

文章编号: 1000-0887(2001) 07-0673-09

三维弹塑性有摩擦接触问题求解 的一个新算法*

张洪武, 钟万勰, 顾元宪

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 空间弹塑性有摩擦问题是两种非线性相互耦合的边值待定问题, 由于涉及到空间接触问题, 切向滑动状态的确定就成为一个重要的方面, 为获得高精度的结果, 大量的计算工作是难免的. 规划法与迭代法是处理这类问题的两种重要的方法. 作者提出了将这两种方法相结合的规划-迭代算法, 充分利用两种方法各自的长处来处理空间弹塑性接触问题. 数值结果表明了所提出算法的良好性能.

关键词: 三维有摩擦接触; 弹塑性; 规划法; 迭代法; 有限元法

中图分类号: O221; O242. 21 **文献标识码:** A

引 言

机械、航空航天、土木工程等领域存在着大量的接触问题, 因这一问题的难度大, 因而描述一般接触系统的力学模型与求解技术多年来仍在不断地研究进行. 单边性是联系一切摩擦接触系统的共性, 也是导致问题非线性的本质所在. 由于接触往往伴随着接触区域临近的材料区域的非线性, 因而材料非线性与有摩擦接触双重非线性耦合问题则成为问题研究的必然. 文[1]将变分原理应用到弹塑性问题中, 在变分泛函中引入参变量, 成功地建立了适应性很广的弹塑性模型, 文[1, 2]进一步利用弹塑性问题和接触问题的相似性, 通过惩罚因子导出接触刚度阵, 给出平面接触问题的流动函数和势函数. 本文则是利用参变量二次规划方法, 在空间弹塑性有摩擦接触问题分析领域开展进一步的研究工作. 在实际结构分析中, 能简化成平面问题求解的题目是有限的, 研究求解三维问题的方法是必要的. 文[3]在处理这类问题方面有独到之处, 然而由于这一问题的特殊性, 虽然有些文献认为所提出的方法可处理三维问题, 可进行的工作一般仅是针对平面问题^[4]. 实际上, 二维的研究成果向三维推广并非易事, 其中有两个最主要的困难^[5], 其一: 切向摩擦力方向难以确定; 其二, 问题求解工作量大大增加. 本文的算法就是针对这一问题而提出的, 其目的是在减少计算工作量的同时提高问题的求解精度.

* 收稿日期: 1999_03_15; 修订日期: 2001_01_15

基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助(G1990328), 国家教育部骨干教师基金资助项目

作者简介: 张洪武(1964—), 男, 辽宁大连人, 教授, 工程力学博士, 博士生导师;

钟万勰(1934—), 男, 浙江德清人, 教授, 中国科学院院士.

1 空间弹性接触问题的提法

问题的基本方程可表述如下:

$$\text{平衡方程} \quad d\sigma_{ij,j} + db_i = 0; \quad (1)$$

$$\text{协调方程} \quad d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}); \quad (2)$$

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^e);$$

$$\text{本构方程} \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \mathcal{N}) \leq 0; \quad (3)$$

$$d\varepsilon_{kl}^e = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \quad (f = 0), \\ = 0 \quad (f < 0); \end{array} \right.$$

$$n_j d\sigma_{ij} = dp_i, \quad (S_p \text{ 上});$$

$$\text{边界条件} \quad du_i = du_{i,} \quad (S_u \text{ 上}), \quad (4)$$

$$du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* \geq 0, \quad (p_n \leq 0),$$

$$p_n(du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^*) = 0,$$

$$|p_\tau| < -\mu p_n \text{ 时, } |du_\tau^{(1)} - du_\tau^{(2)}| = 0,$$

$$|p_\tau| = -\mu p_n \text{ 时, } |du_\tau^{(1)} - du_\tau^{(2)}| \geq 0.$$

(S_c 上)

