

文章编号: 1000-0887(2001) 06-0625-08

零均值、窄带高斯过程的过阀特性*

贺五洲, 苑明顺

(清华大学 水利水电工程系, 北京 100084)

(惠昌年推荐)

摘要: 对工程实际中经常遇到的零均值、窄带高斯过程过阀问题的统计特性作了系统的讨论, 包括过阀概率、过阀平均次数、平均过阀延续时间和平均过阀幅值。提出了一种新的数值方法来计算平均过阀延续时间, 该方法简单明了、使用方便。定义了一种度量过阀严重程度的新指标, 称为“过阀强度”, 等于单位时间过阀平均次数、平均过阀延续时间和平均过阀幅值三项乘积与阈值之比。大量的随机过程和阈值的组合计算结果表明, 过阀强度仅仅与过阀概率有关, 而与阈值大小、随机过程的谱密度无关, 该规律深入地揭示了过阀特性的内在联系。

关键词: 随机过程; 过阀问题; 统计特性
中图分类号: O211.6 文献标识码: A

在许多物理现象的研究中经常会遇到随机过程的过阀问题。所谓‘过阀’是指随机过程在振荡时超过了某一个固定值(称为阈值)。图 1 给出了随机过程 $\zeta(t)$ 的一个现实 $\zeta^{(1)}(t)$, 其中 ζ_0 表示阈值, τ 为一次过阀过程的延续时间, ζ_a 是峰值, ζ^* 是过阀幅值。过阀问题的统计特性包括: 过阀概率、单位时间过阀平均次数、平均过阀延续时间和峰值超过阈值的平均幅值。这些统计特性是随机过程过阀问题的基本信息。例如, 在船舶上浪预报研究中, 需要掌握甲板上浪的统计特性, 而甲板上浪就是船舶和波浪相对运动这一随机过程的过阀问题, 这里干舷高是阈值。

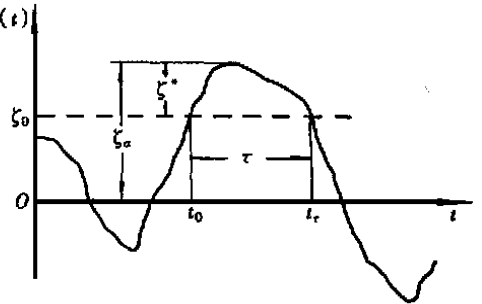


图 1 随机过程过阀问题的示意图

对于工程中常见的零均值、窄带高斯过程, 过阀问题的统计特性由随机过程的谱密度和阈值所决定, 计算原理可见文献[1]。其中, 计算平均过

阀延续时间是求解过阀统计特性的关键, 一般都采用文献[2]的数值方法。为了简化计算, 本文提出一种平均过阀延续时间的新算法, 直接给出解的解析表达式。并在分析大量计算实例的基础上, 通过定义一种新的度量过阀严重程度的指标, 揭示过阀特性的内在联系。

1 过阀问题的统计特性

1.1 过阀概率与平均过阀次数

* 收稿日期: 1998_11_04; 修订日期: 1999_11_08
作者简介: 贺五洲(1946—), 男, 浙江人, 教授。

设 $\zeta(t)$ 是零均值、窄带高斯过程, 其峰值 ζ_a 服从瑞利分布

$$f(\zeta_a) = \frac{\zeta_a}{m_0} \exp(-\zeta_a^2/2m_0),$$

则峰值超过某一阈值 ζ_0 的概率为

$$P(\zeta_a \geq \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\infty} f(\zeta_a) d\zeta_a = \exp\left[-\frac{\zeta_0^2}{2m_0}\right], \quad (1)$$

其中 $m_0 = \int_0^{\infty} S_{\zeta}(\omega) d\omega$

是 $\zeta(t)$ 的方差, $S_{\zeta}(\omega)$ 是 $\zeta(t)$ 的谱密度. $\varphi(t)$ 的方差为

$$m_2 = \int_0^{\infty} \omega^2 S_{\zeta}(\omega) d\omega,$$

由此可知 $\zeta(t)$ 的特征频率

$$\omega_0 = \sqrt{m_2/m_0},$$

特征周期(或称平均跨零周期)为

$$T_0 = 2\pi \sqrt{m_0/m_2},$$

所以单位时间过阈平均次数为

$$E[N(\zeta_0)] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m_2/m_0} \exp\left[-\frac{\zeta_0^2}{2m_0}\right]. \quad (2)$$

