

文章编号: 1000-0887(2001)05-0493-06

# 精细积分区段混合能矩阵的一种计算方法<sup>\*</sup>

高索文<sup>1</sup>, 吴志刚<sup>2</sup>, 王本利<sup>1</sup>, 马兴瑞<sup>3</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001; 2. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116013;  
3. 中国空间技术研究院, 北京 100081)

(本刊编委马兴瑞来稿)

摘要: 根据结构力学与最优控制的模拟理论中阐述的各混合能矩阵的力学意义, 介绍了一种利用微分方程组的状态转移矩阵计算区段混合能矩阵的方法, 其计算结果与泰勒级数展开法是一致的

关键词: 精细积分; 黎卡提方程; 最优控制

中图分类号: O232 文献标识码: A

## 1 问题的提出

用精细积分法求解 LQ 控制问题中的黎卡提方程时, 需要首先计算区段混合能矩阵, 一般都是用泰勒级数展开法。

黎卡提方程的求解是最优控制中的关键环节之一。在结构力学与最优控制模拟理论基础上所发展的精细积分法可以准确高效地求解黎卡提微分方程或代数方程。以 LQ 控制为例, 系统方程为<sup>[1]</sup>

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0, \quad (1)$$

其中  $x$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $p$  维输入向量;  $A, B$  为相应维数的定常矩阵, 且  $(A, B)$  可控。性能指标为

$$J = \frac{1}{2} x_f^T s_f x_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (2)$$

其中  $x_f = x(t_f)$ ,  $Q, s_f$  为半正定阵,  $R$  为正定阵。实现最优控制需要通过选择  $u(t)$ , 使泛函  $J = J(u)$  达到最小。满足条件的最优控制可以表示为

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t). \quad (3)$$

$$\dot{\lambda}(t) = P(t)x(t), \quad (4)$$

其中  $\lambda(t)$  为协态变量, 而  $P(t)$  是如下黎卡提矩阵微分方程的解

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q, \\ P(t_f) &= s_f. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

用精细积分法求解上述方程时, 需首先定义区段  $(t_a, t_b)$  的混合能<sup>[2]</sup>。为此令  $t_a, t_b$  时刻

\* 收稿日期: 2000\_02\_02; 修订日期: 2000\_12\_25  
基金项目: 国防 95 预研资助项目(A966000\_50)  
作者简介: 高索文(1961—), 男, 博士。

的状态和协态分别为  $x_a = x(t_a)$ ,  $\lambda_a = \lambda(t_a)$ ,  $x_b = x(t_b)$ ,  $\lambda_b = \lambda(t_b)$ 。区段  $(t_a, t_b)$  的混合能为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} \left[ \lambda^T x - \frac{1}{2} x^T Q x - \lambda^T A x + \frac{1}{2} \lambda^T B R^{-1} B^T \lambda \right] dt \quad (6)$$

因为  $V(x_a, \lambda_b)$  是  $x_a$  与  $\lambda_b$  的二次式, 所以可以表示为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a + \frac{1}{2} x_a^T E x_a - \frac{1}{2} \lambda_b^T G \lambda_b, \quad (7)$$

其中  $F, E, G$  就是  $n \times n$  阶的区段混合能矩阵, 它们与矩阵  $A, B R^{-1} B^T$  及  $Q$  有关, 并满足微分方程<sup>[2,3]</sup>

$$\frac{dE}{d\tau} = Q + A^T E + E A - E B R^{-1} B^T E, \quad (8)$$

$$\frac{dG}{d\tau} = F B R^{-1} B^T F^T, \quad (9)$$

$$\frac{dF}{d\tau} = (A - G Q) F, \quad (10)$$

其中  $\tau = t_b - t_a$ , 而  $t_a \rightarrow t_b$  时有

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I \quad (11)$$

将方程(8)的时间差倒过来, 就与黎卡提方程(5)一致。因此计算矩阵  $E$ , 也就是求解黎卡提方程。

## 2 区段混合能矩阵的计算

求解微分方程(8)的混合能矩阵  $E$ , 需首先计算基本区段的混合能, 然后按区段合并公式递推进行即可。设基本区段长度为时程积分的步长  $\eta$ , 再将其划分为  $m = 2^N$  段, 一般取  $N = 20$ , 则  $m = 1048576$ , 相应于