其中各参数与变量的物理意义与传统的使用记法相同,不再描述。

本构关系式(3)可通过 Taylor 展开而转换为如下形式^[1]

$$f_\alpha^0 + W_\alpha d\varepsilon - M_\alpha \lambda \leq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m, \lambda \geq 0), \quad (5)$$

其中

$$W_\alpha = \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma} \right] D, \quad M_\alpha = W_\alpha \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon} \right]^T \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \delta} h^T. \quad (6)$$

而 f_α^0 为增量步的初始值, m 表示本构关系中的屈服面个数。

弹性接触面(见图1) S_c 上的边界条件也可作相应的替代^[2,3]。与平面接触问题不同, Coulomb 摩擦定律应在全圆周上表示,这也是三维接触问题的一个难点。其形式为(见图2,3)

$$C_\infty(p_n) = \left\{ \begin{array}{l} p_\tau: f = |p_\tau| + \mu p_n \leq 0, \\ p_\tau = p_{\tau_1} i + p_{\tau_2} j \end{array} \right\}, \quad (7)$$

为建立线性互补方程,式(7)的离散形式可表

为

$$C_N = \left\{ \begin{array}{l} P_\tau: f_i(p_\tau, p_n) \leq 0, \\ i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\}, \quad (8)$$

$$f_i = [\cos \alpha_i, \sin \alpha_i, \mu] [p_{\tau_1}, p_{\tau_2}, p_n]^T.$$

为表示 S_c 上的非穿透条件,引入惩罚因子 E_τ, E_n 与接触应变定义

$$d\varepsilon_c = d\varepsilon_c^e + d\varepsilon_c^p, \quad dp_c = D_c(d\varepsilon_c - d\varepsilon_c^e), \quad (9)$$

其中

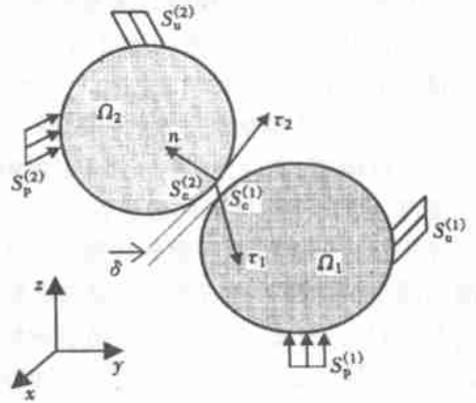


图1 空间接触问题

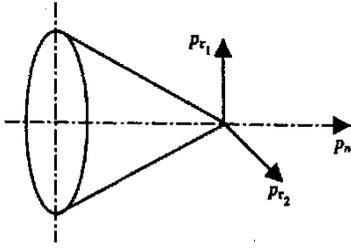


图2 Coulomb 摩擦定律

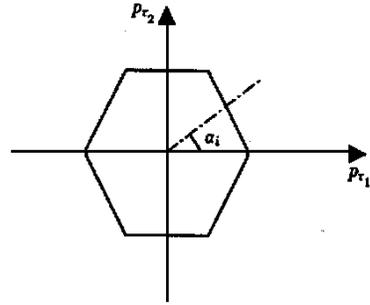


图3 Coulomb 摩擦定律线性化

$$d\epsilon_c = [d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_n], \quad D_c = \begin{bmatrix} E\tau & 0 & 0 \\ 0 & E\tau & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{bmatrix},$$

$$d\epsilon_1 = du_{\tau_1}^{(1)} - du_{\tau_1}^{(2)} = \Delta u_{\tau_1}, \quad d\epsilon_2 = du_{\tau_2}^{(1)} - du_{\tau_2}^{(2)} = \Delta u_{\tau_2}, \quad (10)$$

$$d\epsilon_n = du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* = \Delta u_n + \delta^* \cdot$$

