

文章编号: 1000-0887(2001) 07-0719-10

小行星运动中的轨道扩散性质^{*}

周礼勇, 孙义燧, 周济林

(南京大学 天文系, 南京 210093)

(李继彬推荐)

摘要: 在详细讨论一个辛映射的过程中, 我们注意到轨道在相空间不同区域有着不同的扩散规律: 在充分发展的混沌区, 残余的轨道数目随时间按指数律衰减; 在混合区域, 则是代数律; 在相空间中特定的区域, 扩散还可以用对数律描述. 在一个稳定的岛屿附近, 逃逸时间的对数随着离开岛屿的距离的增大而线性下降; 而当逼近岛屿的时候, 逃逸时间极迅速地上升, 与不变曲线的超指数稳定性一致. 利用此映射研究小行星运动时, 它的不动点及其稳定性可解释小行星的分布. 此外, 本文还讨论了在 4:3, 3:2 和 2:1 共振处小行星轨道的扩散速度.

关键词: 扩散; 辛映射; 小行星

中图分类号: P136; P134.2 文献标识码: A

引 言

近年来, 轨道在相空间的扩散现象得到了越来越多的重视, 并取得了一系列的成果^[1]. 在天体力学中, 轨道扩散性质可以解释小行星在主带的分布, 特别是可以解释和木星轨道发生共振处的小行星的缺失和聚集现象^[2].

许多方法和工具, 诸如 Liapunov 指数分析、映射方法、频率分析等等都被用来研究这类问题. 在这些方法中, 映射方法因其便于理论分析和节省数值计算时间的特点而得到广泛应用; 也因而发展了不少从原始微分方程导出映射的步骤和方法^[3].

M. Duncan 等人曾经构造了一个映射^[4]并利用它研究太阳系中可能轨道的长期演化问题. 本文首先对这一映射做了详细的讨论, 然后利用它研究处于和木星轨道发生一阶共振处的小行星轨道的扩散性质. 总体上, 本文作如下安排: 第 1 节, 我们介绍这一映射和它的一些性质; 第 2 节讨论该映射中的轨道扩散性质; 然后在第 3 节中我们将它应用到小行星运动问题; 最后我们在第 4 节总结我们的结论.

1 映 射

考虑由零质量的试验体、太阳和另外一个行星组成的三体问题, 其中行星的半长径为 a_p 、偏心率 $e_p = 0$ 而质量 m 远小于太阳质量 M_\odot , 此时试验体在与行星交会点附近的运动可以近似地用 Hill 方程描述. 在 $m \rightarrow 0$ 的条件下, M. Henon 和 J. M. Petit 得到了 Hill 方程的交会形式

* 收稿日期: 2000_03_31; 修订日期: 2001_02_13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19633010, 19903001)

作者简介: 周礼勇(1973—), 男, 江苏人, 讲师, 博士.

解^[5]。由此, 并且假设试验体的初始偏心率 e 很小而它的半长径 a 与行星的半长径差别不大, 即满足条件 $e \ll |a - a_p| / a_m \ll 1$, M. Duncan 等人得到了一个描述试验体轨道根数在一次交会中的变化的映射。而在相邻的两次交会之间, 行星对试验体的影响可以忽略, 因而试验体的运动是 Kepler 运动。

首先引入如下记号:

$$\varepsilon = \frac{a - a_p}{a_p}, \quad y = e \exp\{i[\omega - \lambda + \mathcal{Y}(\varepsilon) - \pi]\}, \quad (1)$$

其中 ω 是近日点角距, λ 是交会点的经度, 而 f 是函数 $f(\varepsilon) \equiv |1 + \varepsilon|^{-3/2} - 1|^{-1}$ 。用这些变量表示的映射是:

$$y_{n+1} = \left\{ y_n \exp[-i\mathcal{Y}(\varepsilon_n) - \frac{ig}{\varepsilon_n^2} \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) \frac{m}{M_\odot}] \exp[-i\mathcal{Y}(\varepsilon_{n+1})] \right\}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \sqrt{1 + \frac{4(|y_{n+1}|^2 - |y_n|^2)}{3\varepsilon_n^2}}, \quad (3)$$

其中 $\operatorname{sgn}(\varepsilon_1)$ 是 ε_1 的符号, g 是如下常数:

$$g = \frac{8}{9}[2K_0(2/3) + K_1(2/3)] = 2.23956667. \quad (4)$$

此系统的雅可比积分是

$$\mathcal{Y} = \frac{3}{4}\varepsilon^2 - |y|^2. \quad (5)$$

为了使这个映射成为辛映射, M. Duncan 将(2)式分母中的 ε_n 替换成 ε_1 。并且他们认为, 由于 ε_n 不会偏离 ε_1 太远, 因而这样的替换不会降低这个映射的精度。

利用(5)式, 可以将 ε_n 从映射中消去。对给定的 \mathcal{Y} , (2)式中的 ε_n 可以写成:

$$\varepsilon_n = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) \sqrt{\frac{4}{3}(\mathcal{Y} + |y_n|^2)}. \quad (6)$$