1.2 过阈延续时间均值

假设某次过阈的起始和终止时刻为 t_0 和 t_{τ} , $t_{\tau} = t_0 + \tau$, 那末,

$$\begin{cases} \zeta_0 = \zeta(t_0), \quad \zeta_{\tau} = \zeta(t_{\tau}) = \zeta(t_0 + \tau) = \zeta_0, \\ \varphi_0 = \varphi(t_0) > 0, \quad \varphi_{\tau} = \varphi(t_{\tau}) \leq 0. \end{cases}$$

单位时间内发生上述事件(过阈并且过阈延续时间为 τ)的平均次数^[1]为

$$E[N(\tau)] = - \int_0^{\infty} \varphi_0 \int_{-\infty}^0 \varphi_{\tau} f_{\zeta}(\zeta_0, \varphi_0, \zeta_0, \varphi_{\tau}) d\varphi_{\tau} d\varphi_0, \quad (3)$$

这里 4 变量联合分布密度函数为

$$f_{\zeta}(\zeta_0, \varphi_0, \zeta_0, \varphi_{\tau}) = \frac{1}{4\pi^2 |\Delta|^{1/2}} e^{-A\zeta_0^2/|\Delta|} \exp\left\{-\frac{1}{|\Delta|} \left[B\zeta_0(\varphi_0 - \varphi_{\tau}) + D\varphi_0\varphi_{\tau} + \frac{E}{2}(\varphi_0^2 + \varphi_{\tau}^2) \right]\right\},$$

其中

$$\Delta = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & m_0(\tau) & -m_1(\tau) \\ 0 & m_2 & m_1(\tau) & m_2(\tau) \\ m_0(\tau) & m_1(\tau) & m_0 & 0 \\ -m_1(\tau) & m_2(\tau) & 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

$$m_0(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\zeta}(\omega) (\cos \tau\omega) d\omega,$$

$$m_1(\tau) = \int_0^{\infty} \omega S_{\zeta}(\omega) (\sin \tau\omega) d\omega,$$

$$m_2(\tau) = \int_0^{\infty} \omega^2 S_{\zeta}(\omega) (\cos \tau\omega) d\omega,$$

$$A = [m_2 - m_2(\tau)] \left\{ [m_2 + m_2(\tau)] [m_0 - m_0(\tau)] - m_1^2(\tau) \right\},$$

$$B = -m_1(\tau) \left\{ [m_2 + m_2(\tau)] [m_0 - m_0(\tau)] - m_1^2(\tau) \right\},$$

$$D = m_2(\tau) [m_0^2(\tau) - m_0^2] + m_0(\tau) m_1^2(\tau),$$

$$E = m_2 [m_0^2 - m_0^2(\tau)] - m_0 m_1^2(\tau).$$

不难得到行列式 $|\Delta|$ 的值

$$|\Delta| = \frac{E^2 - D^2}{m_0^2 - m_0^2(\tau)}.$$

计算 $m_0(\tau)$ 、 $m_1(\tau)$ 、 $m_2(\tau)$ 时, 因遇到振荡项, 要注意对于给定的 τ , 调节 ω 积分分点的疏密, 以保证计算精度. 计算 $E[N(\tau)]$ 时, 需要设计数值方法^[2] 求解式(3) 中的积分, 将在下一节给出一种新的计算方法.

得到 $E[N(\tau)]$ 值后, 便可由下式算得在过阈发生条件下过阈延续时间等于 τ 的概率密度函数

$$f_{\xi_0}(\tau) = E[N(\tau)] / E[N(\xi_0)], \quad (4)$$

相应的分布函数为

$$F_{\xi_0}(\tau) = \int_0^\tau f_{\xi_0}(\tau) d\tau,$$

τ 的均值为

$$E(\tau) = \int_0^\infty \tau f_{\xi_0}(\tau) d\tau. \quad (5)$$

进行实际计算时, 式(5) 中的积分上限一般取为 $T_0/2$ (T_0 为特征周期), 因为 τ 大于 $T_0/2$ 的概率是非常小的, 即 $F_{\xi_0}(T_0/2)$ 已经非常接近于 1.0 (计算时可将此作为检验标准).