这里 δ^* 为增量步初始间隙。通过定义接触面滑动“屈服”函数 f_i 和“流动”势函数 g_i

$$\left. \begin{aligned} f_i &= p_{\tau_1} \cos \alpha_i + p_{\tau_2} \sin \alpha_i + \lambda p_n \leq 0, \\ g_i &= p_{\tau_1} \cos \alpha_i + p_{\tau_2} \sin \alpha_i, \\ f_{N+1} &= p_n \leq 0, \quad g_{N+1} = p_n \quad (i = 1, 2, \dots, N) \cdot \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则滑动应变可表示为

$$d\epsilon_c = \lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial p_c} = \left(\frac{\partial g^T}{\partial p_c} \right) \lambda \quad (\lambda \geq 0), \quad (12)$$

如此可将 S_c 上的接触边界条件演变成

$$f_k^0 + W_k d\epsilon_c - M_k \lambda \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N+1, \lambda \geq 0), \quad (13)$$

其中

$$W_k = \left[\frac{\partial f_k}{\partial p_c} \right]^T D_c, \quad M_k = \left[\frac{\partial f_k}{\partial p_c} \right]^T D_c \left(\frac{\partial g}{\partial p_c} \right)^T. \quad (14)$$

2 参数二次规划求解

首先可建立空间弹塑性接触分析的参变量最小势能原理: 在所有满足应变位移关系与位移边界条件的可能位移增量场中, 真实解使势能

$$\Pi[\lambda, \lambda] = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} du_{i,j} D_{ijkl} du_{k,l} - \lambda R_{kl\alpha} du_{k,l} - db_i du_i \right] d\Omega + \int_{S_c} \left[\frac{1}{2} d\epsilon_{ci} D_{cij} d\epsilon_j - \lambda R_{k\alpha} d\epsilon_{ck} \right] ds - \int_p dp_i du_i ds \quad (15)$$

在状态方程(5), (13)的控制下取极小值。其中

$$\left. \begin{aligned} R_{kl\alpha} &= \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \sigma_j} D_{ijkl}, \quad R_{k\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial p_{ci}} D_{cik}, \\ d\epsilon_c &= [d\epsilon_{c1}, d\epsilon_{c2}, d\epsilon_{c3}]^T, \quad dp_c = [dp_{\tau_1}, dp_{\tau_2}, dp_n]^T, \\ D_{cij} &= \delta_{ij} E\tau = \delta_{ij} E_n = \delta_{ij} E \cdot \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

限于篇幅,证明从略。

基于上述变分原理,可建立一套针对空间弹塑性问题分析的有限元列式。设区域划分的单元个数 N_E , 自由度数 N_u , 塑性单元数 N_p , 接触单元个数 N_c , 全部塑性单元共依赖于 m_p 个塑性状态方程, 接触状态方程共有 m_c 个, 则全部控制方程个数为 $m_f = m_p + m_c$ 。通过单元离散插值, 式(15)化为

$$\Pi \lambda J = \frac{1}{2} d u^T K d u - d u^T (\Phi \lambda + p), \quad (17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^{N_e} k_e + \sum_{e=1}^{N_c} k_e^c \in \mathbf{R}^{N_u \times N_u}, \quad k_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T D \mathbf{B} d\Omega, \quad k_e^c = \int_{S_c^e} \mathbf{N}^T D_c \mathbf{N} ds, \\ p &= p_0 - p_\delta \in \mathbf{R}^{N_u \times 1}, \quad p_\delta = \sum_{e=1}^{N_c} k_e^c \delta_c^*, \quad p_0 = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T d b d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T d p ds \right\}, \\ \Phi &= \sum_{e=1}^{N_p} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T d\Omega + \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \mathbf{N}^T \mathbf{R}^T ds \in \mathbf{R}^{N_u \times m_f}, \quad \lambda' = [\lambda^T, \lambda^T]^T, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

