• 因此引理 3 证毕•

定理 3 对任意一组参数角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$, $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$ 按(13) ~ (16) 所述的递归法分解法得到的项, 若所有参数角之和为 $\pi/4$, 则这些项构成满足正交小波基条件(2), (3), (4), (5) 的小波滤波系数•

证明 因为所有参数角之和为 $\pi/4$, 又 $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$ 的分解项构成小波基滤波系数的偶数项, $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$ 的分解项构成奇数项• 所以小波正交基条件(2), (3) 自然成立• 根据归纳法以及(15), (16) 也容易得到(5) 的结论• 因此仅需证明的是(4) 的行正交性• 而行正交性正是引理 3 所得到的结论•

引理 4 若 $N > 0$, $M = N + 1$,

$$\boldsymbol{C}(M) = (H_0, H_2, H_4, \cdots, H_{2M-2}),$$
$$\boldsymbol{S}(M) = (H_1, H_3, H_5, \cdots, H_{2M-2}),$$

且 $\boldsymbol{C}(M)$, $\boldsymbol{S}(M)$ 构成满足正交条件(4) 的滤波系数• 则存在一角度 α 使得

1) 以下两式有意义:

$$(\boldsymbol{C}(N), 0) = \left\{\cos\alpha\boldsymbol{C}(M) + \sin\alpha\boldsymbol{S}(M)\right\}; \tag{22}$$
$$(0, \boldsymbol{S}(N)) = \left\{-\sin\alpha\boldsymbol{C}(M) + \cos\alpha\boldsymbol{S}(M)\right\}; \tag{23}$$

即(15)、(16) 与(22)、(23) 互为逆变换;

2) 当 $(H_0, H_1) \neq 0$ 时, $h_0 \neq 0$;

3) $\boldsymbol{C}(N)$, $\boldsymbol{S}(N)$ 仍构成满足正交条件(4) 的滤波系数;

4) 若 $\boldsymbol{C}(M)$, $\boldsymbol{S}(M)$ 满足(5), 则 $\boldsymbol{C}(N)$, $\boldsymbol{S}(N)$ 仍满足(5)•

证明　1) 证明(22), (23) 有意义, 即证明(15), (16) 的逆变换成立• 根据正交条件(4) 有

$$\sum_{i=0}^{2M-1} H_i H_{i+2q} = 0,$$

若取 $q = M - 1$ 则正交条件变为

$$H_1{}^* H_{2M-1} + H_0{}^* H_{2M-2} = 0•$$

即 $(H_0, H_1) \perp (H_{2M-2}, H_{2M-1})$•

取一单位向量记为 $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 使 $\boldsymbol{v} // (H_0, H_1)$, 则 $\boldsymbol{v} \perp (H_{2M-2}, H_{2M-1})$ 即有

$$\cos\alpha H_{2M-2} + \sin\alpha H_{2M-1} = 0,$$

又 $(-\sin\alpha, \cos\alpha) \perp \boldsymbol{v}$, $(H_0, H_1) // \boldsymbol{v}$, 则$(-\sin\alpha, \cos\alpha) \perp (H_0, H_1)$ 即有

$$-\sin\alpha H_0 + \cos\alpha H_1 = 0•$$

因此(22), (23) 有意义, 此时容易证明(15), (16) 成立•

2) 由(22), 同时因为 $\boldsymbol{v} // (H_0, H_1)$, $(H_0, H_1) \neq 0$, 得

$$h_0 = \cos\alpha H_0 + \sin\alpha H_1 = \boldsymbol{v}(H_0, H_1) \neq 0$$

3) 证明 $C(N)$, $S(N)$ 仍构成满足正交条件(4)•

因为(22), (23) 有意义, 此时(15), (16) 成立, 因此定理 3 证明中的(* * *) 成立, 即

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2i+1+2q} = \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+2q} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1} h_{2i+1+2q}$$ 也即 $$\sum_{i=0}^{2N-1} h_i h_{i+2q} = 0•$$ 所以

