

文章编号: 1000-0887(2001) 08-0845-08

多自由度非线性随机振动分析的 c 次方能量差方法*

王国砚¹, 戴 民²

(1. 固体力学教育部重点实验室, 同济大学 工程力学与技术系, 上海 200092;
2. 北京大学 数学所, 数学学院 金融数学系, 北京 100871)

(刘曾荣推荐)

摘要: 将振型变换方法引入基于能量差准则的等效线性化方法, 在此基础上针对多自由度非线性系统受非零均值平稳高斯激励的情形, 建立 c 次方能量差方法的基本方程, 给出了主要算式及 c 的取值, 并结合算例分析了这一方法的精度. 算例结果表明, 该方法在计算精度和简便性方面均优于方程差方法.

关键词: 非线性; 随机振动; 能量; 等效线性化
中图分类号: O324 文献标识码: A

引 言

基于能量差准则的等效线性化方法是近十多年来发展起来的一种非线性随机振动分析方法, 具有比方程差方法精度高等特点. 为进一步提高该方法的计算精度, 本文作者之一和张相庭教授一起在文献[1]中提出一种基于非线性系统与等效线性系统能量 c 次方之差均方最小化的准则(或可称之为 c 次方能量差方法), 其中 c 是参变量, 为按照某一使计算结果最优的原则确定. 在单自由度系统的情况下, 文献[1]采用白噪声下的 FPK 解确定 c 值, 并针对单自由度系统受零均值平稳高斯激励的情形给出了关于 c 的建议取值. 然而工程结构实际上都是多自由度的, 甚至是无限自由度的, 因此有必要在文献[1]的基础上进一步研究多自由度非线性系统的 c 次方能量差方法.

在多自由度系统的等效线性化方法中, 通常是直接对刚度矩阵进行等效, 如文献[2, 3]等, 根据所得到的等效刚度矩阵, 可采用线性随机振动理论计算系统的响应. 这种方法的缺点是等效刚度矩阵计算起来比较困难, 按照文献[4]的估计, 对于一个自由度数 $n = 10$ 的系统, 为计算响应的前两阶矩, 需求解的方程数就可达 $N = 230$. 实际的工程结构自由度数比这大得多, 且需考虑各自由度响应之间的互相关性, 求解难度可以想象. T. K. Caughey^[5] 在提出多自由度系统的方程差方法时, 采用振型变换的方法, 即用振型矩阵对非线性方程的线性部分进行解耦, 得到一系列线性部分相互独立的方程, 只是在每个方程中, 将非线性部分集中在与系统势能有关的一项中, 再用等效线性化方法对该项进行线性化处理, 求出等效线性系统的固有频

* 收稿日期: 1999_11_23; 修订日期: 2001_04_02

作者简介: 王国砚(1958—), 男, 合肥人, 高级工程师, 博士.

率,进而计算系统的响应。这种方法需联立求解的方程数较少,并且对于某些系统可以采用振型截断技术进一步减少未知数。

本文将针对多自由度非线性系统受非零均值平稳高斯激励的情形,采用基于振型变换的方法建立 c 次方能量差方法的基本方程,给出主要算式及 c 的取值;同时,还将结合算例,通过与方程差方法的比较,分析本文方法的精度。

1 基本理论和主要算式

由于在实际的工程结构中,惯性部分少有非线性,阻尼部分是目前仍在进一步研究中的难题,而大量的非线性问题出现在恢复力中,所以本文仅讨论恢复力为非线性的情形。尽管如此,本文所得到的方法及结论,经过一定的研究工作后,不难推广至其它情形。

不论是硬弹簧还是软弹簧恢复力,总可以统一表示成

$$F_K(x) = Kx + F(x), \quad (1)$$

其中, $F(x)$ 是非线性部分。当 $F(x) = 0$ 时,非线性系统退化为线性系统, K 为对应线性系统的刚度矩阵。因此,非线性系统的运动方程可以写成

$$M\dot{x} + Cx + Kx + F(x) = P(t). \quad (2)$$

可以求出 $F(x) = 0$ 时的线性系统的固有频率和归一化振型:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \text{diag}[\omega_{0j}^2] \\ \Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (3)$$

