

文章编号: 1000-0887(2001) 07_0729_06

随机迭代函数系统的仿射变换*

熊 勇, 史定华

(上海大学 数学系, 上海 200436)

(刘宇陆推荐)

摘要: 对分形图形的一种构造方法——随机迭代函数系统, 给出了确定一个随机迭代函数系统的原图像经过仿射变换后得到的新图像所对应的随机迭代函数系统的具体步骤, 最后用平移、旋转、拉伸和对称变换的例子作了详细的说明。

关键词: 分形; 随机迭代函数系统; 仿射变换

中图分类号: O18 文献标识码: A

引 言

随机迭代函数系统(Iterated Function System, 简称随机 IFS)是美国佐治亚理工学院的 M. F. Barnsley 于 1985 年发展的一种分形构造方法。随机 IFS 是利用仿射变换建立几何对象各部分之间、整体与局部之间的联系, 通过迭代去构造分形图形。这里, 选择初始状态集合, 寻求压缩仿射变换以及设定选取变换的概率称为编码, 它会有各种技巧。

随机 IFS 已经用来产生出各种形态的植物、丛林、山川和云烟等图形。而确定这些物体图形的随机 IFS 仅有很少的几个仿射变换参数。因此随机 IFS 在数据压缩方面潜力非常巨大。同时, 对揭示复杂事物的内在规律也有一定的启发作用。

定义 1 一个随机 IFS 是由一个完备的度量空间 (X, d) 、一个有限的压缩映射集合 $\{f_i: X \rightarrow X, i = 1, \dots, N\}$ 和一个伴随概率集合 $\{p_i: p_i > 0, i = 1, \dots, N, \sum p_i = 1\}$ 构成。记为 $\{X; f_i; p_i: i = 1, \dots, N\}$ 。随机 IFS 的压缩因子 $s = \max\{s_i: i = 1, \dots, N\}$, 其中 $s_i (0 \leq s_i < 1)$ 为对应映射 f_i 的压缩系数。 s_i 是指满足下式 $d(f_i(x_1), f_i(x_2)) \leq s_i d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$ 的常数。记所有随机 IFS 的集合为随机 IFSs。

定义 2 二维欧氏空间 \mathbf{R}^2 的随机 IFS $\{\mathbf{R}^2; f_i; p_i: i = 1, \dots, N\}$ 定义为

$$f_i(x) = A_i x + T_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}. \quad (1)$$

下面的拼贴定理是随机 IFS 理论的核心。因为它使得对任意的分形图形 T , 给出了存在随机 IFS 的条件, 该随机 IFS 迭代的图像将无限逼近 T 。

* 收稿日期: 2000_05_16; 修订日期: 2001_03_20

作者简介: 熊勇(1973—), 男, 广东梅县人, 博士。

定理 1 (拼贴定理) 令 (X, d) 为一完备的度量空间, 给定图像 T , $\varepsilon > 0$, 选一个压缩因子为 s ($0 \leq s < 1$) 的随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 使 $h\left(T, \bigcup_{i=1}^N f_i(T)\right) \leq \varepsilon$ 其中 $h(d)$ 是子集之间的 Hausdorff 度量. 则 $h(T, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$, 即 $h(T, A) \leq \frac{1}{1-s} h\left(T, \bigcup_{i=1}^N f_i(T)\right)$, 其中 A 是随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 的吸引子,

证明 见 [1].

对已经寻找到随机 IFS 的图形, 进行仿射变换, 如: 平移、放大(缩小)、旋转、拉伸或是作对称变换, 则相应的随机 IFS 如何发生变化? 已有文章^[2]对平移和放大(缩小)变换确定了相应的随机 IFS, 我们的工作则是给出了随机 IFS 在一般仿射变换下相应的随机 IFS.

1 随机 IFSs 中的可逆变换及对应的随机 IFS

对给定的随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$, 若其迭代的图形为 T_1 , 选一个变换 $g(\cdot)$, 作用到图像 T_1 上, 得到图像 T_2 . 从原有的随机 IFS 和要求重构的图像 T_2 出发, 我们可以定义随机 IFS 的变换.