而式(5), (13)的离散形式为

$$\left. \begin{aligned} C d u - U \lambda' - t + v' &= \mathbf{0}, \\ v'^T \lambda' &= \mathbf{0}, \quad (v', \lambda' \geq \mathbf{0}), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C &= \sum_{e=1}^{N_p} \int_{\Omega_e} \mathbf{W}_e \mathbf{B} d\Omega + \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \mathbf{W}_e \mathbf{N} ds \in \mathbf{R}^{m_f \times N_u}, \\ U &= \sum_{e=1}^{N_p} \int_{\Omega_e} \mathbf{M}_e d\Omega + \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \mathbf{M}_e ds \in \mathbf{R}^{m_f \times m_f}, \\ t &= t_0 + t_\delta, \quad t_\delta = - \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \mathbf{W}_e ds \delta_c^*, \quad t_0 = - \sum_{e=1}^{N_p} \int_{\Omega_e} f_0^e d\Omega - \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} f_0^e ds. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(17), (19)实际上构成了一个二次规划问题, 其将演变为下列问题的求解

$$\left. \begin{aligned} v' - (U - C K^{-1} \Phi) \lambda' &= - C K^{-1} P_0 + t_0 - (U - C K^{-1} \Phi) \delta_c^*, \\ v'^T \lambda &= \mathbf{0} \quad (v', \lambda' \geq \mathbf{0}). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

注意到初始缝隙 δ_c^* 已由位移空间转化到控制参数 λ' 对应的空间上了。

式(21)的求解是一个互补方程的去解问题。但是应当注意, 由于惩罚因子 $E \rightarrow \infty$ 的引入, 会使问题求解精度受到影响, 为了解决这一问题, 可将结构总位移向量分成普通位移向量 N_{ui} 与接触相对位移 N_{uo} 。如此式(21)中各矩阵的形式将为

$$\left. \begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} K_{11(N_{ui} \times N_{ui})} & K_{12(N_{ui} \times N_{uo})} \\ K_{21(N_{uo} \times N_{ui})} & K_{22} + E K_{22(N_{uo} \times N_{uo})}^* \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} p_{oi(N_{ui} \times 1)} \\ p_{oo(N_{uo} \times 1)} \end{bmatrix}, \quad t_0 = \begin{bmatrix} t_{oi(mp \times 1)} \\ t_{oo(mc \times 1)} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_{11(mp \times np)} & C_{12(np \times mc)} \\ 0_{(mc \times np)} & E C_{22(mc \times mc)}^* \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11(np \times mp)} & 0_{(np \times mc)} \\ \Phi_{21(mc \times mp)} & E \Phi_{22(mc \times mc)}^* \end{bmatrix}, \\ U &= \begin{bmatrix} U_{11(mp \times np)} & 0 \\ 0 & E U_{22(mc \times mc)}^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

可以证明

$$EU'_{22} = EC'_{22} \Phi'_{22} \tag{23}$$

利用式(22), 经过一番推导, 可将式(21) 分解成

$$\left. \begin{aligned} v - (U_{11} - C_{11}K_{11}^{-1} \Phi_{11}) \lambda - (C_{11}K_{11}^{-1}K_{12} - C_{12}) \Phi'_{22} \lambda = \\ - C_{11}K_{11}^{-1}p_{0i} + t_{0i} - (C_{11}K_{11}^{-1}K_{12} - C_{12}) \delta_c^* + O\left(\frac{1}{E}\right), \\ v - C'_{22}(K_{21}K_{11}^{-1} \Phi_{11} - \Phi_{21}) \lambda - C'_{22}K_{22}^* \Phi'_{22} \lambda = \\ - C'_{22}p_0^* + t_{00} - C'_{22}K_{22}^* \delta_c^* + O\left(\frac{1}{E}\right), \\ v^T \lambda = 0, \quad v^T \lambda = 0, \quad v, \lambda, v, \lambda \geq 0, \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

其中

$$K_{22}^* = K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}, \quad p_0^* = p_{00} - K_{21}K_{11}^{-1}p_{0i}, \tag{25}$$