其中, ω_{0j} 为第 j 阶固有频率; ϕ_j 为第 j 阶振型; m 表示取前 m 阶振型 ($m \leq n$)。

利用振型矩阵 Φ 对非线性方程(2)进行振型交换,假定阻尼矩阵 C 也符合主振型的正交性,可以使方程(2)中的线性部分解耦,仅非线性部分仍然耦合,即得到如下以振型坐标表示的非线性运动方程

$$\ddot{q} + \beta_0 \dot{q} + \omega_0^2 q + g(q) = f(t), \quad (4)$$

其中, $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}^T$ 为振型坐标向量, $\beta_0 = \text{diag}[2\zeta_{0j}\omega_{0j}]$, $f(t) = \Phi^T P(t)$ 。相应地,振型坐标下系统的势能为

$$U = U_0 + U_1, \quad (5)$$

其中, U_0 是恢复力的线性部分所对应的势能,且

$$U_0 = \frac{1}{2} q^T \omega_0^2 q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \omega_{0j}^2 q_j^2; \quad (6)$$

U_1 是非线性部分 $g(q)$ 所对应的势能,假设非线性系统共有 m_1 个弹性元件,则 U_1 将是这 m_1 个弹性元件中所储存的与非线性恢复力有关的势能的总和,即

$$U_1 = \sum_{i=1}^{m_1} u_i(q_1, q_2, \dots, q_m), \quad (7)$$

其中 u_i 是储存在第 i 个弹性元件中的非线性势能。

设方程(4)的等效线性化方程为

$$\ddot{q} + \beta_0 \dot{q} + \omega_q^2 q = f(t), \quad (8)$$

这里的矩阵 β_0 与方程(4)中的 β_0 相同; ω_q^2 为由等效固有频率组成的对角阵。相应地,等效线性系统的势能为 U_q , 则

$$U_q = \frac{1}{2} q^T \omega_q^2 q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \omega_{qj}^2 q_j^2, \quad (9)$$

U 和 U_q 所包含的 q 为方程(8) 的解。

根据 c 次方能量差方法的基本思想, 只要使 U 和 U_q 的 c 次方之差均方最小, 就可以使得用满足方程(8) 的 q 作为方程(4) 的解, 所产生的误差统计最小。令

$$\Delta U^c = U^c - U_q^c \quad (10)$$

取 $E[(\Delta U^c)^2]$ 关于 ω_q^2 的极小化, 即

$$\frac{\partial E[(\Delta U^c)^2]}{\partial \omega_q^2} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

将(5)、(9)和(10)式代入(11)式, 可得

$$E[(U^c U_q^{c-1} - U_q^{2c-1}) q_j^2] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (12)$$

这就是以振型坐标表达的 c 次方能量差方法用以确定等效线性化系统参数的基本方程。

在非线性方程(2)中, 设平稳高斯激励向量 $P(t)$ 的均值向量 μ_p 、谱密度矩阵 $S_p(\omega)$ 为已知, 则在经过振型变换后的对应方程(4)和(8)中,

$$H_j = \Phi_j^T \mu_p \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (13)$$

$$S_{f_j}(\omega) = \Phi_j^T S_p(\omega) \Phi_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

也为已知。

由于激励为非零均值, 等效线性化方程(8)的解也应为非零均值, 且有

$$\mu_{q_j} = H_{q_j}(0) \cdot \mu_j = \mu_j / \omega_q^2 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (15)$$

$$E[q_i q_j] = \int_{-\infty}^{\infty} H_{q_i}(-i\omega) H_{q_j}(i\omega) S_{f_j}(\omega) d\omega \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

此时, q 的联合概率密度函数应为

$$p(q) = [(2\pi)^{m/2} |C|^{-1/2}]^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(q - \mu_q)^T C^{-1}(q - \mu_q)\right\}, \quad (17)$$