同时(3)式中的 ε_{n+1} 仅由 ε_n 和 $y_{n, n+1}$ 的模决定, 而我们从(2)式中可以看出 y_{n+1} 的模并不依赖于 ε_{n+1} , 因此 ε_{n+1} 可以表达成 \mathcal{Y} 和 y_n 的函数。将这样的 ε_{n+1} 和 ε_n 代入(2)式, 并分开实部和虚部, 映射就可以重写成:

$$y_{n+1}^r = y_n^r \cos(\phi_n + \phi_{n+1}) + y_n^i \sin(\phi_n + \phi_{n+1}) - C \sin \phi_{n+1}, \quad (7)$$

$$y_{n+1}^i = -y_n^r \sin(\phi_n + \phi_{n+1}) + y_n^i \cos(\phi_n + \phi_{n+1}) - C \cos \phi_{n+1}, \quad (8)$$

其中 y_n^r 和 y_n^i 分别代表 y_n 的实部和虚部; $\phi_{n, n+1} \equiv \mathcal{Y}(\varepsilon_{n, n+1})$ 是 y_n^r , y_n^i 和 \mathcal{Y} 的函数, 而 $C \equiv \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) gm / (M_\odot \varepsilon_1)$ 是常数。

不动点的位置和它们的线性稳定性是一个映射最重要的拓扑性质^[6]。将(7)(8)两式的左边分别换成 y_n^r 和 y_n^i , 解出这个方程组即得到映射的不动点:

$$y_{fp}^i = 0, \quad (9)$$

$$y_{fp}^r = -\frac{C}{2\sin[\phi(y_{fp}^r, y_{fp}^i = 0, \mathcal{Y})]}. \quad (10)$$

(9)式表明所有的不动点都落在实轴上。然后我们计算映射(7)、(8)的切映射 M , 并算出 M 的迹在不动点上的值:

$$\operatorname{Tr}_{fp}(M) = 2\cos(2\phi) + \frac{4\pi C y_{fp}^r \cos \phi}{\varepsilon_f^2 (1 + \varepsilon)^{-3/2} - 1} (1 + \varepsilon)^{5/2}, \quad (11)$$

其中 $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1) \sqrt{\frac{4}{3}(\mathcal{Y} + |y_{fp}^r|^2)}$, $\phi = \mathcal{Y}(\varepsilon)$ 。当 $|\operatorname{Tr}_{fp}(M)| < 2$ 时, 不动点是椭圆型的;

$|T_{rjp}(M)| > 2$ 时, 不动点是双曲型的; 而 $|T_{rjp}(M)| = 2$ 时则是抛物型的。图 1 显示了不动点的位置及其线性稳定性。

令 $m/M_{\odot} = 9.5479 \times 10^{-4}$ (木星质量), 并且对应着试验体的半长径从 2.6AU 到 5.2AU 取 ε_1 的范围从 -0.5 到 0.0 这正是小行星主带的一部分。在图 1 中, 当 $a < 3.15$ AU 时, 有一个稳定的不动点, 并且它所对应的轨道有着接近于 0.0 的偏心率, 这与该区域内除却几个 Kirkwood 空隙之外的小行星轨道的稳定性相一致。此后, 在新的不动点出现之前, 不动点是稳定的, 但对应轨道却具有比较大的偏心率。但有以下两点需要指出: 其一, 固定雅可比常数 γ , 当偏心率 $e = |y|$ 远远偏离 0.0 时, (2) 式中 ε_0 和 ε_1 的替换将显著地降低映射的精度, 这一问题将在第 3 节中继续讨论; 其二, 映射指出该区域的轨道具有较大的偏心率, 而偏心率越大, 则该小行星与其他小行星碰撞的机率越大, 也越容易因此发生轨道迁移, 离开此区域。我们认为这两种机制有可能形成 2:1 共振处 ($a \approx 3.3$ AU) 的小行星分布的空隙。

新的不动点在 $a = 3.36$ AU 处出现, 一经出现立刻就分成稳定的和不稳定的两支。不稳定的那一支很快离开 $e = 0.0$ 的位置, 而稳定的那一支, 一直保持 $e \approx 0.0$ 直到 $a = 3.90$ AU 处才开始远离 $e = 0.0$, 并在 $a = 4.85$ AU 处与不稳定的一支汇合。但是在 $a = 3.69$ AU 附近, 不动点是不稳定的。同时, 我们知道, 对小行星在 3.5AU 到 3.90AU 范围内的缺失的解释时至今日仍然有一定的困难。因此, 出现在 $a = 3.69$ AU 附近的不稳定不动点, 很可能对此现象给出了一些提示。

在 $a = 4.05$ AU 和 $a = 4.25$ AU 处出现的新的稳定不动点, 都对应着 $e \approx 0.0$ 的轨道, 它们的位置和稳定性可以解释 3:2 和 4:3 共振处小行星的聚集现象。正因为如此, 我们在第 3 节用这一映射来研究这两个共振处小行星的稳定性和轨道扩散性质。

