应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 07_0661_05

一类超混沌离散系统的控制

陈立群[1], 刘曾荣[2]

(1 上海大学 力学系, 上海 200072; 2 上海大学 数学系, 上海 201800, 上海)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 研究一类超混沌离散系统的控制问题 基于局部线性化建立了时变线性反馈控制律 采用 Liapunov 直接法估计了控制律可以有效作用的邻域范围 分别给出了应用该控制律解决不稳定周期轨道的镇定问题和任意给定周期轨道的追踪问题的算例

关 键 词: 控制混沌; 超混沌映射; Liapunov 直接法; 镇定; 追踪
中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

近年来控制混沌研究由于其深刻的理论意义和广阔的应用前景而受到重视[1, 2], 超混沌的控制也有专门研究[3] 在控制混沌诸方案中, Ott 等提出的 OGY 方法[4] 最为引人注目, 它可以借助混沌吸引子中不稳定周期轨道的稳定流形将其镇定, 但该方法不能解决任意给定周期轨道的追踪问题, 而且某些混沌吸引子中的不稳定周期轨道可能不存在稳定流形 Jackson 等发展的输送控制方法[5] 可以追踪给定的周期轨道, 但不能解决镇定问题, 而且在应用中受收敛域或输送盆的限制 本文针对一类超混沌映射提出一种控制方案, 可以同时解决镇定问题和追踪问题 追踪目标可以任意给定, 而启动控制的条件可以明确给出

1 一类超混沌平面映射的控制律

[6] 中把耦合映射格子中 Zagzag 斑图研究归结为平面映射

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= -2a(1-2\ )x_n y_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

用数值方法在适当参数 (例如 $a = 1\ 95$ 和 $= 0\ 2$) 下可验证其具有弥散型超混沌吸引子[7] 此时, 具有两个正 Liapunov 指数, 吸引子中的大量不稳定周期轨道没有稳定流形

现考虑其带有可控参数的情形, 即

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(x_n^2 + y_n^2) + u_n, \\ y_{n+1} &= -2a(1-2\ )x_n y_n + v_n \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

给定控制目标 $\boldsymbol{g}_n = (g_n^x, g_n^y)$, 在该目标小邻域中局部线性化系统(2), 得到

收稿日期: 2000_03_03; 修订日期: 2001_03_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872044)
作者简介: 陈立群(1963) , 男, 上海市人, 博士, 教授, 博士生导师.

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a(g^{x^2}_n + g^{y^2}_n) - 2ag^x_n(x_n - g^x_n) - 2ag^y_n(y_n - g^y_n) + u_n, \\ y_{n+1} &= -2a(1-2\;\;)g^x_n g^y_n - 2a(1-2\;\;)g^y_n(x_n - g^x_n) - 2a(1-2\;\;)g^x_n(y_n - g^y_n) + v_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

根据式(3), 若引入时变线性反馈控制律

$$\left.\begin{aligned} u_n &= g^x_{n+1} - 1 + a(g^{x^2}_n + g^{y^2}_n) - (A_1 - 2ag^x_n)(x_n - g^x_n) + 2ag^y_n(y_n - g^y_n), \\ v_n &= g^y_{n+1} + 2a(1-2\;\;)g^x_n g^y_n + 2a(1-2\;\;)g^y_n(x_n - g^x_n) - \\ &\quad (A_2 - 2a(1-2\;\;)g^x_n)(y_n - g^y_n) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

受控系统(3) 可改写为

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} - g^x_{n+1} &= -A_1(x_n - g^x_n), \\ y_{n+1} - g^y_{n+1} &= -A_2(y_2 - g^y_n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

若选择系数 A_1 和 A_2 满足

$$|A_i| < 1 \qquad (i = 1, 2), \tag{6}$$

则系统(3) 的动态行为渐近于 $\boldsymbol{g}_n$ 即在 $\boldsymbol{g}_n$ 小邻域内作用控制律(4), 可控制系统(2) 到给定的目标 $\boldsymbol{g}_n$

2 控制作用领域的估计

控制律(4) 是基于受控系统(2) 在目标邻域内的局部线性化, 因此控制仅能在目标的适当邻域内启动 现利用分析离散动态系统的 Liapunov 直接法估计该邻域

式(4) 代入式(2), 并记偏差

$${}^x_n = x_n - g^x_n, \qquad {}^y_n = y_n - g^y_n, \tag{7}$$

经过整理后得到

$$\left.\begin{aligned} {}^x_{n+1} &= -A_1\,{}^x_n - a({}^{x^2}_n + {}^{y^2}_n), \\ {}^y_{n+1} &= -A_2\,{}^x_n - 2a(1-2\;\;)\,{}^x_n\,{}^y_n \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