$$\tau = \eta / 2^N \approx \eta \cdot 10^{-6}. \quad (12)$$

如果能够求出长为  $\tau$  区段的混合能矩阵  $E, G, F$ , 就可以按区段合并公式递推  $N$  次得到长为  $\eta$  的区段的混合能矩阵, 因此, 求区段  $\tau$  的混合能矩阵是第一步。按泰勒级数展开法求这些矩阵是这样进行的, 将  $E, G, F$  作泰勒展开<sup>[2]</sup>

$$E(\tau) \approx e_1 \tau + e_2 \tau^2 + e_3 \tau^3 + e_4 \tau^4, \quad (13)$$

$$G(\tau) \approx g_1 \tau + g_2 \tau^2 + g_3 \tau^3 + g_4 \tau^4, \quad (14)$$

$$F(\tau) \approx I + f_1 \tau + f_2 \tau^2 + f_3 \tau^3 + f_4 \tau^4. \quad (15)$$

将上述方程代入(8), (9), (10)中, 比较各幂次, 可得

$$e_1 = Q, \quad g_1 = B R^{-1} B^T, \quad f_1 = A, \quad (16a)$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(A^T Q + Q A), \quad g_2 = \frac{1}{2}(A g_1 + g_1 A^T), \quad f_2 = \frac{1}{2}(A^2 - g_1 Q), \quad (16b)$$

$$\left. \begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{3}(f_2^T Q + Q f_2 + A^T Q A), & g_3 &= \frac{1}{3}(f_2 g_1 + g_1 f_2^T + A g_1 A^T), \\ f_3 &= \frac{1}{3}(A f_2 - g_2 Q - g_1 Q A), \end{aligned} \right\} \quad (16c)$$

$$e_4 = \frac{1}{4}(f_3^T Q + Q f_3 + A^T Q f_2 + f_2^T Q A), \quad g_4 = \frac{1}{4}(f_3 g_1 + g_1 f_3^T + f_2 g_1 A^T + A g_1 f_2^T),$$

$$f_4 = \frac{1}{4}(Af_3 - g_3Q - g_2QA - g_1Q_2) \quad (16d)$$

很明显  $e_i, g_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为对称阵。只要按上式求出各项泰勒展开的系数, 就可以得到区段  $\tau$  的混合能矩阵  $E, G, F$  的近似解。由于取到  $\tau^4$ , 相对误差已经是  $O(\tau^4)$ , 所得泰勒级数近似解已经不会在计算机上引起实质的误差。这就是求区段  $\tau$  的混合能矩阵的泰勒级数展开法, 然后按区段合并公式递推  $N$  次即可得到长为  $\eta$  的区段混合能矩阵<sup>[2,3]</sup>。区段合并公式为:

$$E_c = E + F^T(E^{-1} + G)^{-1}F, \quad F_c = F(I + GE)^{-1}F,$$

$$G_c = G + F(G^{-1} + E)^{-1}F^T,$$

其中  $E_c, G_c, F_c$  表示由两个  $\tau$  区段合并为  $2\tau$  区段的混合能矩阵, 递推执行  $N$  次, 即可得到长为  $\tau \cdot 2^N$  区段的混合能矩阵。

根据结构力学与最优控制的模拟理论, 区段  $(t_a, t_b)$  可以看作一个子结构, 这样  $G$  矩阵就是子结构在  $t_a$  端夹住时,  $t_b$  端的柔度阵。  $E$  阵是  $t_b$  端完全自由时, 在  $t_a$  端的刚度阵。  $F$  阵是当  $t_b$  端完全自由时, 在  $t_a$  端给出单位位移时在  $t_b$  端发生的位移, 即位移的传递阵<sup>[2]</sup>。根据上述解释, 可以给出一种根据各矩阵的物理意义计算  $E, G, F$  的方法。

考察导出黎卡提微分方程(5)的两端边值问题

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (17)$$

此线性微分方程组的状态转移矩阵为

$$\Phi(t, 0) = e^{Ht} \quad (18)$$

其中 
$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

从而有 
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{Ht} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \quad (20)$$