$\boldsymbol{C}(N)$, $\boldsymbol{S}(N)$ 仍构成满足正交条件(4)•

4) 因为(22), (23) 有意义, 此时(15), (16) 成立, 取 $q = 0$, 容易知道定理 3 证明中的(* * *) 仍成立, 又 $\boldsymbol{C}(M)$, $\boldsymbol{S}(M)$ 满足(5)• 即有:

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_{2i} H_{2i} + \sum_{i=0}^{M-1} H_{2i+1} H_{2i+1} = \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i} h_{2i} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1} h_{2i+1} = 1•$$

引理 4 得证•

推论 1　对 $N = 2$ 时满足正交小波基条件(4), (5) 的小波滤波系数 $\left\{h_0, h_1, h_2, h_3\right\}$ 的充要条件是存在参数角 α, β 使得下列等式

$$h_0 = \cos\alpha\cos\beta,\ h_1 = \sin\alpha\cos\beta,$$
$$h_2 = -\sin\alpha\sin\beta,\ h_3 = \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = h_0 + h_2,\ \sin(\alpha + \beta) = h_1 + h_3•$$

成立•

根据引理 4 存在一角度 α, 使得

$$(\boldsymbol{C}(1), 0) = \{\cos\alpha(h_0, h_2) + \sin\alpha(h_1, h_3)\},$$
$$(\boldsymbol{C}(1), 0) = \{\cos\alpha(h_0, h_2) + \sin\alpha(h_1, h_3)\};$$

此时 $\boldsymbol{C}(1)$, $\boldsymbol{S}(1)$ 分别只有一元素, 分别记为 c, s. 根据满足(5)

$$c^2 + s^2 = 1.$$

存在一参数角 β, 使

$$c = \cos\beta, \quad s = \sin\beta.$$

因此根据(15), (16)

$$(h_0, h_2) = \cos\alpha(\cos\beta, 0) - \sin\alpha(0, \sin\beta),$$
$$(h_1, h_3) = \sin\alpha(\cos\beta, 0) + \cos\alpha(0, \sin\beta),$$

所以推论 1 得证.

引理 5　若 $N > 0$

$$\boldsymbol{C}(N) = \{h_0, h_2, h_4, \cdots, h_{2N-2}\};$$
$$\boldsymbol{S}(N) = \{h_1, h_3, h_5, \cdots, h_{2N-2}\},$$

且 $\boldsymbol{C}(N)$, $\boldsymbol{S}(N)$ 构成满足正交条件(4) 与(5) 的滤波系数, 则存在一组参数角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使得 $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$ 与 $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$ 按(13) ~ (16) 所述的递归分解法得到的项来分别表示 $\boldsymbol{C}(N)$, $\boldsymbol{S}(N)$.

证明　当 $N = 2$ 时即推论1 的结论, 当 $N > 2$ 时反复利用引理4, 同时注意到(15)、(16) 与(22)、(23) 互为逆变换这一事实即可.

定理 4　定理 3 的逆命题成立.

根据引理5, 若存在一组参数角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使引理5结论成立, 同时(2) ~ (3) 成立, 则 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \pi/4$

4.3　$N = 1, 2, 3, 4, \cdots$ 的计算讨论

$$C(1) = \cos\alpha,$$
$$S(1) = \sin\alpha,$$
$$C(2) = \cos\beta(C(1), 0) - \sin\beta(0, S(1)) = (\cos\beta\cos\alpha, -\sin\beta\sin\alpha),$$
$$S(2) = \sin\beta(C(1), 0) + \cos\beta(0, S(1)) = (\sin\beta\cos\alpha, \cos\beta\sin\alpha),$$
$$C(3) = \cos\gamma(C(2), 0) - \sin\gamma(0, S(2)) =$$
$$(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, -\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta, -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma),$$
$$S(3) = \sin\gamma(C(2), 0) + \cos\gamma(0, S(2)) =$$
$$(\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha, \cos(\alpha+\gamma)\sin\beta, \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha),$$
$$C(4) = \cos\theta(C(3), 0) - \sin\theta(0, S(3)) =$$
$$(\cos\theta\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha, -\cos\theta\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta - \sin\theta\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$
$$-\cos\theta\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha - \sin\theta\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta, -\sin\theta\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha),$$
$$S(4) = \sin\theta(C(3), 0) + \cos\theta(0, S(3)) =$$
$$(\sin\theta\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha, -\sin\theta\sin(\theta+\gamma)\sin\beta + \cos\theta\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$
$$-\sin\theta\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\theta\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta, \cos\theta\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha).$$