恰是子结构分析中的凝聚公式。因而利用子结构方法进行编程将是方便的。当 $E \rightarrow \infty$ 时, 式(24) 中的惩罚因子自然消除。

3 规划与迭代算法的结合

先来研究一下式(24) 直接求解的效率问题。式(24) 是一个标准的线性互补问题, 已有一些成熟的算法, 本文采用 Lemke 算法对其进行求解。求解效率的关键则归结为 m_f 值的大小。假设屈服面个数只有一个, 因而 m_p 的值与弹塑性单元的个数一致, 对 m_c 个接触单元来说, 由式(8) 可以发现, 每个接触单元的屈服面个数为 $N + 1$ 个, 则 m_c 值将为 $(N + 1)N_c$ 个。在另一方面自然也可以发现, 由于式(8) 是对式(7) 的一种近似表达式, 其中 N 决定了这种近似的程度, N 值越大, 近似程度越好。为使切向接触力与滑动方向的精度保持在 θ° 之内, 应有 $N \geq (180 + \theta - \varepsilon)/\theta$ 取整, 其中 ω 为一个大于零的小量。如为使精度在 10° 之内, $N \geq 18$ 应当成立。因而 m_f 值最终将是

$$m_f \approx N_p + (N + 1)N_c \tag{26}$$

当空间接触单元个数增加时, m_f 值的大小也将大幅度提高, 这就为式(24) 的求解带来了困难, 这也是空间弹塑性问题求解的一个难点。

文[6] 提出了针对弹性空间接触问题分析的规划迭代算法, 本文进一步将这一算法引入到空间弹塑性接触分析当中, 进一步体现了这一算法的优越性。下面给出这一算法在空间弹塑性接触问题分析中的实现过程。对一个增量步而言:

1) 初始步。此时用 Lemke 算法对式(24) 进行求解, 且线性化公式仍用(8), 但 N 值不必取得太大, 如 N 可取为 5(表示为 5 边形的划分)。

2) 进入迭代过程。此时塑性单元仍采用增量步初始时的状态(即不对塑性单元进行迭代), 而线性化式(8) 要根据 1) 的结果进行修正

$$\left. \begin{aligned} C_M = \left\{ p_{\tau}^{(k)} : f_i^{(k)}(p_{\tau}^{(k)}, p_n^{(k)}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, M \right\}, \\ f_i^{(k)}(p_{\tau}^{(k)}, p_n^{(k)}) = [\cos(\alpha_i + \beta_{\tau}^{(k-1)}), \sin(\alpha_i + \beta_{\tau}^{(k-1)}, \mu)] \cdot \\ [p_{\tau_1}^{(k)}, p_{\tau_2}^{(k)}, p_n^{(k)}]^T \quad (k = 1, 2, \dots) \cdot \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

显然 M 与 N 可以独自取值, k 表示迭代次数。 $\beta_{\tau}^{(k)}$ 表示接触点切向力或相对滑动方向。且

$$\beta^{(k)} = \begin{cases} \arctan(\Delta u_2^{(k)} / \Delta u_1^{(k)}), & \Delta u_2^{(k)} \neq 0, \Delta u_1^{(k)} \neq 0, \\ \arctan(\Delta p_{\tau 2}^{(k)} / \Delta p_{\tau 1}^{(k)}), & \Delta u_2^{(k)} = 0 \text{ 或 } \Delta u_1^{(k)} = 0 \text{ 且 } \Delta p_{\tau 1}^{(k)} \neq 0, \\ \pi/2, & \Delta u_2^{(k)} = 0 \text{ 或 } \Delta u_1^{(k)} = 0 \text{ 且 } \Delta p_{\tau 1}^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\alpha_{-1} + \beta_{\tau}^{(k-1)} \leq \alpha + \beta_{\tau}^{(k-1)} \leq \alpha_+ + \beta_{\tau}^{(k-1)}, \quad (29)$$