其中, μ_q 为由 μ_{q_j} 构成的振型响应均值向量, 它是 ω_q^2 的函数; 振型响应协方差矩阵 C 中的各元素为

$$C_{ij} = E[(q_i - \mu_{q_i})(q_j - \mu_{q_j})] = E[q_i q_j] - \mu_{q_i} \mu_{q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (18)$$

C_{ij} 也将是 ω_q^2 的函数。

另一方面, 将 c 次方能量差方法的极小化方程(12)写成如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (U^c U_q^{c-1} - U_q^{2c-1}) q_j^2 p(q) dq_1 \dots dq_m = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (19)$$

式中, U 是 q 的函数, U_q 是 q 和 ω_q^2 的函数。将(17)式的 $p(q)$ 代入方程(19), 可见积分后的方程(19)将成为以 $\omega_q^2 (j = 1, 2, \dots, m)$ 为自变量的方程组。因此将方程(19)与(15)、(16)、(17)、(18)式联立, 通过迭代求解, 可以求出 ω_q^2 , 从而求出 μ_{q_j} 、 $E[q_j^2]$ 、 $\sigma_{q_j}^2$ 等。

一旦求出上述各统计量, 就可以将它们作为原非线性方程的解代回原方程, 进一步求出系统的位移、内力等响应的统计量(均值、方差等)。

按照 c 次方能量差方法的基本思想, c 为根据某一原则选定的实数。在单自由度系统中是参照白噪声下的 FPK 解确定 c 值, 但在多自由度系统中, 目前 FPK 解还有较大的局限性。

T. K. Caughey 早期给出的 FPK 解^[6]除要求激励必须是白噪声外,还要求激励各分量之间互不相关,此外对位移与速度同时非线性的问题也不适用,这些都大大限制了该方法的应用。另一方面,从文献[1]的分析结果可知,对于硬弹簧非线性系统,在反映非线性程度和激励强度综合影响的参数 μ_1 取值的相当大一段范围内, c 值均在 1.0 附近。因此本文认为,对硬弹簧多自由度系统可取 $c = 1.0$, 随后的算例结果将表明这样的 c 值已可满足一般的需要。对于软弹簧非线性系统,文献[1]的结果表明, c 值离散性较大。但从文献[1]的结果可以看出,在大多数情况下 c 值在 2.0 与 3.0 之间,且随非线性程度增大, c 值相应也增大。同样地,本文认为从计算精度和计算简便性两方面综合考虑,对于软弹簧多自由度系统,非线性程度较小时可取 $c = 2.0$, 非线性程度较大时可取 $c = 3.0$ 。本文将通过算例表明这种取值的合理性。

2 算例及精度分析

为便于与方程差方法进行比较,本文采用文献[2]所提供的算例,该算例在本文中改为简单的两自由度弹簧振子,如图 1 所示。

1. 硬弹簧恢复力的情形

在图 1 所示的结构中,设弹簧恢复力为

$$\begin{cases} F_i(y_i) = K_i y_i + \varepsilon y_i^3 & (i = 1, 2), \\ y_i = x_i - x_{i-1} & (x_0 = 0), \end{cases} \quad (20)$$

其中, y_i 为第 i 个弹簧两端点之间的相对位移,其它系统参数为

$$\begin{cases} M_1 = M_2 = 1; C_1 = C_2 = \beta; \\ K_1 = K_2 = K; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \end{cases} \quad (21)$$

激励为零均值高斯白噪声,即

$$E[\mathbf{P}(t)] = \mathbf{0}; E[\mathbf{P}(t)\mathbf{P}(t+\tau)^T] = 2\pi\mathbf{M} \cdot \delta(\tau), \quad (22)$$

其中, $\mathbf{P}(t) = \{P_1(t) P_2(t)\}^T$, \mathbf{I} 为单位矩阵。

令 $\varepsilon = 0$, 求出对应线性系统的固有频率: $\omega_1 = 0.382\sqrt{K}$, $\omega_2 = 2.618\sqrt{K}$ 和归一化固有振型矩阵:

$$\Phi = \left\{ \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \right\} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & -\phi_1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中, $\phi_1 = 0.526$, $\phi_2 = 0.851$ 。