推论 2　对 $N = 3$ 时满足正交小波基条件(4), (5) 的小波滤波系数 $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ 的充要条件是存在参数角 α, β, γ 使得下列等式

$$h_0 = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \quad h_1 = \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$

$$h_2 = -\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta,\ h_3 = \cos(\alpha+\gamma)\sin\beta,$$
$$h_4 = -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma,\ h_5 = \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = h_0 + h_2 + h_4,\ \sin(\alpha+\beta+\gamma) = h_1 + h_3 + h_5,$$

成立•

证明略•

推论 3　对 $N = 4$ 时满足正交小波基条件 (4), (5) 的小波滤波系数 $\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ 的充要条件是存在参数角 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 便得下列等式

$$h_0 = \cos\theta\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$
$$h_1 = \sin\theta\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$
$$h_2 = -\cos\theta\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta - \sin\theta\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$
$$h_3 = -\sin\theta\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta + \cos\theta\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha,$$
$$h_4 = -\cos\theta\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha - \sin\theta\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta,$$
$$h_5 = -\sin\theta\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\theta\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta,$$
$$h_6 = -\sin\theta\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha,\ h_7 = \cos\theta\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\theta) = h_0 + h_2 + h_4 + h_6,\ \sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta) = h_1 + h_3 + h_5 + h_7,$$

成立•

证明略•

显然可以如此进行下去…, 从而得到任意参数个数的小波滤波器的分解公式•

5　小波滤波器及参数角计算实例

根据第 4 节所述的算法, 我们可以反演出 Daubechies 滤波器所对应的参数角•

表 1　Daubechies 部分滤波器所对应的参数角表

参数 N	参数角表	滤波器系数
$N = 2$	$\pi/3$	0.482 962 913 145　0.836 516 303 738　0.224 143 868 042　−0.129 409 522 551
	$-\pi/12$	
$N = 3$	−0.499 841 3	0.332 670 552 950,　0.806 891 509 311,　0.459 877 502 118 −0.135 011 020 010,　−0.085 441 273 882,　0.035 226 291 882
	0.105 496 3	
	1.179 743 1	
$N = 4$	0.253 706 5	0.230 377 813 309,　0.714 846 570 553,　0.630 880 767 930,　−0.027 983 769 417, −0.187 034 811 719,　0.030 841 381 836,　0.032 883 011 667,　−0.010 597 401 785,
	−0.045 967 7	
	−0.681 370 9	
	1.259 030 3	
$N = 5$	−0.132 405 3	0.160 102 397 974,　0.603 829 269 797,　0.724 308 528 438,　0.138 428 145 901, −0.242 294 887 066,　−0.032 244 869 585,　0.077 571 493 840, −0.006 241 490 213,　−0.12580 751 999,　0.003 335 725 285,
	0.020 831 9	
	0.401 726 0	
	−0.816 369 4	
	1.311 615 0	