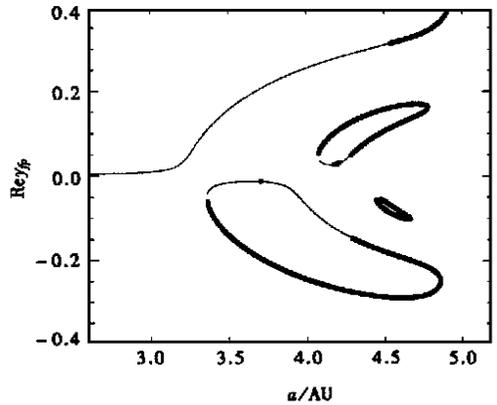
在 $a = 4.25$ AU 之后, 没有发现新的对应小偏心率轨道的稳定不动点, 与该区域不存在小行星的事实一致。

2 映射中的扩散性质

2.1 在混沌区和混合区的扩散

这一节我们要仔细讨论映射中的扩散性质。图 2(a), 图 2(b) 是映射 (7) (8) 对不同 γ 值的轨迹。其中的三个正方形是选定作仔细分析的区域, 从右向左, 将它们记为 A, B 和 C。

在每个正方形中, 随机选定 2500 个点并跟踪它们在映射下轨道的演化。在此过程中, 如果一个点的 $|y|$ 值超过了 0.25, 我们就认为它已经逃逸而不再跟踪。每个点都被跟踪 10^{10} 年 (映射迭代 10^8 到 10^9 次), 除非它已经先于这个时间逃逸。那些一直都未逃逸的点则被认为是稳定的。图 2(a) 的 A、B 和 C 三个区域中, 稳定点的数目分别是 0、2 和 744; 而图 2(b) 中相应



设 $m/M_{\odot} = 9.5479 \times 10^{-4}$, $\gamma = 3\varepsilon_1^2/4$ 。细线代表稳定不动点 ($|T_{rjp}(M)| < 2$); 粗线或点代表不稳定不动点 ($|T_{rjp}(M)| \geq 2$)。为方便起见, 利用方程 (1) 将 x 轴由 ε_1 换成半长径 a , 同时应注意到 $e = |y| = |y_{rjp}^e|$ 。

图 1 映射不动点的位置和稳定性

的数目则是 18、539 和 28。在时刻 T 仍未逃逸的点的总数和稳定点的总数之差被定义为“残余数” N 。

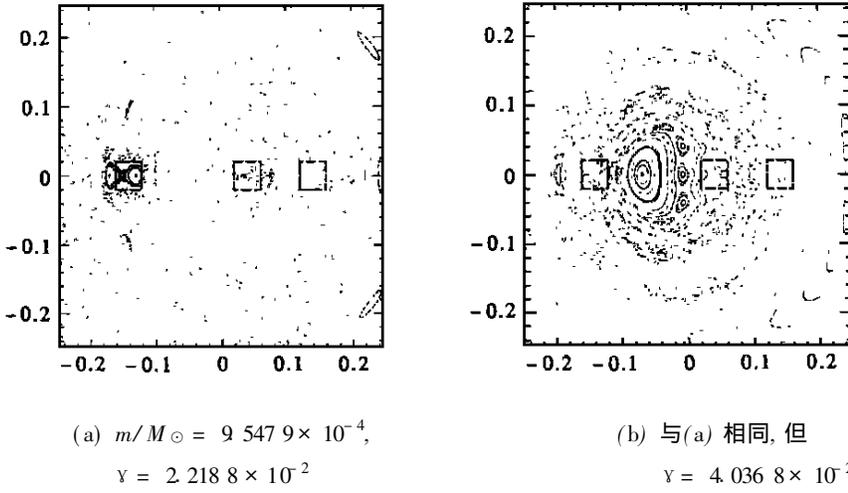
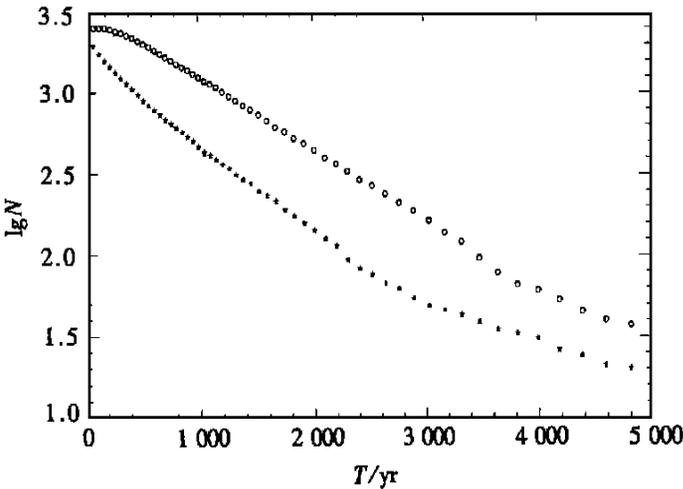