按照结构力学与最优控制的模拟关系, 状态向量  $x$  对应于结构的位移, 协态向量  $\lambda$  对应于结构的内力。因此, 上式也可以认为是子结构链中位移与内力的传递变换关系。如图 1 所示的区段  $\tau$ , 其中的状态向量和协态向量有如下关系

$$\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} = e^{H\tau} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

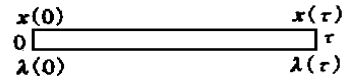


图 1 区段示意图

计算状态转移矩阵  $e^{H\tau}$  可以按文[2]·附录 B 中所介绍的  $2^N$  类的精细计算方法, 也可用其它方法。设计算结果可以表示为

$$e^{H\tau} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  为  $n$  维方阵。现在根据这些条件计算图 1 中小区段的混合能矩阵, 由上文所述各矩阵的物理意义, 可以按下述步骤计算。需指出的是应将状态和协态向量扩充为矩阵, 此时(21)式仍成立。即分别用矩阵  $X(\tau)$  和  $\Lambda(\tau)$  代替向量  $x(\tau)$  和  $\lambda(\tau)$ 。

首先令小区段左端为单位位移, 右端无外力作用, 则

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \Lambda(0) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中  $I_n$  为  $n$  阶单位阵。此时  $E$  等于左端的力,  $F$  等于右端的位移, 因此

$$E = \Lambda(0) = -\varphi_4^{-1} \varphi_3, \quad (24a)$$

$$F = X(\tau) = \varphi_1 + \varphi_2 \Lambda(0) = \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_4^{-1} \varphi_3. \quad (24b)$$

再令左端位移为 0, 右端作用有单位力, 则有

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Lambda(0) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

此时  $F^T$  等于左端的力,  $G$  等于右端的位移

$$F^T = \Lambda(0) = -\varphi_4^{-1}, \quad (26a)$$

$$G = X(\tau) = \varphi_2 \Lambda(0) = -\varphi_2 \varphi_4^{-1}. \quad (26b)$$

这样就求出了  $\tau$  区段的混合能矩阵  $E, G, F$ , 而  $F$  和  $F^T$  可以分别计算互相校验, 但, 注意有正负号的差别, 这是因为内力的方向不同而致。

实际上, 对于长为  $\eta$  的区段, 亦可同样由上述方法计算。结果与按泰勒级数展开法求出  $\tau$  区段混合能矩阵后再按合并公式经过  $N$  次递推得出  $\eta = \tau \cdot 2^N$  区段的混合能矩阵在误差范围内是相同的。本文的算例正是这样计算的, 因为这样可以减少许多计算量, 求解滤波问题中的黎卡提方程时也同样可以用本方法<sup>[4]</sup>。

### 3 算 例

为了缩短全文长度, 这里只给出了两个算例, 分别用本文的方法及泰勒级数展开法结合合并公式计算了长度为  $\eta$  的区段混合能矩阵  $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ 。从计算结果可以发现两者非常接近。而本文方法的计算量远少于泰勒级数展开法。

$$\text{算例 1} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 \\ 39.40 & 3.80 \end{bmatrix}, \quad BR^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = 0.1.$$

表 1 混合能矩阵的计算结果

	原方法	本文方法
$E(\eta)$	$\begin{bmatrix} 0.11579123052184 & 0.00657658805841 \\ 0.00657658805841 & 0.00048551528921 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.11579123052187 & 0.00657658805841 \\ 0.00657658805841 & 0.00048551528921 \end{bmatrix}$
$G(\eta)$	$\begin{bmatrix} 0.00048551528921 & 0.00842154615739 \\ 0.00842154615739 & 0.17278414054189 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00048551528921 & 0.00842154615740 \\ 0.00842154615740 & 0.17278414054196 \end{bmatrix}$
$F(\eta)$	$\begin{bmatrix} 1.23214929594276 & 0.12978003155223 \\ 5.11307796067402 & 1.72531341584125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.23214929594283 & 0.12978003155225 \\ 5.11307796067469 & 1.72531341584138 \end{bmatrix}$