利用归一化振型矩阵 Φ , 可以求出振型激励向量 $f(t)$ 的谱密度矩阵为

$$S_f(\omega) = \mathbf{M}, \quad (24)$$

这就是说 $f(t)$ 也为零均值高斯白噪声,且各振型激励之间互不相关。

由于本例中只有两个弹性元件,不难求出非线性势能 U :

$$U = \frac{1}{4} \varepsilon (A_{40} q_1^4 + A_{31} q_1^3 q_2 + A_{22} q_1^2 q_2^2 + A_{13} q_1 q_2^3 + A_{04} q_2^4), \quad (25)$$

其中,

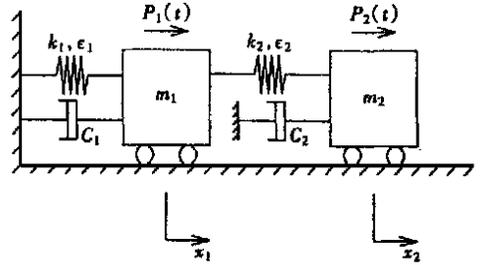


图 1 算例计算简图

$$\begin{cases} A_{40} = \phi_1^4 + (\phi_1 - \phi_2)^4, \\ A_{31} = 4[\phi_1^3\phi_2 + (\phi_1 - \phi_2)^3(\phi_1 + \phi_2)], \\ A_{22} = 6[\phi_1^2\phi_2^2 + (\phi_1 - \phi_2)^2(\phi_1 + \phi_2)^2], \\ A_{13} = 4[\phi_1\phi_2^3 + (\phi_1 - \phi_2)(\phi_1 + \phi_2)^3], \\ A_{04} = \phi_2^4 + (\phi_1 + \phi_2)^4; \end{cases} \quad (26)$$

线性势能 U :

$$U = \frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2. \quad (27)$$

将 U 和 U 代入极小化方程(19), 并注意到振型激励 $f(t)$ 为零均值高斯过程, 可以得到关于 $\sigma_{q_1}^2$ 和 $\sigma_{q_2}^2$ 的非线性联立方程组

$$\begin{cases} 4R - \omega_1^2 \sigma_{q_1}^2 - \omega_2^2 \sigma_{q_2}^2 - \frac{3}{2} \varepsilon (5A_{40} \sigma_{q_1}^4 + A_{22} \sigma_{q_1}^2 \sigma_{q_2}^2 + A_{04} \sigma_{q_2}^4) = 0, \\ 4R - \omega_1^2 \sigma_{q_1}^2 - \omega_2^2 \sigma_{q_2}^2 - \frac{3}{2} \varepsilon (A_{40} \sigma_{q_1}^4 + A_{22} \sigma_{q_1}^2 \sigma_{q_2}^2 + 5A_{04} \sigma_{q_2}^4) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

式中 $R = \pi N \beta$. 解此代数方程组, 为便于比较, 仿照文献[2] 的处理方法, 令 $K \rightarrow 0$ (或令 $\omega_1 = \omega_2 = 0$), 可以得出

$$\begin{cases} \sigma_{q_1}^2 = 2\sqrt{2} \left[\sqrt{18A_{40} + 3A_{22} \sqrt{A_{40}/A_{04}}} \right]^{-1/2} \mu_1 \approx 1.745 \mu_1, \\ \sigma_{q_2}^2 = \sqrt{A_{40}/A_{04}} \sigma_{q_1}^2 \approx 0.255 \mu_1, \end{cases} \quad (29)$$

式中 $\mu_1 = \sqrt{R/\varepsilon}$. 进而可得

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = 0.817 \sqrt{\mu_1}, \quad (30)$$

本题的 FPK 解^[2]

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = 0.822 \sqrt{\mu_1}, \quad (31)$$

方程差解^[2]

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = 0.760 \sqrt{\mu_1} \quad (32)$$

(注: 文献[2]的(25)式中的 $M2c$ 似应为本文的 $R = \pi N \beta$.)

由此可见, 方程差法的结果与 FPK 解相比, 误差约为 7.5%, 而基于振型变换的 c 次方能量差方法 ($c = 1.0$) 却可以求出与 FPK 解十分接近的结果(误差仅为 0.6%).

