应用数学和力学, 第 22 卷 第 6 期(2001 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 06_0609_04

具公共值的 Fredholm 紧映射*

J.M. 索里阿诺

(塞维拉大学 数学学院 数学系, 塞维拉 41080, 西班牙)

(钱伟长推荐)

摘要: 给出了 Banach 空间之间的两个可微映射具有公共值的充分条件, 证明的方法本质上是基于延拓法•

关 键 词: 延拓法; 延拓法; C^1_同伦; 满射; 隐函数定理; 紧映射; Fredholm 映射; 零指数; 单射; 微分同胚

中图分类号: O177.2; O192 文献标识码: A

1 预备知识

本文中, 我们假设 X, Y 和 Z 为 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ 上的 Banach 空间• 求解方程

$$F(x)=0 \tag{1}$$

的一种方法是延拓法[1~10]• 这一方法在于把将(1) 嵌入连续性问题

$$H(t,x)=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{2}$$

中• 当 $t=0$ 时, (2) 很容易求解• 如果可以把这一解从 $t=0$ 延拓到 $t=1$, 则(1) 即可求解•

为证明 C^1_映射 F 至少有一个零点, 文中给出了某些充分条件• 作者利用延拓法, 在文献[11 ~ 18] 中已给出了有限维情况下零点存在的充分条件, 在文[19, 20] 中又给出了无限维情况下零点存在的充分条件• 其证明过程提供了隐定义的通过零点的曲线的存在性[5, 6]• 证明的关键是利用反函数定理、隐函数定理和 Fredholm C^1_映射的性质[10]•

我们简要回顾一下 Banach_值映射的一些概念• 设 $F: A\to Y$ 为连续映射, 其中 $A\subset X$• F 称为是紧的, 如果对每一有界子集 $B\subset A$, Range$(F(B))$ 是相对紧的(即 $(F(B))$ 的闭包 $(\overline{F(B)})$ 在 Y 中是紧的)•

命题 1 若 $a\in A$, A 为开集, F 为紧的, 并且存在导数 $F'(a)$, 则 $F'(a)\in\mathscr{L}(X,Y)$ 也是紧的(见[10], p. 296)•

此外, 设 A 为开集, 则 F 称为 Fredholm 映射当且仅当 F 为 C^1_映射, 并且当且仅当对所有 $x\in A$, $F'(x): X\to Y$ 为线性 Fredholm 算子• 算子 $L: X\to Y$ 称为线性 Fredholm 算子当且仅当 L 是线性和连续的并且维数 dim(ker(L)) 和余维数 codim$(L(X))$ 都是有限的, 而数

$$\mathrm{ind}(L)=\dim(\ker(L))-\mathrm{codim}(L(X))$$

称为 L 的指数•

---

* 收稿日期: 2000_11_22;
基金项目: D.G.E.S.PB 基金资助项目(96_1338_CO2_01); Junta de Andalucia 基金资助项目
本文原文为英文, 由吴承平译, 张石生校.

命题 2 对线性 Fredholm 算子 $B: X \to Y$ 而言, 下面的结论成立: 如果 $C \in \mathscr{L}(X, Y)$ 且 C 是紧的, 则扰动算子 $B+C$ 也是 Fredholm 算子, 且 $\mathrm{ind}(B+C) = \mathrm{ind}(B)$ (见[10], p. 366).

下面我们给出隐函数定理和反函数定理(见[10], pp. 150—154, 172).

定理 1 设(i) $F: U(x_0, y_0) \subset X \times Y \to Z$ 为定义在开邻域 $U(x_0, y_0)$ 上且 $F(x_0, y_0) = 0$ 的映射, 这里 X、Y、Z 为 Banach 空间; (ii) 存在 $U(x_0, y_0)$ 上的 Fr chet 偏导数 F_Y, 且 $F_Y(x_0, y_0): Y \to Z$ 是双射的; (iii) F 和 F_Y 在 (x_0, y_0) 是连续的, 则下列结论成立:

a) 存在数 r_0 和 r, 对每一满足 $\|x - x_0\| \leqslant r_0$ 的 $x \in X$, 存在唯一的 $y(x) \in Y$ 使 $\|y(x) - y_0\| \leqslant r$, 且 $F(x, y(x)) = 0$.

b) 对于满足 $\|x - x_0\| \leqslant r_0$ 的所有点 x, 当 $n \to \infty$ 时, 由 $y_0(x) = y_0$, $y_{n+1}(x) = y_n(x) - F_Y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y_n(x))$ 所定义的逐次逼近序列 $(y_n(x))_{n \geqslant 1}$ 收敛于解 $y(x)$.

c) 若在 (x_0, y_0) 的一邻域中, F 为 C^m_映射, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, 则 $y(\cdot)$ 在 x_0 的邻域中也是 C^m_映射.

定理 2 令 $f: U(x_0) \subset X \to Y$ 为 C^1_映射, 则 f 在 x_0 是局部 C^1_映射当且仅当 $f'(x_0): X \to Y$ 为双射.