定义 3 若存在随机 IFS $\{g(X); f'_i; p'_i; i = 1, \dots, N\}$, 使得该随机 IFS 迭代图像为 T_2 , 则称 $g(\cdot)$ 为随机 IFSs 中的一个变换, 而称随机 IFS $\{g(X); f'_i; p'_i; i = 1, \dots, N\}$ 为随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 在变换 $g(\cdot)$ 作用下的像. 若 $g(\cdot)$ 是可逆变换, 则称 $g(\cdot)$ 为随机 IFSs 中的可逆变换.

定理 2 在可逆变换 $g(\cdot)$ 作用下, 随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 的像为随机 IFS $\{g(X); g \circ f_i \circ g^{-1}; p_i; i = 1, \dots, N\}$.

证明 由于 $p_i > 0$, 从而对任意 $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$, 存在 $x_n, x_{n+1} \in T_1 \subseteq X$ 使得 $x_{n+1} = f_{i_0}(x_n)$. 而 $g(\cdot)$ 为可逆变换, 且由定义存在 $y_n, y_{n+1} \in T_2 \subseteq g(X)$, 使得 $y_n = g(x_n), y_{n+1} = g(x_{n+1})$, 所以 $x_n = g^{-1}(y_n), x_{n+1} = g^{-1}(y_{n+1})$, 从而 $g^{-1}(y_{n+1}) = f_{i_0}(g^{-1}(y_n))$, 由此得 $y_{n+1} = g \circ f_{i_0} \circ g^{-1}(y_n)$. 所以 $f_{i_0} \stackrel{\Delta}{=} g \circ f_{i_0} \circ g^{-1}$. 上式同时说明了, 取 $g \circ f_{i_0} \circ g^{-1}$ 的概率仅与取 f_{i_0} 的概率有关. 从而 $p'_{i_0} = p_{i_0}$. 最后, 由 i_0 的任意性知结论成立.

2 吸引子在随机 IFS 可逆变换中的变化

定义 4 对给定的随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$, 若存在 x_i^* 使得 $f_i(x_i^*) = x_i^*$, 则称 x_i^* 是 f_i 的吸引子. 而称 $\{x_i^* \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ 为随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 的吸引子集.

在以下的讨论中, 我们总是假定每一个 f_i 有唯一吸引子 x_i^* .

在随机 IFS 中, 迭代点必然向吸引子靠拢, 即落在吸引子邻域中. 如果随机 IFS 有多个吸引子, 则迭代点是否落在某个吸引子邻域中将取决于 p_i 的大小. 换句话说, 在随机 IFS 重构的分形图中, p_i 越大, 则对应 x_i^* 附近的点越密.

从随机 IFS 的可逆变换定义中, 我们知道, 在可逆变换 $g(\cdot)$ 的作用下, 从原随机 IFS 可得到一个新的随机 IFS. 而新的随机 IFS 重构的分形图正是原随机 IFS 重构的分形图在 $g(\cdot)$ 作用下的像. 从直观上, 我们感觉到: 新随机 IFS 的吸引子集是原随机 IFS 的吸引子集在 $g(\cdot)$ 作

用下的像•

定理 3 对给定的随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$, 在可逆变换 $g(\bullet)$ 作用下所得到的新随机 IFS $\{g(X); g \circ f_i \circ g^{-1}; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 的吸引子集为 $\{g(x_i^*) \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ • 其中 $\{x_i^* \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ 为原随机 IFS $\{X; f_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$ 的吸引子集•

证明 若 y_i^* 是 $g \circ f_i \circ g^{-1}$ 的吸引子, 则有 $g \circ f_i \circ g^{-1}(y_i^*) = y_i^*$, 于是, 我们得到 $g^{-1} \circ g \circ f_i \circ g^{-1}(y_i^*) = g^{-1}(y_i^*)$, 即 $f_i(g^{-1}(y_i^*)) = g^{-1}(y_i^*)$ • 由假设 x_i^* 是 f_i 的唯一吸引子, 故 $x_i^* = g^{-1}(y_i^*)$, 因此 $y_i^* = g(x_i^*)$ •