图 2 映射在 y 复平面上的轨道

图 2(a) 中的区域 A 处于开放的混沌海中, 所有 2 500 点最终都逃逸了。与此形成对照的是图 2(b) 中的区域 B 包含了规则轨道和混沌轨道, 是个混合区。这两种区域的逃逸性质显然不同, 图 3 和图 4 分别显示了混沌海和混合区的逃逸性质的细节。

如图 3 所示, 短暂的过渡之后, 充分混沌区的残余数随时间指数衰减: $N(T) = N_0 \times 10^{-\alpha T}$ 。最小二乘法给出在区域 A、B 中的逃逸指数分别是 $\alpha = 5.51 \times 10^{-4}$ 和 $\alpha = 4.41 \times 10^{-4}$ 。另外, 当残余数小于 60 的时候, 衰减速度有所减慢。这是由于即使在混沌海里, 仍然存在一些微小的结构, 因为这些结构极其细微, 所以它们的粘滞效应只影响到了数十个点。



“★”和“⊙”分别代表图 2(a) 中区域 A 和区域 B 的情况

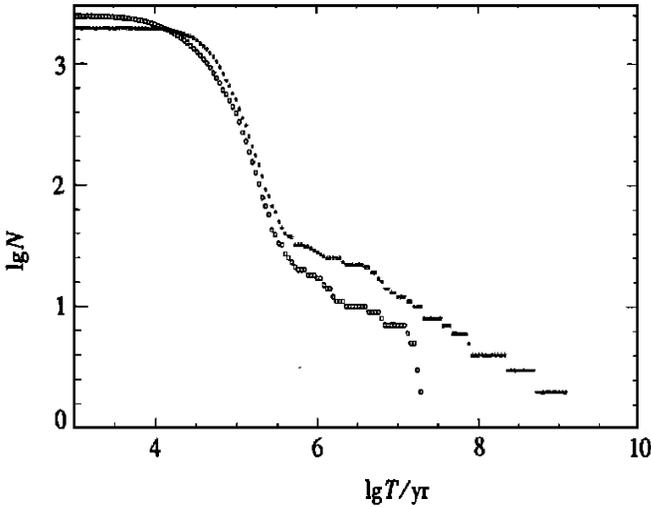
图 3 残余数 $N(T)$ 随时间 T 的变化

图 2(b) 中区域 A 的逃逸也遵循指数律。但由于此处的混沌区未充分发展, 它的逃逸指数相对较小: $\alpha = 6.65 \times 10^{-5}$ 。

在图 4 上可以清晰地看到线性关系, 而在 $\lg N \sim \lg T$ 坐标下, 线性关系意味着残余数随时

间以代数律衰减 $N(T) \sim T^{-\beta}$ 。当 $5.0 < \lg T < 5.5$ 时, 最小二乘法分别给出指数为 $\beta = 1.99$ (区域 B) 和 $\beta = 2.15$ (区域 C)。但当 $\lg T > 5.5$ 时, 我们看到这个线性关系被另外具有不同斜率的线性关系所取代。此时的指数为 $\beta = 0.412$ 和 $\beta = 0.416$ 。这与 Y. C. Lai 等人的发现吻合^[7]。他们用“相空间形变”对此现象作出了解释。在“相空间形变”中, 当旧的 KAM 环面破裂时, 新的环面暴露出来, 新环面的粘滞性给出新的扩散指数。

图 2(a) 中的区域 C 包含了一个大的岛屿和紧邻岛屿的混沌区, 与上述两种区域有区别, 我们将在下一小节继续讨论。



“★”和“?”分别代表图 2(b) 中区域 B 和区域 C 的情况

图 4 残余数 $N(T)$ 随时间 T 的变化

2.2 KAM 环面附近的扩散速度

为了研究紧邻不变环面的区域内扩散速度的细节, 我们在相空间中选定一条从不变环面开始穿过它的临近区域最后到达混沌海的直线段。令初始点等间隔地分部在这条直线上, 然后计算各点的逃逸时间。

如图 5 所示, 在 $\nu = 3\epsilon_1/4 - 0 = 2.2188 \times 10^{-2}$ 的复 y 空间(相空间)的实轴上, 取从 $y^r = -0.122$ 到 $y^r = -0.070$ 的线段。在此线段的区间 $y^r \in (-0.122, -0.0999)$ 和 $y^r \in (-0.099, -0.070)$ 上, 分别等距离设置 23 000 和 5 800 个初始点。每个初始点的演化都被跟踪 10^9 年, 除非它先于此时间逃逸。图 6 是计算结果, 其中的空隙对应着当线段穿过小岛屿, 逃逸时间变为无穷的情况。

很难确定线段左端所在岛屿的最外一条不变曲线的具体位置, 但这并不影响我们确定逃逸时间的初始点离开最外层不变曲线的距离 d 之间的关系。图 6 中的虚线显示了逃逸时间的对数值和距离 d 之间的线性关系。或者, 写成指数形式, 即 $T \sim 10^{-kd}$, 我们的计算给出 k 的值大约为 135。