2 算子公共值

显然, 如果将 F 记为 $f - g$, 则 F 有一个零点当且仅当 f 和 g 共享一值, 即是说存在 $x \in X$ 使 $f(x) = g(x)$. 利用 f 和 g 建立我们的结果.

定理 3 设 $f, g: X \to Y$ 为满足如下条件的两个 C^1_映射:

(i) f 为 C^1_微分同胚; (ii) g 是紧的; (iii) 若 $f(x) - tg(x) = 0$, $x \in X$, $t \in [0, 1]$, 则 $f'(x) - tg'(x)$ 为单射;

则 f 和 g 共享一值.

证明 第1步 由假设(i), 存在一个 $x_0 \in X$ 使 $f(x_0) = 0$. 选择任一包含 x_0 的开球 $D_1 \subset X$, 定义集

$$V = g(A),$$

其中

$$A = \left\{x \in D_1: \text{存在 } t = t(x) \in [0, 1] \text{ 使 } f(x) = tg(x)\right\}.$$

可以看出, A 不是空集, 因 $f(x_0) = 0 = 0g(x_0)$, 因此 $x_0 \in A$. 此外 $V \subset g(D_1)$, 且 D_1 有界, 因而由(ii)知 $g(D_1)$ 是相对紧的, 从而 V 是相对紧的, 并且集 $[0, 1] \times V$ 在拓扑积 $\mathbf{R} \times Y$ 中是紧的. 令 V' 为集

$$V' = \left\{ty: t \in [0, 1], y \in V\right\},$$

因 V' 是集合 $[0, 1] \times V$ 在连续映射

$$(t, y) \in [0, 1] \times Y \mapsto ty \in Y$$

下的像, 因此 V' 在 Y 中是紧的. 其次, 我们考虑 X 中由

$$V'' = f^{-1}(V')$$

给出的子集. 因为 f^{-1} 是连续的(见(i)) 且 V' 是紧的, 因而 V'' 也是紧的.

点 x_0 和集 V'' 将在第三步中用到.

第二步 现在我们证明 f 为 Fredholm 映射而且

$$\forall x \in X, \forall t \in [0, 1], \qquad (f'(x) - tg'(x))$$

为零指数的线性 Fredholm 算子. 定理 2 说明 $\forall x \in X$, $f'(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ 为双射, 这是因为 f 为 x 的局部 C^1_微分同胚. 因此 $f'(x) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$, $\forall x \in X$, 从而

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Rang}(f'(x)))=0,\quad \dim(\ker(f'(x)))=0, \operatorname{Ind}(f'(x))=0,$$

即对所有 $x\in X$, $f'(x)$ 为零指数线性 Fredholm 算子• 因此 f 即为上述 Fredholm 映射•

另一方面, g 为紧映射, 因此导数 $g'(x)$ 对每一给定的 x 为线性紧算子(命题1), 故 $tg'(x)$ 对每一给定的 $t\in[0,1]$ 也是线性紧算子•

由于 $f'(x)$ 为零指数的线性 Fredholm 算子, $tg'(x)$ 为紧线性映射, 由命题 2 知

$$(f'(x)-tg'(x))$$

为上述指数为

$$\operatorname{ind}(f'(x)-tg'(x))=\operatorname{ind}(f'(x))=0$$

的线性 Fredholm 算子•

第三步 现在证明 f 和 g 取同一值• 我们将利用定理 1 及延拓法• 我们构造如下的 C^1_映射:

$$H:\mathbf{R}\times X\to Y,$$

它由 $H(t,x)=f(x)-tg(x)$ 定义•

显然, 当 $t\in[0,1]$ 时, 它是 f 和 g 间的同伦• 在第二步中我们已经知道

$$\operatorname{index}(H_x(t,x))=\operatorname{Ind}(f'(x)-tg'(x))=0,\qquad \forall x\in X,\ t\in[0,1]•$$

此外, 如果 $(t,x)\in[0,1]\times X$ 使得 $H(t,x)=f(x)-tg(x)=0$, 则由假设(iii) $H_x(t,x)$ 为单射, 即

$$\ker(H_x(t,x))=\{0\}•$$

因此 $\dim(\ker(H_x(t,x)))=0,$

从而由指数 $(H_x(t,x))$ 的定义,

$$\operatorname{codim}((\operatorname{Range})(H_x(t,x)))=0,$$

所以 $\operatorname{Range}(f'(x)-tg'(x))=\operatorname{Range}(H_x(t,x))=Y•$

因此 $H_x(t,x)$ 为满射• 简言之, 若 $H(t,x)=0$, $(t,x)\in[0,1]\times X$, 则 $H_x(t,x)\in\mathscr{L}(X,Y)$ 为双射•