3 二维欧氏空间随机 IFS 的仿射变换

在二维欧氏空间 \mathbf{R}^2 中取仿射变换 $g(x) = Ax + T, |A| \neq 0$ • 其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \tag{2}$$

从定义 2 出发, 直接运用定理 2, 由式(1)和式(2)可以得到下面的定理•

定理 4 二维欧氏空间 \mathbf{R}^2 中的随机 IFS $\{\mathbf{R}^2; f_i; i = 1, \dots, N\}$, 在仿射变换 $g(\bullet)$ 的作用下, 得到随机 IFS $\{\mathbf{R}^2; f'_i; p_i; i = 1, \dots, N\}$, 其中

$$\begin{aligned} f'_i(x) &= A'_i x + T'_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ A'_i &= \begin{bmatrix} a'_i & b'_i \\ c'_i & d'_i \end{bmatrix}, T'_i = \begin{bmatrix} e'_i \\ f'_i \end{bmatrix}, \\ a'_i &= (a_i a_{11} a_{22} - b_i a_{11} a_{21} + c_i a_{12} a_{22} - d_i a_{12} a_{21}) / |A|, \\ b'_i &= (-a_i a_{11} a_{12} + b_i a_{11}^2 - c_i a_{12}^2 + d_i a_{11} a_{12}) / |A|, \\ c'_i &= (a_i a_{21} a_{22} - b_i a_{21}^2 + c_i a_{22}^2 - d_i a_{21} a_{22}) / |A|, \\ d'_i &= (-a_i a_{12} a_{21} + b_i a_{11} a_{21} - c_i a_{12} a_{22} + d_i a_{11} a_{22}) / |A|, \\ e'_i &= (a_i \alpha_2 a_{11} a_{12} - a_i \alpha_1 a_{11} a_{22} + b_i \alpha_1 a_{11} a_{21} - b_i \alpha_2 a_{11}^2 + c_i \alpha_2 a_{12}^2 - \\ &\quad c_i \alpha_1 a_{12} a_{22} + d_i \alpha_1 a_{12} a_{21} - d_i \alpha_2 a_{11} a_{12}) / |A| + a_{11} e_i + a_{12} f_i + \alpha_i, \\ f'_i &= (a_i \alpha_2 a_{12} a_{21} - a_i \alpha_1 a_{21} a_{22} + b_i \alpha_1 a_{21}^2 - b_i \alpha_2 a_{11} a_{21} + c_i \alpha_2 a_{12} a_{22} - c_i \alpha_1 a_{12}^2 + \\ &\quad d_i \alpha_1 a_{21} a_{22} - d_i \alpha_2 a_{11} a_{22}) / |A| + a_{21} e_i + a_{22} f_i + \alpha_2 \end{aligned} \tag{3}$$

4 实 例

为说明定理 4 的有效性, 我们给出两个例子对二维欧氏空间 \mathbf{R}^2 中的随机 IFS $\{\mathbf{R}^2; f_i; p_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ 进行平移、旋转、拉伸和对称等变换如何得到具体的仿射变换• 以下 $g(\bullet)$ 的确定可参阅文献[3]•

例 1 取 IFS $\{\mathbf{R}^2; f_i; p_i; i = 1, 2\}$ 其中 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} f_1: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.82 & 0.16 \\ -0.16 & 0.81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 137 \\ 14 \end{bmatrix}, \\ f_2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.32 \\ -0.07 & 0.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 70 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

该随机 IFS 的吸引子集为 $\{(76.1174, 9.5854), (88.1645, 163.6628)\}$ • 该随机 IFS 迭代的图像见图 1(a)•

若要把原随机 IFS 迭代的分形图沿 x 轴和 y 轴正方向分别移动 50 个单位, 即

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

则 $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 50$. 代入式(3) 得

$$f_1': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.82 & 0.16 \\ -0.16 & 0.81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 \\ 31.5 \end{bmatrix},$$

$$f_2': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.32 \\ -0.07 & 0.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 93 \end{bmatrix}.$$

该随机 IFS 迭代的分形见图 1(b).