实际上, 整个相空间可看成由三种不同的区域组成, 而该线段从右往左一个接一个穿过它们。先是混沌区 ($y^r > -0.098$); 然后是粘滞层 ($-0.120 > y^r > -0.098$), 这里逃逸时间的对数随着距离 d 线性降低; 而第三种区域则是紧邻岛屿的一层, 其逃逸规律不同于前两者。

在图 6 中可以看出混沌区的逃逸时间在 100 年到 1 000 年之间随机分布。另外, 区间

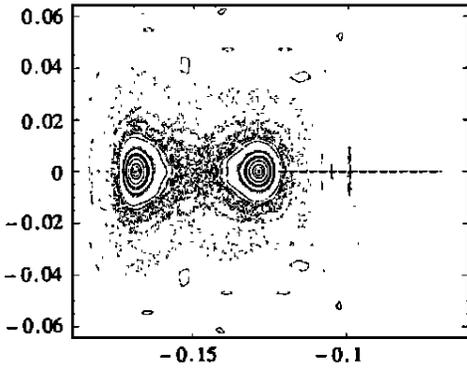


图5 周期2不动点附近的
结构和选定的线段

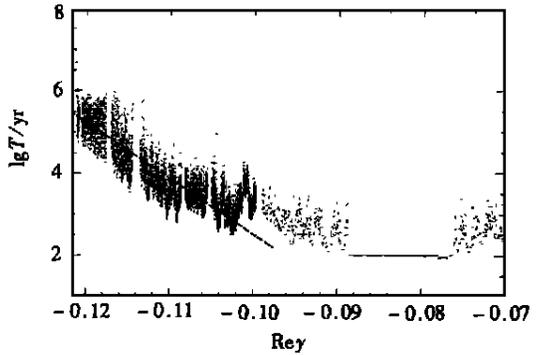


图6 逃逸时间随 y^r 的变化, 其中
划线表示二者的线性关系

$-0.088 < y^r < -0.078$ 上的大的空隙是源于逃逸判据的选取, 如果在这儿用 0.35 代替 0.25 作为阈值, 这个空隙就消失了。

我们用一个简化的模型来给出粘滞层中轨道扩散的规律。假设总面积为 S 的相平面中心是一个被圆形不变曲线围绕的稳定不动点, 而最外层不变曲线所形成的圆的半径是 r_0 , N_0 个初始点随机分布在这样的相平面内。按照图 6 所示的线性关系, 可以知道与不动点之间距离为 r 的点的逃逸时间近似为:

$$\lg T \approx -k(r - r_0) + C_0 \quad (r_0 < r < r_c), \quad (12)$$

其中 C_0 是 $r = r_0$ 处 $\lg T$ 的值, r_c 是粘滞层和发达混沌区之间的边界。所有落在半径为 r 的圆之外的点都在时间 T 之前逃逸, (12) 式给出了 r 和 T 之间的关系。因此, 在 T 时刻的残余数 (不包括那些落在半径为 r_0 的圆以内的稳定点) 是,

$$N(T) \approx N_0 \left[\frac{\pi r^2}{S} - \frac{\pi r_0^2}{S} \right] \approx \frac{\pi N_0 (kr_0 + C_0)^2}{Sk^2} \left[1 - \frac{\lg T}{kr_0 + C_0} \right]^2 - \frac{\pi N_0 r_0^2}{S}, \quad (13)$$

令 C_1 是 $r = r_c$ 处 $\lg T$ 的值, 则 $k(r_c - r_0) = C_0 - C_1$; 并假设粘滞层的厚度与稳定岛屿的半径可比拟, 也就是 $r_c - r_0 \approx r_0$, 那么当 $\lg T$ 的值不是太大的时候, 就有 $\lg T \ll kr_0 + C_0 \approx 2C_0 - C_1$, 所以 (13) 式就可以近似为:

$$N(T) \approx C_2 - C_3 \lg T, \quad (14)$$

其中 $C_{2,3}$ 是常数。(14) 说明在这样的区域中残余数随时间以对数律衰减。

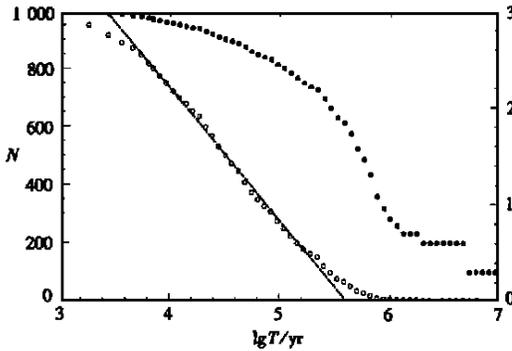
作为验证, 我们计算了图 5 中岛屿际近的一个区域内 1024 个初始点的演化, 而图 7 所示的计算结果证实了这个规律。在 $\lg T = 3.5$ 到 $\lg T = 5.5$ 的时间段内, N 从 900 下降到 100, 这个过程, 几乎严格地遵循对数律。而代数律只在 $\lg T = 5.5$ 、 N 小于 100 时才能观察到。