1.3 峰值超过阈值的平均幅值

在过阈发生的条件下, 峰值的分布密度函数为

$$f_{\xi_0}(\xi_a) = \frac{f(\xi_a)}{P(\xi_a \geq \xi_0)} = \frac{\xi_a}{m_0} \exp \left[- \left(\frac{\xi_a^2 - \xi_0^2}{2m_0} \right) \right],$$

所以相应的分布函数为

$$F_{\xi_0}(\xi_a) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\xi_a^2 - \xi_0^2}{2m_0} \right) \right]. \quad (6)$$

通常可以认为, 在过阈发生的条件下, 过阈延续时间 τ 和峰值 ξ_a 是全相关的, 即

$$F_{\xi_0}(\tau) = F_{\xi_0}(\xi_a),$$

这意味着对每次过阈, ξ_a 值和 τ 值从概率分布的意义上是相互对应的. 因为 $F_{\xi_0}(\tau)$ 已经解出, 可以根据关系

$$F_{\xi_0}(\tau) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\xi_a^2 - \xi_0^2}{2m_0} \right) \right] \quad (7)$$

和峰值超过阈值的幅值的定义

$$\xi^* = \xi_a - \xi_0$$

得到与 τ 相对应的 ξ^* 值

$$\xi^*(\tau) = \sqrt{-2m_0 \ln[1 - F_{\xi_0}(\tau)] + \xi_0^2} - \xi_0. \quad (8)$$

至此, ξ^* 的平均值能够由下式来计算

$$E(\xi^*) = \int_0^{T_0/2} \xi^*(\tau) f_{\xi_0}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

2 过阈延续时间均值的计算方法

计算过阈特性的关键是计算单位时间内发生过阈并且过阈延续时间为 τ 的平均次数

$$E[N(\tau)] = - \int_0^\infty \zeta_0 \int_{-\infty}^0 \zeta \zeta_0 f_\zeta(\zeta_0, \zeta_0, \zeta_0, \zeta_\tau) d\zeta_\tau d\zeta_0,$$

其中

$$f_\zeta(\zeta_0, \zeta_0, \zeta_0, \zeta_\tau) = \frac{1}{4\pi^2 |\Delta|^{1/2}} e^{-A\zeta_0^2 |\Delta|} \exp\left\{-\frac{1}{|\Delta|} \left[B\zeta_0(\zeta_0 - \zeta_\tau) + D\zeta_0\zeta_\tau + \frac{E}{2}(\zeta_0^2 + \zeta_\tau^2) \right]\right\}.$$

积分时 A, B, D, E 均视作常数, 它们的表达式已在上节中给出, 不难证明 $E > 0, E - D > 0$. 若令

$$\frac{\zeta_0}{\sqrt{|\Delta|}} = x, \quad \frac{\zeta_0}{\sqrt{|\Delta|}} = y, \quad \frac{\zeta_\tau}{\sqrt{|\Delta|}} = z,$$

则可以将所求积分改写成

$$E[N(\tau)] = R \int_{-\infty}^0 dz \int_0^\infty yz \exp(-S) dy,$$

其中

$$R = -\frac{1}{4\pi^2 |\Delta|^2} \exp(-Ax^2),$$

$$S = \frac{E}{2}(y^2 + z^2) + Dzy + Bx(y - z).$$

下面讨论下述积分

$$J = \int_{-\infty}^0 dz \int_0^\infty yz \exp(-S) dy \quad (10)$$

的算法. 为此, 首先引进积分

$$K = \int_{-\infty}^0 dz \int_0^\infty \exp(-S) dy, \quad (11)$$

则易知 $K'_D = -J$ (微分时, 只将 D 作为参数微分, 其余的 E, B, x 均作为独立参数). 为了计算 K , 选取变换

$$y = \xi + \eta, \quad z = -\xi + \eta, \quad D(y, z)/D(\xi, \eta) = 2.$$

将积分 J 和 K 改写成

$$J = -K'_D = 4 \iint_{\sigma} (\eta^2 - \xi^2) \exp\{-[(E-D)\xi^2 + (E+D)\eta^2 + 2Bx\xi\eta]\} d\xi d\eta, \quad (12)$$

$$K = 4 \iint_{\sigma} \exp\{-[(E-D)\xi^2 + (E+D)\eta^2 + 2Bx\xi\eta]\} d\xi d\eta, \quad (13)$$