若要把原随机 IFS 迭代的分形图绕点(82.140 5, 86.624 0) (该点是原随机 IFS 吸引子的几何中心) 逆时针旋转 40° , 即

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7660 & -0.6428 \\ 0.6428 & 0.7660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 74.8981 \\ -32.5327 \end{bmatrix},$$

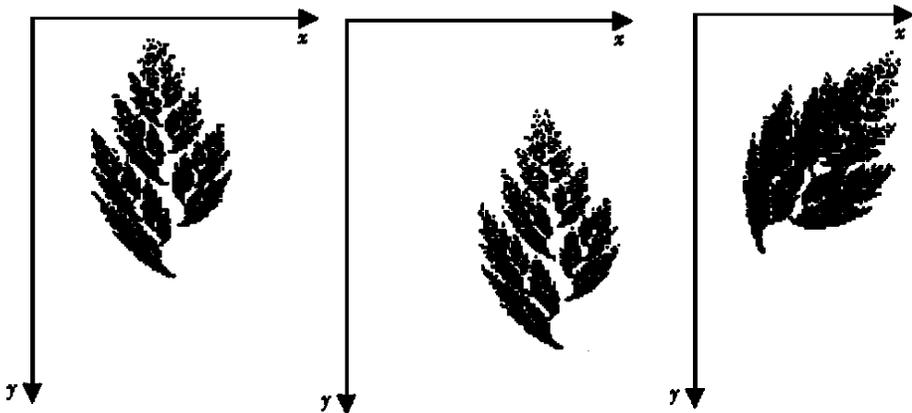
则 $a_{11} = a_{22} = 0.7660, a_{12} = -0.6428, a_{21} = 0.6428, \alpha_1 = 74.8981, \alpha_2 = -32.5327$. 代入式(3) 得

$$f_1'': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1465 & -0.6426 \\ -0.9626 & 0.1365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 160.9152 \\ 142.7935 \end{bmatrix},$$

$$f_2'': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3871 & 0.1330 \\ -0.2578 & 0.6629 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.9356 \\ 59.9757 \end{bmatrix}.$$

该随机 IFS 的吸引子集为 $\{(127.0506, 23.7343), (37.2373, 149.5275)\}$, 新旧吸引子集满足定理 3 所揭示的关系.

该随机 IFS 迭代的分形见图 1(c).



(a)

(b)

(c)

图 1 例 1 原图、平移及旋转图

例 2 取 IFS $\{\mathbf{R}^2; f_i; p_i; i = 1, 2, 3\}^{[3]}$ 其中 $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$,

$$f_1: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.355 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6929 & 0.2870 \\ -0.2870 & 0.6929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1535 \\ 0.4985 \end{bmatrix},$$

$$f_3: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5056 & -0.4408 \\ 0.3674 & 0.6068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2472 \\ 0.0293 \end{bmatrix}.$$

该随机 IFS 迭代的图像见图 2(a)。

若要将原随机 IFS 迭代的分形图做关于 $x = 0.6044$ 的对称变换, 即

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.21 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

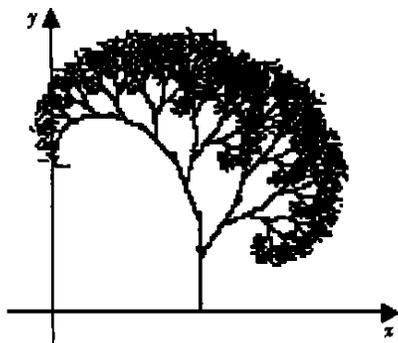
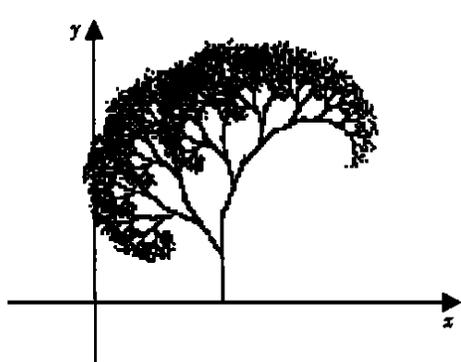
则 $a_{11} = -1, a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0, \alpha_1 = 1.21, \alpha_2 = 0$, 代入式(3) 得

$$f'_1: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.355 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f'_2: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6929 & -0.2870 \\ 0.2870 & 0.6929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2181 \\ 0.1512 \end{bmatrix},$$