续表 1

参数 N	参数角表	滤波器系数
$N=6$	0.069 885 9 −0.009 658 1 −0.238 393 4 0.532 750 8 −0.918 187 2 1.340 001	0.111 540 743 335 0, 0.494 623 890 398, 0.751 133 908 021, 0.315 250 351 709, −0.226 264 693 965, −0.129 766 867 567, 0.097 501 605 587, 0.027 522 865 530, −0.031 582 039 318, 0.000 553 842 201, 0.004 777 257 511, −0.001 077 301 085,
$N=7$	−0.037 016 3 0.004 543 4 0.141 195 9 −0.347 055 5 0.643 607 6 −0.996 810 4 1.346 933 3	0.077 852 054 085, 0.396 539 319 482, 0.729 132 090 846, 0.469 782 287 405, −0.143 906 003 929, −0.224 036 184 994, 0.071 309 219 267, 0.080 612 609 151, −0.038 029 936 935, −0.016 574 541 631, 0.012 550 998 556, 0.000 429 577 973, −0.001 801 640 704, −0.000 353 713 800
$N=8$	0.019 603 1 −0.002 158 9 −0.083 101 3 0.224 435 6 −0.449 161 3 0.736 175 5 −1.058 989 5 1.398 595 0	0.054 415 842 243, 0.312 871 590 914, 0.675 630 736 297, 0.585 354 683 654, −0.015 829 105 256, −0.284 015 542 962, 0.000 472 484 574, 0.128 747 426 620, −0.017 369 301 002, −0.044 088 253 931, 0.013 981 027 917, 0.008 746 094 047, −0.004 870 352 993, −0.000 391 740 373, 0.000 675 449 406, −0.000 117 476 784

同理, 根据第 4 节所述的算法, 我们可以反演出 Wickerhauser, Vaidyanathan, Coifman, Beylkin 等人在文献[3, 4, 5]中构造的正交滤波器所对应的参数角, 列于表 2•

我们设了一个非常方便的软件, 可迅速简单地计算出任意个参数角的小波滤波器, 如图 1 所示, 是一个含有 $N=500$ 参数角(随即产生的), 1 000 个滤波系数的图形方式显示结果• 我们给出的数据或计算公式, 使得在应用中动态选择小波基变得极其容易, 这一结果必将在小波理论及应用、流体力学计算、流体湍流分析、模式识别等领域产生十分重要的作用•

表 2

Coifman18	0.003 793 512 864	−0.007 782 596 425	−0.023 452 691 414	0.065 771 911 265
	0.061 123 389 971	−0.405 176 902 293	−0.793 777 222 451	−0.428 483 476 856
	0.071 799 820 190	0.082 301 927 365	−0.034 555 020 611	−0.015 880 564 898
	0.009 007 986 459	0.002 574 519 023	−0.001 117 520 416	−0.000 466 217 507
	0.000 070 983 494	0.000 034 599 866		

续表 2

对应的参数角	−0.066 407 77 1.155 361 7 −1.117 250 8	0.009 120 5 −1.442 470 7	0.119 361 0 −1.319 173 7	−0.424 002 1 0.729 267 2
Beylkin18	0.099 305 765 374 −0.110 927 598 348 −0.017 520 746 267 −0.017 460 408 696 −0.002 736 031 626	0.424 215 360 813 −0.264 497 231 446 −0.088 543 630 623 −0.014 365 807 969 0.000 640 485 329	0.699 825 214 057 0.026 900 308 804 0.019 679 866 044 0.010 040 411 845	0.449 718 251 149 0.155 538 731 877 0.042 916 387 274 0.001 484 234 782
对应的参数角	−0.030 494 8 0.246 164 5 1.340 844 3	0.006 449 5 −0.391 248 1	0.077 284 6 0.609 650 9	−0.147 624 0 −0.925 628 7