$$\alpha_+ - \alpha = \alpha^{+-} / (k(M - 1)), \quad (30)$$

$$\pi \leq \alpha^{+-} \leq 2\pi. \quad (31)$$

显然, 式(27)是一个围绕在角度周围的一个开集, 这里建议 M 取 $\alpha_{M/1/2} + \beta_{\tau}^{(k-1)} = \beta_{\tau}^{(k-1)}$. α^{+-} 值的大小是收敛速度的一个关键, 取 2π 为保守取法, 计算经验表明, 取 π 一般总有较好的收敛性, 但为防止 $|p_{\tau}|$ 由于太小而使 $\beta_{\tau}^{(k)}$ 呈现跳跃现象, 这里给出下列收敛判定条件

$$\left| \max_{l=1}^{N_c} [(1/p_{\tau}^{(l)}) [\min_{j=1}^M [\theta_{dl}^{(k)} - (\alpha + \beta_{\tau}^{(k+1)})]]] \right| + \left| \max_{l=1}^{N_c} [(1/p_{\tau}^{(l)}) [\min_{j=1}^M [\theta_{pl}^{(k)} - (\alpha + \beta_{\tau}^{(k+1)})]]] \right| + \left| \max_{j=1}^{N_c} [(1/p_{\tau}^{(j)}) [\theta_{dl}^{(k)} - \theta_{pl}^{(k)}]] \right| \leq \epsilon \quad (32)$$

其中 ϵ 为收敛精度; $\theta_{dl}^{(k)}$ 为接触点切向相对滑动位移方向; $\theta_{pl}^{(k)}$ 为接触点切向剪力方向. 而 $p_{\tau}^{(i)} = |p_{\tau}^{(i)}|$.

下面进一步分析新算法的计算效率. Lemke 算法最后面临的是 $m_f \times m_f$ 阶矩阵的消元问题, 消元一次所用计算量为 $m_f \times m_f$ 运算, 这就是算法计算的量级, 设: $N_p = N_c, N = M = 5, \alpha^{+-} = \pi$, 则一次迭代精度就可保持在 5° 以内, 而为保持相同的精度, 常规算法需用 $N = 36$ 边的线性化, 计算量之比为, $(N_p + (36 + 1)N_c)^2 / (2 \times (N_p + (5 + 1)N_c)^2) \approx 14.73$, 除去迭代所需的必要的矩阵组装, 计算速度仍有较大的提高.

4 数值算例

例 1 图 4 所示管子两端同时受平板压, 假设平板足够刚, 使管子均匀挤压. 管子内径 1.98m, 厚 0.5m, $\sigma_{yp} = 8600\text{Pa}, E = 2.875 \times 10^7\text{Pa}, L = 20\text{m}, \nu = 0.3$, 初始位移量 $\delta = 0.01\text{m}$. 假设平板与管端之间的摩擦系数 $\mu = 0.02$. 材料为理想弹塑性, 服从 Tresca 屈服准则, 且只取单元面内两个主应力.

考虑到结构的对称性, 取结构的 1/8 分析, 划分了 81 个弹塑性元, 10 个空间接触元(每 10 度角分一个). 当不考虑摩擦效应时, 计算结果是全部单元均进入塑性, 且为 $\sigma_{min} = 8600\text{Pa}$, 这个解与解析解完全一致.

当考虑摩擦效应时, 由于摩擦力作用, 单元的受力状态有所改变, 摩擦剪应力出现. 表 1 列出接触点的接触应力与剪力方向计算结果. 其中 θ_a 为剪力方向解析解, θ_p 为剪力方向计算结果. SB8 为常规 8 边形 Coulomb 定律线性化结果, IS5 为本文 $N = M = 5, \alpha^{+-} = 180^\circ$ 仅一次迭代的结果. 显然本文方法获得了令人满意的结果.