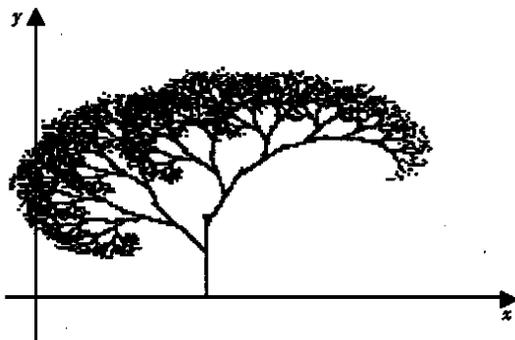
$$f'_3: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5056 & 0.4408 \\ -0.3674 & 0.6068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3510 \\ 0.4739 \end{bmatrix}.$$

该随机 IFS 迭代的分形图见图 2(b)。



(a)

(b)



(c)

图 2 例 2 原图、对称及拉伸图

若要将原随机 IFS 迭代的分形图沿 x 轴方向放大至 1.5 倍, 保持 y 轴方向不变, 即

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

则 $a_{11} = 1.5, a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 代入式(3) 得

$$\begin{aligned}
 f_1': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.355 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 f_2': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.6929 & 0.4305 \\ -0.1913 & 0.6929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2303 \\ 0.4985 \end{bmatrix}, \\
 f_3': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5056 & -0.6612 \\ 0.2449 & 0.6068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3708 \\ 0.0293 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

该随机 IFS 迭代的分形图见图 2(c)。

5 结 束 语

随机 IFS 已经用来产生了各种形态的图形。确定这些物体图形的随机 IFS 仅有很少的几个仿射变换参数。然而,确定这些仿射变换参数仍然是一件非常困难的工作。我们的工作给出了确定一个随机 IFS 迭代的图像经过仿射变换后得到的图像所对应的随机 IFS 的具体方法。它对揭示仿射变换参数的随机 IFS 中的作用提供了某些信息。

由此可以引发几个更为有趣的问题。一是如何选择变换 $g(\cdot)$, 在保持原随机 IFS 迭代的图形不变情况下,使新的随机 IFS 具有最少参数以达到压缩数据的目的。二是如何实现从原有的随机 IFS 到新的随机 IFS 参数之间的连续变换。让分形图形运动起来,以便更逼真的表达现实世界的复杂过程。如树叶的随风飘动,云烟的弥漫扩散等等。三是通过变换的着色和概率的选择来反映大千世界的千姿百态、丰富多彩。我们将在另文中深入探讨这些问题。

[参 考 文 献]

- [1] Barnsley M F. Fractals Everywhere[M]. Orlando, FL: Academic Press Inc, 1988.
- [2] 林贻侠,朱铨范,仲明瑜,等. 吸引子在随机迭代函数系统中的作用[J]. 上海大学学报, 1999, 5(1): 46-53.
- [3] 苏步青,华宣积. 应用几何教程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1990.
- [4] Andrzej Lasota, Michael C. Mackey chaos, fractals and noise[A]. Stochastic Aspects of Dynamics [M]. New York: Springer-Verlag, Inc, 1994.

Affine Transformation in Random Iterated Function Systems

XIONG Yong, SHI Ding_hua

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China)

Abstract: Random iterated function systems (IFSs) is discussed, which is one of the methods for fractal drawing. A certain figure can be reconstructed by a random IFS. One approach is presented to determine a new random IFS, that the figure reconstructed by the new random IFS is the image of the origin figure reconstructed by old IFS under a given affine transformation. Two particular examples are used to show this approach.

Key words: fractal; random iterated function system; affine transformation