另一方面, 当初始点的位置更加靠近图 5 中线段的左端时, 逃逸时间极迅速地上升。我们放大图 6 左端 y^r 从 -0.121204 到 -0.121130 的一段, 并仔细计算逃逸时间, 得到图 8。图 8 看起来与图 6 相似, 但有两点需要强调: 第一, 此时若继续用线性关系来拟合, 得到的斜率的绝对值是 2120.0, 远远大于图 6 中的 k 值; 第二, 在图 8 的左端, 仍然可以看到逃逸时间极其陡峭的上升, 也就是说, 如果继续逼近稳定岛屿外的不变曲线, 将会看到类似图 8 的结构和更大的斜率的绝对值。这两点与由 Nekhoroshev 定理导出的稳定环面的超指数稳定性相一致^[8]。这样非常薄的、具有超指数扩散特性的一层, 就是混沌区和粘滞层之外的第三种区域。而极长

时间的扩散性质, 应该是由这样的一层所决定的。

实际上, 由于不变曲线附近复杂的结构, 在混合区内长时间的扩散, 也可以表现出复杂的特性。最后的扩散速度, 不仅仅依赖于所讨论的系统, 也依赖于所讨论的具体区域。

众所周知, 尽管先进计算机的速度已经获得了极大的提高, 对众多试验体进行长期的数值模拟仍然需要耗费大量的时间。比如有人对 1 050 个试验小天体用辛积分分到 100 兆年, 就耗费了 20 台 PC 机超过 4 个月的时间^[9]! 因而到最后还是不得不求助于外推的方法来对太阳系年龄(约 45 亿年)的情景作出预测, 此时谨慎地选择合理正确的外推规律就显得非常必要。



对“★”和“?”，y 轴分别是 $\lg N$
(从 0.0 至 3.0) 和 N 从(0 到 1 000)

图 7 残余数随时间的变化

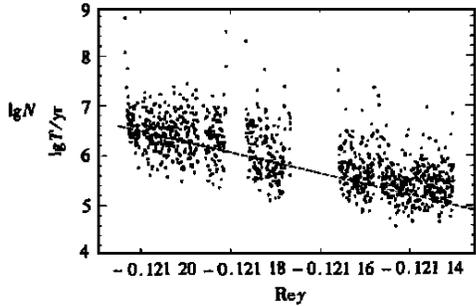


图 8 同图 6, 但 y' 的范围不同

3 应用于小行星运动

现在用这个映射来研究小行星主带内一阶共振处轨道的稳定性。尽管这个映射是基于近似条件 $e \ll |\varepsilon| \ll 1$, 但当我们定性研究问题时, 它甚至在 $|\varepsilon| = 0.5$ 时都能给出可信的结果。(比如在文献[4]中, 最大的 $|\varepsilon|$ 值大约是 0.45, 其结果仍然是可信的。)但为了保险起见, 我们只将它应用到 3: 2 和 4: 3 共振处, 此时 ε 的值分别是 -0.237 和 -0.175 。

因为映射(7)、(8)关于实轴对称, 只选代表性的 0° 、 90° 和 180° 作为 y 的初始相角来讨论。对每个角度, 在如下 (a, e) 平面上随机取 1 024 个初始轨道:

$$a_0 \in (a_r - 0.02, a_r + 0.02), \quad e_0 \in (0.0, 0.1) \tag{15}$$

其中 a_r 是精确地处于共振的轨道半长径, 对 3: 2 和 4: 3 共振而言, a_r 分别是 0.763 和 0.825(木星单位)。然后, 每个轨道都被跟踪 10^9 年, 除非它穿过了木星或火星的轨道, 此时它被认为已经逃出小行星主带。

为了检验映射的可靠性, 在图 9 中对在两个共振带观测到的小行星的轨道根数和映射给出的根数作了比较。我们记录了随机选定的初始轨道演化到 10^8 年至 10^9 年之间的轨道根数, 并将它们标在图 9 中(小点)。因此点的密度较高的区域, 也就是映射预测的小行星轨道根数最可能表现出来的值。在图 9 中, 我们发现几乎所有观测到的小行星的根数(星号)都落在了点密度较高的区域, 也就是说, 映射给出的预测和观测值吻合得相当好。

那些轨道根数满足以下条件的小行星被认为是仍然停留在共振区, 它们的总数随时间的变化被记录下来。

$$a \in (a_r - 0.02, a_r + 0.02), \quad e_0 \in (0.0, 0.25) \tag{16}$$

之所以选择 $e = 0.25$ 作为判据的依据, 一方面是因为映射近似条件的限制, 另一方面是因为具有较大偏心率的小行星同时也具有较大的因与其它小行星碰撞而迁移的机率。象上一节所做的一样, 定义轨道的残余数为在时刻 T 满足(16)式条件的轨道总数与在 10^9 年之后仍然满足(16)式的轨道数的差。