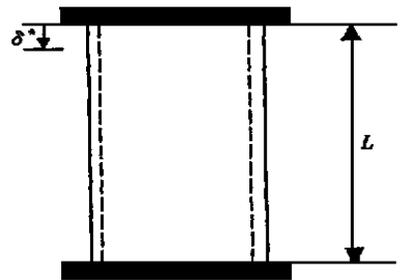


图 4 圆筒端部摩擦接触问题

例 2 如图 5 所示的两体接触问题, 接触面为 A, 上部结构较下部结构强度高. 因而考虑下部结构进入弹塑性. 上部结构 $E = 9.31 \times 10^7\text{Pa}, \nu = 0.3$, 下部结构 $E = 9.31\text{MPa}, \nu = 0.3$,

接触面摩擦系数 $\mu = 0.15$, 荷载 $q = 117.6 \text{ MN/m}^2$ 材料本构模型采取 Drucker-Prager 屈服准则, $\alpha = 0.01$, $\Psi = 1.0$, $\sigma_{yp} = 10 \text{ MPa}$ 作为结果比较, 研究接触面(如图6)上 $A_1 \sim A_5$ 点的计算结果。

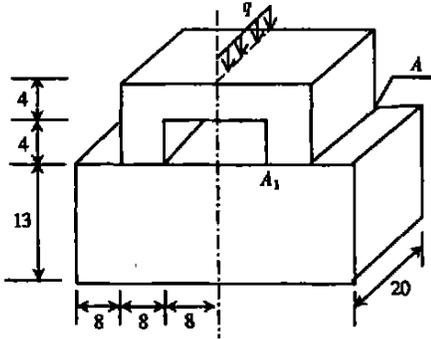


图5 两块体接触问题

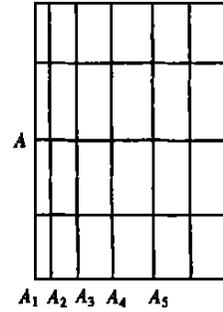


图6 接触面

表 1 例 1 计算结果

接触点	方案	p_{\square} (Pa)	p_{\square} (Pa)	p_a (Pa)	$\theta_p(0)$	$\theta_a(0)$
1	SB8	172.363	0.000	8619.280	0.000	0.000
	IS5	172.383	0.000	8619.300	0.000	0.000
2	SB8	171.216	20.025	8619.280	6.672	10.000
	IS5	169.955	28.854	8619.300	9.640	10.000
3	SB8	164.779	50.639	8619.280	17.083	20.000
	IS5	161.579	60.075	8619.300	20.395	20.000
4	SB8	141.209	98.864	8619.177	34.998	30.000
	IS5	149.477	85.862	8619.300	29.874	30.000
5	SB8	159.263	65.966	8619.229	22.500	40.000
	IS5	133.445	109.124	8619.300	39.275	40.000
6	SB8	65.966	159.263	8619.229	67.500	50.000
	IS5	109.168	133.445	8619.300	50.275	50.000
7	SB8	98.864	141.209	8619.177	55.002	60.000
	IS5	85.862	149.477	8619.300	60.126	60.000
8	SB8	50.639	164.779	8619.280	72.918	70.000
	IS5	60.075	161.579	8619.300	69.605	70.000
9	SB8	20.025	171.216	8619.280	83.329	80.000
	IS5	28.854	169.955	8619.300	80.360	80.000
10	SB8	0.000	172.363	8619.280	90.000	90.000
	IS5	0.000	172.383	8619.300	90.000	90.000

表2 给出 $A_1 \sim A_5$ 点的接触应力与滑动方向计算结果, 其中 θ_a 为相对位移滑动方向, 其它符号同例 1 说明。由计算结果可以看到, 本文方法的计算结果是令人满意的。表 3 给出了接

触点垂向位移计算结果, 我们可以看到接触点滑动方向的计算精度对位移计算结果也是有影响的。另外, 由表 2 可以发现, 常规多边形 Coulomb 定律线性化的计算结果对接触面的正压力的结果是可以满足精度要求的, 对于只关心接触面的正压力结果的一类问题, 仍可采用常规的一次线性化计算方法, 且多边形的边数不用太多。