算例 2  $\eta = 0.0500$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -0.3379000 & 0.5821000 & -0.0157880 & 0.2771200 \\ -26.7825000 & -0.1705000 & 0 & 0 \\ -0.11821000 & -0.3059000 & -0.0055230 & 0.0969400 \\ 0 & 0 & 0 & 7.6923000 \end{bmatrix},$$

$$BR^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

表 2 混合能矩阵的计算结果

		原方法(1.0E+ 002)*		本文方法(1.0E+ 002)*	
E(η)	1_2 列	0.029 107 773 890 04 - 0.032 627 494 255 58	0.029 107 773 890 06 - 0.032 627 494 255 58	0.029 107 773 890 06 - 0.032 627 494 255 58	0.029 107 773 890 06 - 0.032 627 494 255 58
		0.032 627 494 255 58 - 0.049 327 803 411 95	0.032 627 494 255 58 - 0.049 327 803 411 95	0.032 627 494 255 58 - 0.049 327 803 411 95	0.032 627 494 255 58 - 0.049 327 803 411 95
		0.002 249 713 701 87 - 0.038 090 188 783 69	0.002 249 713 701 88 - 0.038 090 188 783 69	0.002 249 713 701 88 - 0.038 090 188 783 69	0.002 249 713 701 88 - 0.038 090 188 783 69
		0.000 185 738 015 73 - 0.000 308 930 312 33	0.000 185 738 015 73 - 0.000 308 930 312 33	0.000 185 738 015 73 - 0.000 308 930 312 33	0.000 185 738 015 73 - 0.000 308 930 312 33
	3_4 列	0.002 249 713 701 87 - 0.000 185 738 015 73	0.002 249 713 701 88 - 0.000 185 738 015 73	0.002 249 713 701 88 - 0.000 185 738 015 73	0.002 249 713 701 88 - 0.000 185 738 015 73
		0.038 090 188 783 69 - 0.000 308 930 312 33	0.038 090 188 783 69 - 0.000 308 930 312 33	0.038 090 188 783 69 - 0.000 308 930 312 33	0.038 090 188 783 69 - 0.000 308 930 312 33
		4.996 796 860 985 56 - 0.013 809 842 974 54	4.996 796 860 985 55 - 0.013 809 842 974 54	4.996 796 860 985 55 - 0.013 809 842 974 54	4.996 796 860 985 55 - 0.013 809 842 974 54
		0.013 809 842 974 54 - 0.000 053 743 122 18	0.013 809 842 974 54 - 0.000 053 743 122 18	0.013 809 842 974 54 - 0.000 053 743 122 18	0.013 809 842 974 54 - 0.000 053 743 122 18
G(η)	1_2 列	0.000 042 269 588 65 - 0.000 020 523 611 76	0.000 042 269 588 65 - 0.000 020 523 611 76	0.000 042 269 588 65 - 0.000 020 523 611 76	0.000 042 269 588 65 - 0.000 020 523 611 76
		0.000 020 523 611 76 - 0.000 010 526 583 78	0.000 020 523 611 76 - 0.000 010 526 583 78	0.000 020 523 611 76 - 0.000 010 526 583 78	0.000 020 523 611 76 - 0.000 010 526 583 78
		0.000 014 923 716 65 - 0.000 007 252 407 65	0.000 014 923 716 65 - 0.000 007 252 407 65	0.000 014 923 716 65 - 0.000 007 252 407 65	0.000 014 923 716 65 - 0.000 007 252 407 65
		0.005 103 296 005 88 - 0.002 267 920 870 09	0.005 103 296 005 88 - 0.002 267 920 870 09	0.005 103 296 005 88 - 0.002 267 920 870 09	0.005 103 296 005 88 - 0.002 267 920 870 09
	3_4 列	0.000 014 923 716 65 - 0.005 103 296 005 88	0.000 014 923 716 65 - 0.005 103 296 005 88	0.000 014 923 716 65 - 0.005 103 296 005 88	0.000 014 923 716 65 - 0.005 103 296 005 88
		0.000 007 252 407 65 - 0.002 267 920 870 09	0.000 007 252 407 65 - 0.002 267 920 870 09	0.000 007 252 407 65 - 0.002 267 920 870 09	0.000 007 252 407 65 - 0.002 267 920 870 09
		0.000 005 269 046 38 - 0.001 799 631 300 72	0.000 005 269 046 38 - 0.001 799 631 300 72	0.000 005 269 046 38 - 0.001 799 631 300 72	0.000 005 269 046 38 - 0.001 799 631 300 72
		0.001 799 631 300 72 - 0.752 443 107 858 12	0.001 799 631 300 72 - 0.752 443 107 858 12	0.001 799 631 300 72 - 0.752 443 107 858 12	0.001 799 631 300 72 - 0.752 443 107 858 12
F(η)	1_2 列	0.964 061 649 023 04 - 0.028 613 968 177 24	0.964 061 649 023 04 - 0.028 613 968 177 24	0.964 061 649 023 04 - 0.028 613 968 177 24	0.964 061 649 023 04 - 0.028 613 968 177 24
		1.313 627 172 313 49 - 0.972 273 195 178 72	1.313 627 172 313 48 - 0.972 273 195 178 72	1.313 627 172 313 48 - 0.972 273 195 178 72	1.313 627 172 313 48 - 0.972 273 195 178 72
		0.004 287 158 080 92 - 0.015 194 493 647 74	0.004 287 158 080 91 - 0.015 194 493 647 74	0.004 287 158 080 91 - 0.015 194 493 647 74	0.004 287 158 080 91 - 0.015 194 493 647 74
		0.003 499 182 799 34 - 0.006 190 896 921 29	0.003 499 182 799 36 - 0.006 190 896 921 31	0.003 499 182 799 36 - 0.006 190 896 921 31	0.003 499 182 799 36 - 0.006 190 896 921 31
	3_4 列	0.003 477 843 626 86 - 0.016 653 080 421 23	0.003 477 843 626 87 - 0.016 653 080 421 23	0.003 477 843 626 87 - 0.016 653 080 421 23	0.003 477 843 626 87 - 0.016 653 080 421 23
		0.001 907 884 736 85 - 0.010 465 278 991 15	0.001 907 884 736 85 - 0.010 465 278 991 15	0.001 907 884 736 85 - 0.010 465 278 991 15	0.001 907 884 736 85 - 0.010 465 278 991 15
		0.998 769 337 444 38 - 0.005 911 684 906 77	0.998 769 337 444 38 - 0.005 911 684 906 77	0.998 769 337 444 38 - 0.005 911 684 906 77	0.998 769 337 444 38 - 0.005 911 684 906 77
		0.298 229 667 199 22 - 1.467 757 989 672 08	0.298 229 667 199 67 - 1.467 757 989 672 09	0.298 229 667 199 67 - 1.467 757 989 672 09	0.298 229 667 199 67 - 1.467 757 989 672 09