这里 $\xi\eta$ 平面上的积分域 σ 如图 2 所示. 易知

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} \eta^2 \exp\{-[(E-D)\xi^2 + (E+D)\eta^2 + 2Bx\xi\eta]\} d\xi d\eta = \\ & -\frac{1}{2(E+D)} \int_0^\infty \xi \exp[-2(E\xi^2 + Bx\xi)] d\xi + \frac{K}{8(E+D)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} \xi^2 \exp\{-[(E-D)\xi^2 + (E+D)\eta^2 + 2Bx\xi\eta]\} d\xi d\eta = \\ & -\frac{1}{2(E+D)} \int_0^\infty \eta \exp[-2(E\eta^2 + Bx\eta)] d\eta - \frac{Bx}{2(E-D)^2} \int_0^\infty \exp[-2(E\eta^2 + Bx\eta)] d\eta + \frac{1}{2(E-D)} \left(1 + \frac{2B^2x^2}{E-D}\right) \frac{K}{4}. \end{aligned} \quad (15)$$

将式(14)、(15)代入式(12), 用 erfc 表示补偿误差函数, 得到

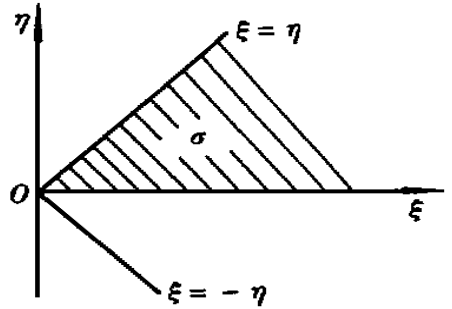


图 2 $\xi\eta$ 平面上的积分域 σ

$$K'_D = \frac{4E}{E^2 - D^2} \int_0^\infty \xi \exp[-2(E\xi^2 + Bx\xi)] d\xi - \frac{2Bx}{(E - D)^2} \int_0^\infty \exp[-2(E\xi^2 + Bx\xi)] d\xi + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E - D} - \frac{1}{E + D} \right) + \frac{B^2 x^2}{(E - D)^2} \right] K = \frac{1}{E^2 - D^2} - \frac{Bx\sqrt{\pi}}{\sqrt{2E}(E - D)} \exp\left[\frac{B^2 x^2}{2E}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{Bx}{\sqrt{2E}}\right] \left[\frac{1}{E + D} + \frac{1}{E - D} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{E - D} - \frac{1}{E + D} \right) + \frac{2B^2 x^2}{(E - D)^2} \right] K,$$

于是得到线性微分方程

$$K'_D + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E - D} - \frac{1}{E + D} \right) - \frac{\gamma}{(E - D)^2} \right] K = \frac{\alpha}{E^2 - D^2} + \frac{\beta}{(E - D)^2}, \quad (16)$$

其中

$$\alpha = 1 - \frac{Bx\sqrt{\pi}}{\sqrt{2E}} \exp\left[\frac{B^2 x^2}{2E}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{Bx}{\sqrt{2E}}\right], \quad \beta = \alpha - 1, \quad \gamma = B^2 x^2.$$

只要得到 K , 便由(16) 可得 $J = -K'_D$. 方程(16) 的解为

$$K = \frac{\exp\left[\frac{\gamma}{E - D}\right]}{\sqrt{E^2 - D^2}} \int_0^D \sqrt{E^2 - t^2} \left[\frac{\alpha}{E^2 - t^2} + \frac{\beta}{(E - t)^2} \right] \exp\left[-\frac{\gamma}{E - t}\right] dt + \frac{E}{\sqrt{E^2 - D^2}} \exp\left[-\frac{\gamma}{E - D} - \frac{\gamma}{E}\right] K(0), \quad (17)$$