数值计算的结果表明在轨道演化开始的数百年至数千年内, 轨道的残余数都有一个快速的随时间指数衰减的过程。然后, 类似于上节讨论的在混合区域的扩散, 残余数的随时间按代数律衰减。为了比较不同共振区的情况, 我们一律用以下规律拟合数据:

$$N(T) = \frac{10^a}{T^b} \quad (17)$$

拟合的结果在表1中给出。其中第二列 ϕ^0 是初始相角, 它与试验体的初始位置有关。第三列 N_s 是在计算中一直不逃逸的轨道数目。

我们看到 3:2 共振处的 N_s 值总是大于 4:3 共振的 N_s 值, 这与以下事实一致: 在 Hilda 群 (3:2 共振处) 中观测到超过 70 颗的小行星, 而 4:3 处只观测到一颗 (279Thule)。即使处于同一共振而初始相角 ϕ 不同, 那么 N_s 也不同, 反映了相空间的各向异性性质。此外, 3:2 共振处除了比 4:3 共振处具有较多的稳定轨道数目之外, 它的轨道残余数的衰减指数 b 比 4:3 共振处的指数要小, 也就是说 3:2 共振处轨道扩散的速度比 4:3 共振处的要慢。

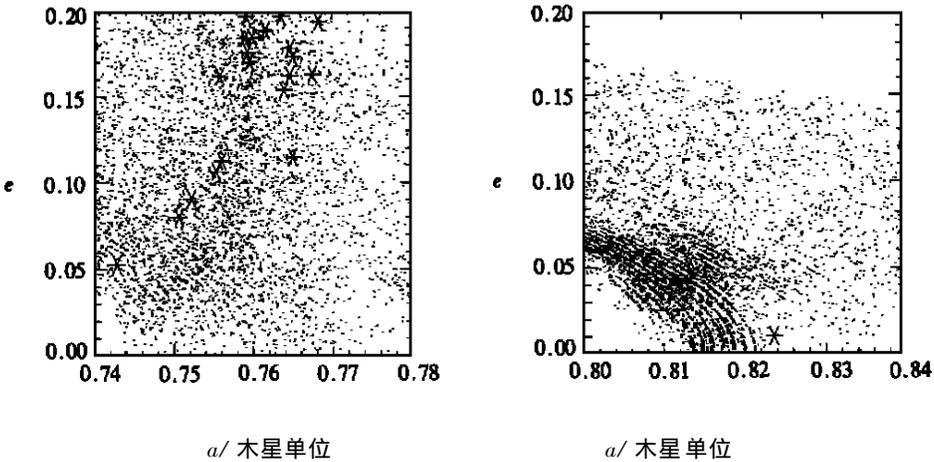


图9 共振区小行星轨道根数数值计算的结果和实际观测值的比较

将映射应用到 2:1 共振 ($a_r = 0.64$) 的时候, 我们在计算中没有发现明显的轨道扩散, 但却注意到 ε_n 的值在计算过程中显著变化。考虑到(2)式中 ε_n 和 ε_1 之间的替换是基于 ε_n 不会显著地偏离 ε_1 的近似条件, 同时我们还知道只有在(2)式中作了这样的变换之后, 映射才具有辛的性质。作为一种妥协, 我们在计算中监测 ε_n 的变化, 一旦它偏离初值超过 1%, 就将 ε_1 改为当前的 ε_n 值, 继续计算。每一步映射仍然是保辛的, 但整个计算过程却不一定。

在作了这样的修正之后, 我们重新计算 4:3、3:2 和 2:1 共振的情况。我们选定 0° 、 45° 、 90° 、 135° 和 180° 作为初始相角, 对每一个相角仍如上先前一样在 (a, e) 平面内取 1024 个初始轨道, 将每个共振处的共 5120 个试验体的结果总结在表 2 中。

表 1 3:2 和 4:3 共振处的拟合结果

共振	φ^0	N_s	a	b
3:2	0°	255	3.14	0.351
3:2	90°	310	3.09	0.361
3:2	180°	875	3.45	0.375
4:3	0°	120	3.69	0.534
4:3	90°	9	3.78	0.538
4:3	180°	12	3.64	0.528

表 2 修正后映射的拟合结果

共振	N_s	a	b
2:1	17	22.4	5.32
3:2	105	8.76	2.26
4:3	12	7.87	2.16

现在我们看到 2:1 的空隙出现了——在 5 120 个轨道中, 仅有 17 个轨道保留到最后。4:3 和 3:2 共振处的残余数衰减指数相近, 而 2:1 处的指数却是前两者的两倍。因此 2:1 处的轨道扩散速度是远快于 3:2 和 4:3 共振处的轨道扩散。在 D. Nesvomy 和 S. Ferraz_Mello 用频率分析的方法研究小行星一阶轨道共振问题时发现, 3:2 和 4:3 共振处的轨道逃逸速度指数基本相同, 而 2:1 处的指数则比前两者高两个量级^[2]。定性地看, 我们的粗略结果和他们的结果是一致的。