利用线性化稳定性分析容易知当条件(6) 成立时系统(8) 具有渐近稳定不动点(0, 0)

定义 Liapunov 函数

$$V({}^x_n, {}^y_n) = {}^{x^2}_n + {}^{y^2}_n \tag{9}$$

则在系统(8) 的解轨道上, 有

$$\begin{aligned} V = {} & ({}^{x^2}_{n+1} + {}^{y^2}_{n+1}) - ({}^{x^2}_n + {}^{y^2}_n) = \\ & -(1-A_1^2)\,{}^{x^2}_n - (1-A_2^2)\,{}^{y^2}_n - 2a(1-2\;\;)(A_2\,{}^x_n - 2a(1-2\;\;)\,{}^{x^2}_n)\,{}^{y^2}_n - \\ & 2a(A_1\,{}^x_n - 2a({}^{x^2}_n + {}^{y^2}_n))({}^{y^2}_n + {}^{y^2}_n), \end{aligned} \tag{10}$$

故当条件(6) 成立时, $V > 0$ 的一个充分条件为

$$\left.\begin{aligned} A_2\,{}^x_n - 2a(1-2\;\;)\,{}^{x^2}_n &\quad 0, \\ A_1\,{}^x_n - 2a({}^{x^2}_n + {}^{y^2}_n) &\quad 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

此时, 根据 Liapunov 直接法, 系统(8) 的不动点(0, 0) 渐近稳定 故系统(8) 中渐近不动点(0, 0) 的吸引盆包含由式(11) 给出的平面区域

根据以上分析, 当启动控制时的初始偏差满足不等式(11) 时, 控制律(4) 可以使系统(2) 渐

近于目标 $\boldsymbol{g}_n$ 当 $a = 1\ 95,\ \ = 0\ 2, A_1 = A_2 = 0\ 9$ 时，允许初始偏差的范围如图 1 所示，为两条抛物线和直线围成的区域

由于 Liapunov 直接法给出的是平衡渐近稳定的充分条件，而式(11)成立又是特定的 Liapunov 函数(9)差分为正的充分条件，所以，不等式(11)仅给出控制律(4)作用邻域一个较为保守的估计 对于式(10)进行更细致的讨论，以及选择其它 Liapunov 函数，都可能得到更为确切的估计 然而相应的表达式可能较为繁复，数值实现比较困难

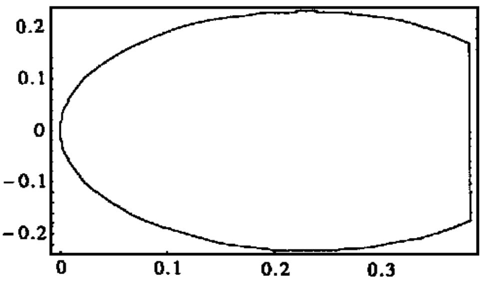

图 1 启动控制时容许偏差范围

3 算例 1：超混沌中不稳定周期轨道的镇定

超混沌吸引子中内嵌大量的不稳定周期轨道[7] 对于系统(2)，采用控制律(4)可以镇定其中的不稳定周期轨道 例如，当 $a = 1\ 95,\ \ = 0\ 2$ 时，系统(2)无控制($u_n = v_n = 0$)时呈现超混沌性态[5, 6] 超混沌吸引子中有不稳定周期 3 轨道

$$(-0\ 661\ 3, 0\ 099\ 46) \quad (0\ 128\ 0, 0\ 153\ 9) \quad (0\ 921\ 8, -0\ 046\ 12)$$

$$(-0\ 661\ 3, 0\ 099\ 46) \tag{12}$$

和不稳定不动点

$$(-0\ 426\ 4, -0\ 741\ 2) \tag{13}$$

在控制律(4)中取 $A_1 = A_2 = 0\ 9$ $t_1 = 2\ 500$ 时开始控制，镇定不稳定周期 3 轨道(12)，$t_2 = 3\ 200$ 时将镇定目标切换到不稳定不动点(13) 控制结果如图 2 所示 所需要控制信号如图 3 所示