其中

$$K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^\infty \exp\left\{-\left[\frac{E}{2}(y^2 + z^2) + Bx(y - z)\right]\right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{E}{2}z^2 - Bxz\right)\right] dz \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{E}{2}y^2 + Bxy\right)\right] dy = \left[\int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{E}{2}y^2 + Bxy\right)\right] dy \right]^2 = \frac{\pi}{2E} \exp\left[\frac{B^2 x^2}{E}\right] \left[\operatorname{erfc}\left[\frac{Bx}{\sqrt{2E}}\right] \right]^2,$$

对于式(17) 右端的积分, 作变换 $(E + t)/(E - t) = u^2$, 易知

$$\frac{1}{E - t} = \frac{1}{2E}(1 + u^2), \quad \sqrt{E^2 - t^2} = \frac{2Eu}{1 + u^2}, \quad dt = \frac{4Eu}{(1 + u^2)^2} du,$$

于是有

$$\int_0^D \sqrt{E^2 - t^2} \left[\frac{\alpha}{E^2 - t^2} + \frac{\beta}{(E - t)^2} \right] \exp\left[-\frac{\gamma}{E - t}\right] dt = \beta \sqrt{\frac{2\pi E}{\gamma}} \exp\left[-\frac{\gamma}{2E}\right] \left[\operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{\gamma(E + D)}{2E(E - D)}}\right] - \operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{2E}}\right] \right] + 2(\alpha - \beta) \exp\left[-\frac{\gamma}{2E}\right] \int_1^{\sqrt{(E+D)/(E-D)}} \frac{1}{1 + u^2} \exp\left[-\frac{\gamma}{2E}u^2\right] du, \quad (18)$$

式(18) 右端的 erf 表示误差函数, 最后一项积分用数值方法计算.

3 过阈强度——度量过阈严重程度的新指标

运用上述有关计算公式和数值方法, 对工程中实际遇到的某类符合零均值、窄带高斯过程假设的随机过程的过阈特性作了计算. 结果包括: 过阈概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$; 单位时间过阈平均次数 $E[N(\zeta_0)]$, 简称过阈次数; 过阈延续时间均值 $E(\tau)$, 简称过阈延时; 峰值超过阈值的平均幅值 $E(\zeta^*)$, 简称过阈超值. 计算涉及到大量的随机过程和阈值的组合, 为了便于比较分

析, 列举 4 种随机过程的计算结果, 其谱密度如图 3 所示, 它们的谱峰和峰频有较大的差别, 因此具有一定的代表性。将 4 种过程的过阀统计特性列于表 1~ 4。由表可见, 对于具有不同谱密度的随机过程而言, 各项统计特性随阈值的变化关系是不同的, 过阀次数、过阀延时和过阀超值各自随过阀概率的变化规律也是不同的, 图 4 给出的 4 种过程过阀延时 $E(\tau)$ 随过阀概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$ 的变化关系清楚地表明了这一点。这给随机过程过阀特性计算结果的表达和使用带来了限制和不便, 迫使我们工程实际中遇到与过阀严重性相关的设计决策时面临大量的随机过程和阈值的组合计算。为解决这一问题, 必须寻找能综合体现阈值和随机过程谱密度对过阀严重性影响的指标以及能综合表征过阀严重性的度量指标。通过对大量计算结果的观察和分析, 我们找到了这两个指标, 前者是过阀概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$, 后者是单位时间过阀平均次数、过阀延续时间均值和平均过阀幅值 3 项乘积与阈值之比(无量纲量)