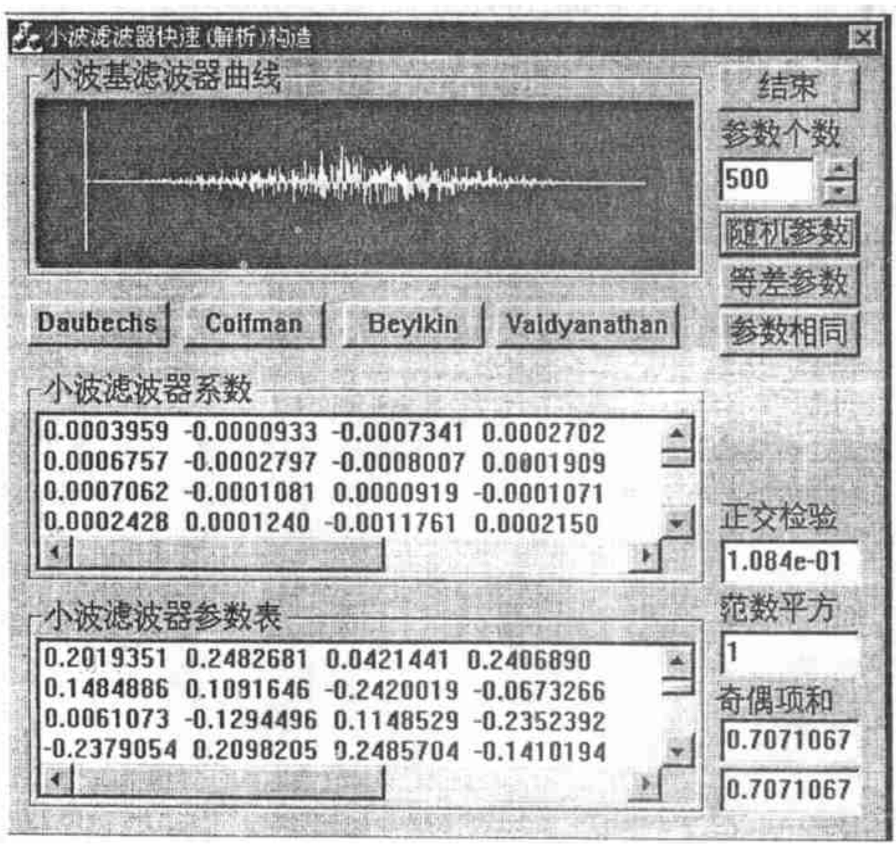

图 1

[参考文献]

[1] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure and Appl Math, 1988, **41**: 909—996.

[2] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998, 78—119.

[3] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994, 41—53.

[4] Wickerhauser M V. Adapted Wavelet Analysis From Theory to Software[M]. New York: SIAM, 1994, 442—462.

[5] Vaidyanathan P P, Huong P Q. Lattice structures for optimal design and robust implementation of two channel perfect- reconstruction QMF banks[J]. IEEE Trans, on ASSP, 1998, **36**(1): 81—94.

[6] 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现[M]. 重庆: 重庆出版社, 1997, 96—101, 282—298.

[7] 李建平, 唐远炎. 小波分析方法的应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1999, 72—91.

[8] 李建平. 矢量积小波变换及小波分析的理论与应用研究[D]. 博士学位论文. 重庆: 重庆大学, 1998.

[9] TANG Yuan_Yan. Wavelet Theory and Its Application to Pattern Recognition[M]. Singapore: World Scientific, 1999.

Uniform Analytic Construction of Wavelet Analysis Filters Based on Sine and Cosine Trigonometric Functions

LI Jian_ping[1], TANG Yuan_yan[2], YAN Zhong_hong[1], ZHANG Wan_ping[3]

(1. International Centre for Wavelet Analysis and Its Applications, Logistical Engineering University, Chongqing 400016, P R China;

2. Department of Computer Science, Hong Kong Baptist University, Hong Kong, P R China;

3. Department of Applied Mathematics, Chengdu Electronic University of Science and Technology of China, Chengdu 610054, P R China)

Abstract: Based on sine and cosine functions, the compactly supported orthogonal wavelet filter coefficients with arbitrary length are constructed for the first time. When $N = 2^{k-1}$ and $N = 2k$, the unified analytic constructions of orthogonal wavelet filters are put forward, respectively. The famous Daubechies filter and some other well known wavelet filters are tested by the proposed novel method which is very useful for wavelet theory research and many application areas such as pattern recognition.

Key words: wavelet analysis; filter; trigonometric functions; analytic construction