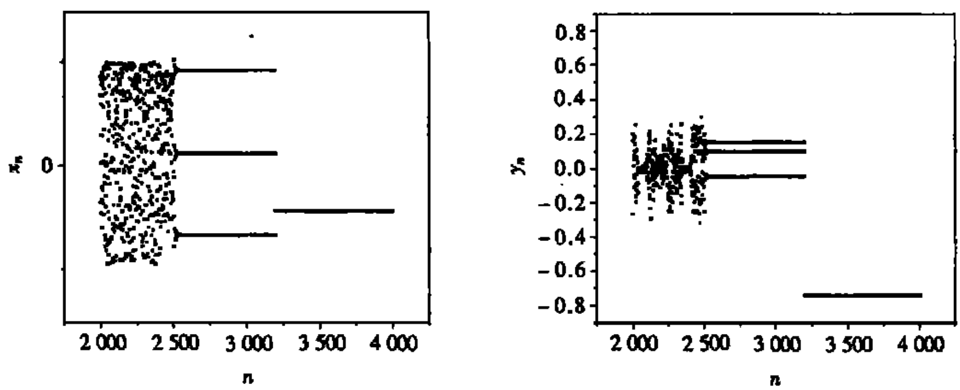

图 2 超混沌中不稳定周期轨道(12)和(13)的镇定

4 算例 2：控制超混沌追踪给定周期轨道

控制律(4)不仅能镇定超混沌中的不稳定周期轨道，而且可以控制超混沌追踪给定的周期轨道 仍研究 $a = 1\ 95,\ \ = 0\ 2$ 的情形 控制目标依次取为

$$g^x_{n+1} = 3\ 5g^x_n(1 - g^x_n), \quad g^y_n = 0\ 1, \tag{14}$$

$$g^x_{n+1} = 3\ 2g^x_n(1 - g^x_n), \quad g^y_n = 0\ 2, \tag{15}$$

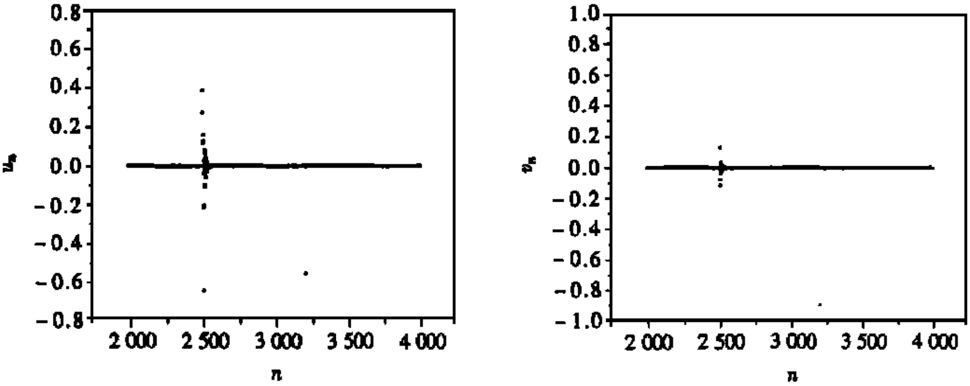

图 3　镇定超混沌中不稳定周期轨道(12)和(13)的控制信号

其中 x 分量分别为周期4轨道和周期2轨道, 容易验证式(14) 和(15) 均不满足式(1) 因此不是相应不受控制系统(2) 的不稳定周期轨道　仍在控制律(4) 中取 $A_1 = A_2 = 0\ 9$　$t_1 = 2\,500$ 时开始控制, 目标为(14), $t_2 = 3\,200$ 时将控制目标切换到目标(15)　控制结果如图 4 所示　所需要控制信号如图 5 所示