$$I_s = \frac{E[N(\zeta_0)]E(\tau)E(\zeta^*)}{\zeta_0} \tag{19}$$

把它称为“过阀强度”, 大致代表了随机过程 $\zeta(t)$ 的时历曲线所围面积在阈值以上部分与阈值以下部分之比的概率平均值。对于上述 4 种随机过程, 过阀强度的计算值见表 1~ 4 的最右一列, 过阀强度 I_s 随过阀概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$ 变化关系见图 5。由图 5 可见, 尽管 4 种随机过程规模、其频谱分布以及阈值各不相同, 图中的数据点却集聚在同一条曲线上。实际上, 这一规律被作者的大量随机过程和阈值的组合计算所证实, 而不仅限于所列结果。这说明, 由式(19)定义的过阀强度 I_s 是一种合理反映零均值、窄带高斯过程过阀严重程度的综合指标, 可以认为过阀强度 I_s 由过阀概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$ 所完全决定, 而与阈值大小及随机过程的频域特性无关。过阀强度由过阀概率所完全决定的规律, 反映了过阀可能性与过阀严重性之间的对应关系, 其物理意义十分明显, 因此是易于理解的。它同时也印证了定义过阀强度 I_s 作过阀严重程度的度量指标的合理性, 以及各项过阀统计特性计算的正确性。显然, 有了过阀强度 I_s 这一无量纲表达形式后, 在分析各种不同规模、不同频谱分布以及不同阈值的零均值、窄带高斯过程过阀问题时, 可以简化统计特性的计算过程, 为工程设计决策提供可靠的依据。

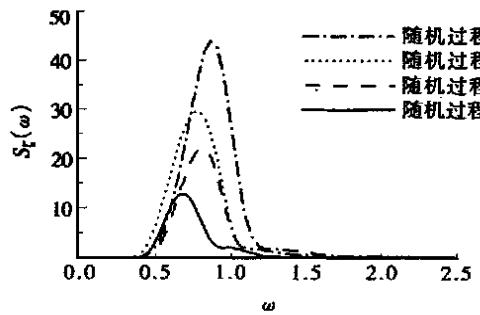


图 3 4 种随机过程的谱密度

表 1 随机过程 1 在不同阈值下的过阀特性

阈值 ζ_0	过阀概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$	过阀次数 $E[N(\zeta_0)]$	过阀延时 $E(\tau)$	过阀超值 $E(\zeta^*)$	过阀强度 I_s
4.76	0.3147	0.0461	1.4459	1.8156	0.0254
5.06	0.2708	0.0397	1.3831	1.7230	0.0187
5.36	0.2308	0.0338	1.3252	1.6657	0.0139
5.66	0.1950	0.0286	1.2717	1.5766	0.0101
5.96	0.1632	0.0239	1.2223	1.5067	0.0074
6.26	0.1354	0.0198	1.1766	1.4652	0.0055
6.86	0.0906	0.0133	1.0947	1.3411	0.0028
7.46	0.0584	0.0086	1.0233	1.2604	0.0015

表 2 随机过程 2 在不同阈值下的过阈特性

阈值 ζ_0	过阈概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$	过阈次数 $E[N(\zeta_0)]$	过阈延时 $E(\tau)$	过阈超值 $E(\zeta^*)$	过阈强度 I_s
4.34	0.337 1	0.043 8	1.675 6	1.790 7	0.030 3
4.64	0.288 6	0.037 5	1.598 4	1.711 9	0.022 1
4.94	0.244 5	0.031 8	1.526 8	1.630 9	0.016 0
5.24	0.204 9	0.026 6	1.460 6	1.545 3	0.011 5
5.54	0.170 0	0.022 1	1.399 6	1.502 7	0.008 4
5.84	0.139 6	0.018 1	1.343 2	1.419 2	0.005 9
6.44	0.091 3	0.011 9	1.242 8	1.319 1	0.003 0
7.04	0.057 2	0.007 4	1.156 2	1.207 1	0.001 5

表 3 随机过程 3 在不同阈值下的过阈特性

阈值 ζ_0	过阈概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$	过阈次数 $E[N(\zeta_0)]$	过阈延时 $E(\tau)$	过阈超值 $E(\zeta^*)$	过阈强度 I_s
3.54	0.340 5	0.047 0	1.572 9	1.451 5	0.029 9
3.74	0.300 4	0.041 5	1.513 3	1.384 6	0.023 3
4.04	0.245 8	0.034 0	1.431 0	1.322 4	0.016 1
4.34	0.198 0	0.027 4	1.356 8	1.235 6	0.010 6
4.64	0.157 1	0.021 7	1.289 5	1.189 7	0.007 2
4.94	0.122 7	0.017 0	1.228 6	1.117 1	0.004 7
5.24	0.094 4	0.013 0	1.173 0	1.065 1	0.003 1
5.84	0.053 3	0.007 4	1.075 4	0.973 2	0.001 3