另一方面, 由于 f 和 g 为 C^1_映射, 所以 $H(\cdot,\cdot)$ 和 $H_x(\cdot,\cdot)$ 是连续的• 从而当

$$H(t_0,x_0)=0,\qquad (t_0,x_0)\in[0,1]\times X$$

时, 则定理 1 的假设成立• 因而有 $r_0, r>0$, 对每一 $t\in(t_0-r_0, t_0+r_0)$, 存在唯一的 $x(t)\in X$ 使 $\|y(x)-y_0\|\leqslant r$ 且 $H(t,x(t))=0$• 此外, $x(\cdot)$ 在 t_0 的邻域中是 C^1_映射• 由 Banach 不动点定理及前述 $[0,t]\times V''$ 的紧性和 $H(\cdot,\cdot)$ 和 $H_x(\cdot,\cdot)$ 的连续性得到的定理 1 的证明[10, pp.149~155] 可知, 常数 r_0 和 r 的取值与所考虑的特定的点无关, 即 $(t_0,x_0)\in[0,1]\times V''$•

所以 $[0,1]$ 的紧性表明, 我们可以在有限步内由 $t=0$ 达到 $t=1$• X 是连通的这一事实表明, 存在解曲线 $(t,x(t))\equiv C\subset[0,1]\times X$•

如果 $(t_0,x_0)\in C$, 则 $H(t,x)=0$ 成立• 曲线 C 始于点 (t_0,x_0), 终于点 $(1,x_0^*)\in[0,1]\times X$• 因此

$$H(1,x_0^*)=0,$$

或记为 $f(x_0^*)=g(x_0^*)$•

证毕•

[参 考 文 献]

[1] Allgower E L, Georg K. Numerical Continuation Method [M]. Springer Series in Computational

Mathematics 13. New York: Springer_Verlag, 1990.
[2] Allgower E, Clashoff K, Peitgen H. A Survey of Homotopy Methods for Smooth Mappings [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1981, 2—29.
[3] Allgower E, Glashoff K, Peitgen H. A survey of homotopy methods for smooth mappings[A]. In: Proceedings of the Conference on Numerical Solutions of Nonlinear Equations [C]. Bremen, July, 1980, Lecture Notes in Math [M]. 878. Berlin: Springer_Verlag, 1981, 1—29.
[4] Alexander J C, York J A. Homotopy continuation methods: numerically implementable topological procedures[J]. Trans Amer Math Soc, 1978, **242**: 271—284.
[5] Bernstein S. Sur la generalisation du probl me de Dirichlet Ⅰ [J]. Math Anal, 1906, **62**: 253—270.
[6] Bernstein S. Sur la generalisation du probl me de Dirichlet Ⅱ [J]. Math Anal, 1910, **69**: 82—136.
[7] Leray J, Shauder J. Topologie et equations of fonctionalles[J]. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1934, **51**: 45—78.
[8] Garcia C B, Li. On the number of solutions to polynomial systems of nonlinear equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1980, **17**: 540—546.
[9] Garcia C B, Zangwill W I. Determining all solutions to certain systems of nonlinear equations[J]. Math Oper Res, 1979, **4**: 1—14.
[10] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications [M]. New York: Springer_Verlag, 1985.
[11] Soriano J M. Global minimum point of a convex function[J]. Appl Math Comput, 1993, **55**(2_3): 213—218.
[12] Soriano J M. Extremum points of a convex function[J]. Appl Math Comput, 1994, **66**: 261—266.
[13] Soriano J M. On the existence of zero points[J]. Appl Math Comput, 1996, **79**: 99—104.
[14] Soriano J M. On the number of zeros of a mapping[J]. Appl Math Comput, 1997, **88**: 287—291.
[15] Soriano J M. Existence of zeros for bounded perturbations of proper mappings[J]. Appl Math Comput, 1999, **99**: 255—259.
[16] Soriano J M. Mappings sharing a value on finite_dimensional spaces[J]. Appl Math Comput, (pending publication)
[17] Soriano J M. On the Bezout theorem real case[J]. Appl Nonlinear Anal, 1995, **2**(4): 59—66.
[18] Soriano J M. On the Bezout theorem[J]. Commun Nonlinear Anal, 1997, **4**(2): 59—66.
[19] Soriano J M. Zeros of compact perturbations of proper mappings[J]. Appl Nonlinear Anal, 2000, **7**(4): 31—37.
[20] Soriano J M. Compact mappings and proper mappings between Banach spaces which share a value [J]. Math Balkanica, 2000, **14**(1)(2).

Fredholm and Compact Mappings Sharing a Value

J. M. Soriano
(Departmento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas,
Universidad de Sevilla, Aptdo 1160, Sevilla 41080, Spain)

Abstract: Sufficient conditions are given to assert that two differentiable mappings between Banach spaces have common values. The proof is essentially based upon continuation methods.

Key words: zero point; continuation methods; C^1_homotopy; surjective implicit_function theorem; compact mapping; Fredholm mapping; index zero; injective; diffeomorphism