## 4 结束语

黎卡提方程求解时需要首先计算区段混合能矩阵。本文根据区段混合能矩阵的物理意义,利用两端边值问题线性微分方程的状态转移矩阵,给出了一种新的计算方法,可以减少许多计算量。数值算例表明方法是有效的。

### [参 考 文 献]

[1] 解学书. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986: 297—301.

- [2] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.
- [3] 钟万勰, 钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用[J]. 自动化学报, 1992, 18(3): 325—331.
- [4] 钟万勰. 卡尔曼\_布西滤波的精积分[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(2): 191—200.

## A Computational Method for Interval Mixed Variable Energy Matrices in Precise Integration

GAO Suo\_wen<sup>1</sup>, WU Zhi\_gang<sup>2</sup>, WANG Ben\_li<sup>1</sup>, MA Xing\_rui<sup>3</sup>

(1. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China;

2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China;

3. Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100081, P R China)

**Abstract:** To solve the Riccati equation of LQ control problem, the computation of interval mixed variable energy matrices is the first step. Taylor expansion can be used to compute the matrices. According to the analogy between structural mechanics and optimal control and the mechanical implication of the matrices, a computational method using state transition matrix of differential equation was presented. Numerical examples are provided to show the effectiveness of the present approach.

**Key words:** precise integration; Riccati equation; optimal control