表 4 随机过程 4 在不同阈值下的过阈特性

阈值 ζ_0	过阈概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$	过阈次数 $E[N(\zeta_0)]$	过阈延时 $E(\tau)$	过阈超值 $E(\zeta^*)$	过阈强度 I_s
3.00	0.336 4	0.040 4	1.801 5	1.220 6	0.029 6
3.20	0.289 5	0.034 8	1.724 9	1.189 4	0.022 3
3.40	0.246 7	0.029 7	1.653 2	1.125 3	0.016 2
3.60	0.208 3	0.025 0	1.586 3	1.084 1	0.012 0
3.80	0.174 1	0.020 9	1.524 0	1.044 5	0.008 8
4.00	0.144 1	0.017 3	1.466 0	0.996 4	0.006 3
4.20	0.118 2	0.014 2	1.411 8	0.968 6	0.004 6
4.60	0.077 2	0.009 3	1.313 9	0.891 8	0.002 4
5.00	0.048 5	0.005 8	1.228 0	0.843 8	0.001 2

4 结 语

对于零均值、窄带高斯过程过阈问题统计特性,可以得到如下结论:

(1) 给出了计算平均过阈延续时间的新算法。由于直接给出解的解析表达式,该方法简明、有效、使用方便。

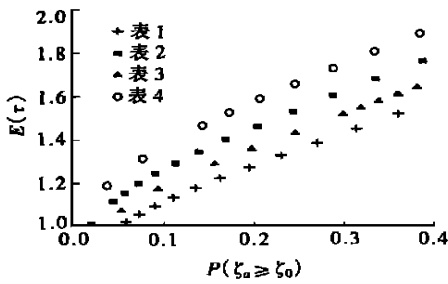


图 4 过阀延时与过阀概率的关系

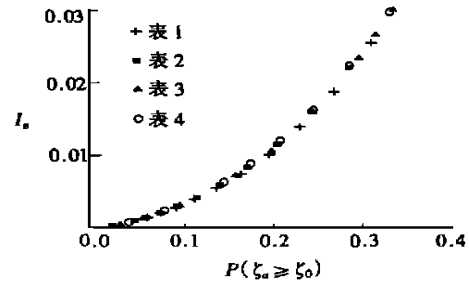


图 5 过阀强度与过阀概率的关系

(2) 提出了过阀强度指标, 用作过阀严重程度的度量, 该指标综合反映了阈值、平均次数、平均延时和平均超高对过阀严重程度的影响。

(3) 得到了过阀强度 I_s 和过阀概率 $P(\zeta_a \geq \zeta_0)$ 两个无量纲量之间相互唯一决定的关系, 揭示了过阀特性的内在联系。对于简化统计特性计算过程、合理地进行设计决策具有实际意义。

[参 考 文 献]

- [1] Price W G, Bishop R E D. Probabilistic Theory of Ship Dynamics [M]. London: Chapman and Hall, 1974.
- [2] Tikhonov V I. The distribution of the duration of excursions of normal fluctuations [A]. In: Kuznetsov P I, Stratonovick R L, Tikhonov V I Eds. Non Linear Transformations of Stochastic Processes [C]. Oxford: Pergamon, 1965, 354—367.

Statistical Property of Threshold Crossing for Zero Mean Valued, Narrow Banded Gaussian Processes

HE Wu zhou, YUAN Ming shun

(Department of Hydraulic and Hydropower Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China)

Abstract: Based on a comprehensive discussion of the calculation method for the threshold crossing statistics of zero mean valued, narrow banded Gaussian processes of various practical engineering problems, including the threshold crossing probability, average number of crossing events per unit time, mean threshold crossing duration and amplitude, a new simple numerical procedure is proposed for the efficient evaluation of mean threshold crossing duration. A new dimensionless parameter, called the threshold crossing intensity, is defined as a measure of the threshold crossing severity, which is equal to the ratio of the product of average number of crossing events per unit time and mean threshold crossing duration and amplitude over the threshold. It is found, by the calculation results for various combinations of stochastic processes and different thresholds, that the threshold crossing intensity, irrelevant of the threshold and spectral density of the process, is dependent only on the threshold crossing probability.

Key words: stochastic process; threshold crossing; statistical property