表 2 例 2 计算结果

接触点	方案	$p_n(\text{Pa})$	$p_{\tau}(\text{Pa})$	$p_n(\text{Pa})$	$\theta_p(0)$	$\theta_u(0)$
A1	SB8	7.139	17.235	124.371	112.500	122.444
	IS5	8.003	16.899	124.672	115.340	118.814
A2	SB8	1.709	4.124	29.760	112.500	128.355
	IS5	2.562	3.694	29.977	124.742	122.881
A3	SB8	1.385	3.342	24.118	112.500	128.688
	IS5	2.121	2.937	24.153	125.844	122.785
A4	SB8	1.096	2.646	19.094	112.500	121.631
	IS5	1.202	2.582	18.993	114.950	116.804
A5	SB8	0.760	1.834	13.238	112.500	112.611
	IS5	0.679	1.807	12.872	110.585	109.719

表 3 例 2 接触点垂向位移计算结果($\times 10^{-5}\text{m}$)

接 触 点	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
弹性接触解	2.012 1	1.972 8	1.870 8	1.607 3	1.306 5
弹塑性 SB8	2.277 8	2.197 2	2.064 8	1.756 9	1.425 3
弹塑性 IS5	2.326 2	2.237 6	2.098 8	1.780 2	1.439 2

5 结 论

本文提出了将数学规划法与迭代算法相结合的处理空间弹塑性有摩擦接触问题的新算法。规划法的特点是求解时收敛平稳, 且在一般情况下只要问题有解, 总可求得问题的解; 迭代法的优点是可以加收敛速度, 迅速获得最终结果。因而将两种方法相结合, 可以充分利用两者各自的优势, 处理计算力学领域的一些非线性计算问题, 这对问题计算结果的精度, 收敛过程的平稳性与收敛速度都是有益的。本文的工作充分的证明了这一点。

由算例可以看到, 传统规划法在接触点切向位移与力的方向的协调与一致的求解上误差较大, 这一点在应用时应引起足够的重视。本文所提出的方法较好地克服了这一问题。

[参 考 文 献]

- [1] 钟万勰, 张洪武, 吴成伟. 参变量变分原理极其在工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [2] ZHONG Wan_xie, SUN Shu_ming. A finite element method for elasto-plastic structure and contact parametric quadratic programming[J]. Int J Numer Meths Engng, 1988, 26(6): 2723-2738.
- [3] Klarbring A. A mathematical programming approach to three dimensional contact problem with friction

- [J]. *Comput Meths Appl Mech Engng*, 1986, **58**(2): 175—200.
- [4] Marek M, Wieslaw A. Theory of finite element method for elastic contact problems of solid bodies[J]. *Compt Structures*, 1983, **17**(1): 51—59.
- [5] Meyer D W, Plesha M E, Cooper R F. A contact friction algorithm including nonlinear viscoelasticity and a singular yield surface provision[J]. *Comput Structures*, 1992, **42**(6): 913—925.
- [6] ZHANG Hong_wu, ZHONG Wan_xie, GU Yuan_xian. A combined programming and iteration algorithm for finite element analysis of three_dimensional elastic contact problems[J]. *Acta Mechanica Sinica_English*, 1995, **11**(4): 318—326.

A New Method for Solution of 3D Elastic_Plastic Frictional Contact Problems

ZHANG Hong_wu, ZHONG Wan_xie, GU Yuan_xian

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: The solution of 3D elastic_plastic frictional contact problems belongs to the unspecified boundary problems where the interaction between two kinds of nonlinearities should occur. Considering the difficulties for the solution of 3D frictional contact problems, the key part is the determination of the tangential slip states at the contact points, and a great amount of computing work is needed for a high accuracy result. A new method based on a combination of programming and iteration methods, which are respectively known as two main kinds of methods for contact analysis, was put forward to deal with 3D elastic_plastic contact problems. Numerical results demonstrate the efficiency of the algorithm illustrated here.

Key words: 3D frictional contact; elasto_plasticity; programming method; iteration method; the finite element method