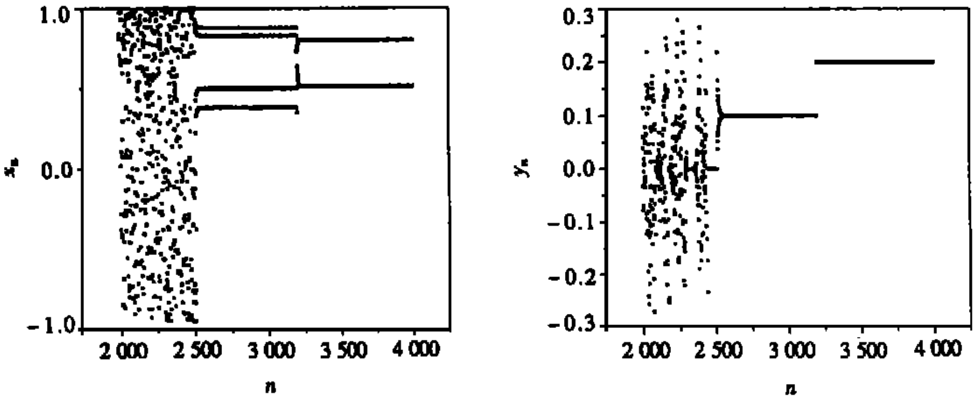

图 4　控制超混沌追踪给定周期轨道

图 4　控制超混沌追踪给定周期轨道

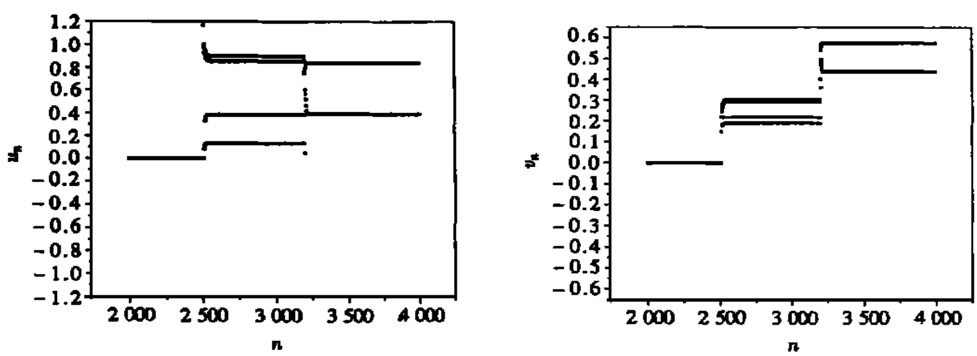

图 5　控制超混沌追踪给定周期轨道的控制信号

5 结论与讨论

本文提出了时变线性反馈控制律(4),可以同时解决超混沌映射(2)的不稳定周期轨道镇定问题和任意给定周期轨道的追踪问题 开启控制时,系统轨道与目标轨道的距离要在一定范围内,对于受控系统(2),应用 Liapunov 方法可以给出一个充分条件(11)

这一思路也可推广到一般的混沌系统的控制 这种控制方案的局限是只有在混沌轨道和目标周期轨道较为接近时才能开启 如果控制目标接近某个嵌入混沌吸引子的不稳定周期轨道,由混沌的遍历性,这一条件自然满足 如果控制目标始终远离混沌轨道,直接应用这种方法将会失效,此时可以引入一系列中间目标而实现控制

[参 考 文 献]

[1] 胡海岩. 力学系统混沌的主动控制[J]. 力学进展, 1996, **26**(4): 453 463.

[2] 陈立群, 刘延柱. 控制混沌的研究现状与展望[J]. 上海交通大学学报, 1998, **32**(1): 108 114.

[3] YANG Ling, LIU Zeng_rong, MAO Jian_min. Controlling hyperchaos[J]. Phy Rev Lett, 1999, **84**(1): 67 70.

[4] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, **64**: 1196 1199.

[5] Jackson A. On the control of complex dynamic systems[J]. Phy D, 1991, **50**: 341 366.

[6] 刘曾荣. 两维平面映射的奇怪吸引子[M]. 苏州: 苏州大学出版社, 1996.

[7] LIU Zeng_rong, CHEN Li_qun, YANG Ling. Some properties of hyperchaos: case study[J]. Acta Mechanica Sinica, 1999, **15**(4): 366 370.

Control of a Hyperchaotic Discrete System

CHEN Li_qun[1], LIU Zeng_rong[2]

(1 Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

2 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China)

Abstract: The Control of a hyperchaotic discrete system is investigated. A time_varying feedback control law is established on the base of local linearization. The Liapunov direct method is applied to estimate the neighborhood in which the control law can be effectively used. Numerical examples are presented to demonstrate the applications of the control law to solve the problem of stabilizing unstable periodic orbits and the problem of tracking an arbitrarily given periodic orbit.

Key words: controlling chaos; hyperchaotic map; Liapunov direct method; stabilization; tracking