实际上, 小行星在 2:1 共振处形成的空隙起源至今仍是悬而未决的问题。人们发现即使在三维的三体模型中, 此处的相空间还是非常稳定的^[10]。人们引入了许多复杂的机制试图解决这一挑战性的问题。本文并不能指望用这样一个简单的模型来解决这一

问题, 但我们相信我们的工作能给出一些有益的提示。

4 结 论

本文仔细研究了一个由 M. Duncan 构造的映射。通过计算它的不动点和不动点的线性稳定性, 定性解释了小行星在主带的分布。

本文详细研究了映射中的轨道扩散性质。发现在混沌海和混合区里残余数分别按指数律和代数律随时间衰减; 本文还在稳定岛屿附近发现了对数律的衰减规律。此外, 由于不变环面附近相空间结构是很复杂的, 长时间轨道扩散也表现出复杂规律。因此本文认为在利用外推法作出估计的时候, 应该非常谨慎。

本文将相空间分成了三种不同的区域: 混沌海、粘滞层和不变曲线的紧邻部分。在混沌海中, 逃逸时间几乎处处一致; 在粘滞带里, 逃逸时间随着与不变曲线的距离的增加而指数下降; 而在紧邻不变曲线的薄层内, 在向不变曲线逼近的过程中, 逃逸时间极其迅速地上升, 显示了不变曲线的超指数稳定特性。本文还给出了对数逃逸规律的一个直观解释。

利用这一映射来讨论小行星主带内 3:2 和 4:3 共振处小行星轨道的运动时, 本文发现前者不但较后者有更多的轨道保留到 10^9 年, 它的轨道扩散的指数也较后者要小。这些, 可以解释小行星数目在共振区的分布。

在简单的修正之后, 这个简单的模型还表明 2:1 共振处的轨道扩散速度远远快于 3:2 和 4:3 共振处, 给出了 2:1 共振处小行星的空隙的定性解释。

[参 考 文 献]

- [1] Meiss J D. Symplectic maps, variational principles, and transport[J]. Rev Mod Phys, 1992, 64(3): 795—848; Contopoulos G. Analysis and Modeling of Discrete Dynamical Systems [M]. Netherlands: OPA, 1998, 35—90; Sun Y S, Fu Y N. Diffusion characters in a four-dimensional volume pre-

- serving map[J]. *Cel Mech Dyn Astron*, 1999, **73**(4): 249—258.
- [2] Nesvorný D, Ferraz_Mello S. On the asteroidal population of the first_order jovian resonances[J]. *Icarus*, 1997, **130**(2): 247—258.
- [3] Froeschle C, Lega E. Analysis and Modeling of Discrete Dynamical Systems [M]. Netherlands, OPA, 1998, 3—54; Hadjidemetriou J D. Analysis and Modeling of Discrete Dynamical Systems [M]. Netherlands: OPA, 1998: 249—282.
- [4] Duncan M, Quinn T, Tremaine S. The long_term evolution of orbits in the solar system: a mapping approach[J]. *Icarus*, 1989, **82**(3): 402—418.
- [5] Henon M, Petit J.M. Series expansions for encounter_type solution of hills problem[J]. *Cel Mech*, 1986, **38**(2): 67—100.
- [6] Hadjidemetriou J D. Predictability, Stability and Chaos in n_Body Dynamical Systems [M]. Netherlands: Plenum Press, 1991, 157—175.
- [7] Lai Y C, Grebogi C, Blumel R. Algebraic decay and phase_space metamorphoses in microwave ionization of hydrogen rydberg[J]. *Phys Rev A*, 1992, **45**(12): 8284—8287.
- [8] Morbidelli A, Giorgilli A. Chaos and diffusion in hamiltonian systems[M]. France: Editions Frontiers, 1995, 65—112.
- [9] Evans N W, Tabachnik S. Possible long_lived asteroid belts in the inner solar system[J]. *Nature*, 1999, **399**: 41—43.
- [10] Ferraz_Mello S, Michtchenko T A, Roig F. Determinant role of Jupiter's great inequality in the depletion of the hecuba gap[J]. *Astron J*, 1998, **116**(3): 1491—1500.

Diffusion Characters of the Orbits in the Asteroid Motion

ZHOU Li_yong, SUN Yi_sui, ZHOU Ji_lin

(Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093, P R China)

Abstract: A symplectic mapping is studied carefully. The exponential diffusion law in developed chaotic region and algebraic law in mixed region were observed. An area was found where the diffusion follows a logarithmic law. It is shown in the vicinity of an island, the logarithm of the escape time decreases linearly as the initial position moves away from the island. But when approaching close to the island, the escape time goes up very quickly, consistent with the superexponential stability of the invariant curve. When applied to the motion of asteroid, this mapping's fixed points and their stabilities give an explanation of the distribution of asteroids. The diffusion velocities in 4:3, 3:2 and 2:1 jovian resonances are also investigated.

Key words: diffusion; symplectic mapping; asteroid