由于 K 是系统刚度的线性部分, $K \rightarrow 0$ 是一种极端情况; $K \neq 0$ 时, 随 K 的增加, 只会使系统响应在线性范围的可能性增大, 因此可认为上述误差已是误差最大的情况.

2. 软弹簧恢复力的情形

在图 1 所示的结构中, 设弹簧恢复力为

$$F_i(y_i) = K \arctan(\varepsilon y_i) / \varepsilon \quad (i = 1, 2), \quad (33)$$

其中的 y_i 见(20)式, 其它系统参数与硬弹簧恢复力情形完全相同.

记 $\sigma_0^2 = \pi N \beta K$, $\lambda_1 = \sigma_{q_1} / \sigma_0$, $\lambda_2 = \sigma_{q_2} / \sigma_0$, $\mu_1 = \varepsilon \sigma_0$. 对于(33)式给出的软弹簧恢复力, 非线性系统的总势能 U 为

$$U = \frac{K}{\varepsilon^2} U = \frac{K}{\varepsilon^2} (U_1 + U_2). \quad (34)$$

引入变量 $t_1 = q_1 / \sigma_{q_1}$, $t_2 = q_2 / \sigma_{q_2}$, 上式中的 U_1 和 U_2 可表示为

$$\begin{cases} U_1 = \delta_1 \arctan \delta_1 - \frac{1}{2} \ln(1 + \delta_1^2), \\ U_2 = \delta_2 \arctan \delta_2 - \frac{1}{2} \ln(1 + \delta_2^2), \end{cases} \quad (35)$$

其中,

$$\begin{cases} \delta_1 = \phi_1 \mu_1 \lambda_1 t_1 + \phi_2 \mu_2 \lambda_2 t_2, \\ \delta_2 = (\phi_1 - \phi_2) \mu_1 \lambda_1 t_1 + (\phi_1 + \phi_2) \mu_2 \lambda_2 t_2. \end{cases} \quad (36)$$

等效线性系统的势能 U_q 在此成为

$$U_q = \frac{1}{2} R U_q = \frac{1}{2} R (t_1^2 + t_2^2). \quad (37)$$

将(34)式和(37)式代入极小化方程(19), 可得如下的方程组:

$$\begin{cases} f_1(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(U, U_q) t_1^2 \exp\left[-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right] dt_1 dt_2 = 0, \\ f_2(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(U, U_q) t_2^2 \exp\left[-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right] dt_1 dt_2 = 0, \end{cases} \quad (38)$$

其中,

$$F(U, U_q) = U^c U_q^{c-1} - \frac{1}{4} \mu_1^4 U_4^{2c-1}. \quad (39)$$

采用牛顿-拉斐森方法求解方程组(38), 根据给定的 μ_1 值, 通过数值积分和迭代求解, 可以得到 λ_1 、 λ_2 的数值解。

对于(33)式给出的软弹簧恢复力, 可以求出非线性系统的 FPK 解:

$$\lambda_i^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_i^2 \exp\left\{-\mu_1^{-2} [U_1(t_1, t_2) + U_2(t_1, t_2)]\right\} dt_1 dt_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\mu_1^{-2} [U_1(t_1, t_2) + U_2(t_1, t_2)]\right\} dt_1 dt_2} \quad (i = 1, 2), \quad (40)$$

其中,

$$\begin{cases} U_1(t_1, t_2) = (\phi_1 \mu_1 t_1 + \phi_2 \mu_1 t_2) \arctan(\phi_1 \mu_1 t_1 + \phi_2 \mu_1 t_2) - \\ \quad \frac{1}{2} \ln(\phi_1 \mu_1 t_1 + \phi_2 \mu_1 t_2), \\ U_2(t_1, t_2) = [(\phi_1 - \phi_2) \mu_1 t_1 + (\phi_1 + \phi_2) \mu_1 t_2] \arctan[(\phi_1 - \phi_2) \mu_1 t_1 + \\ \quad (\phi_1 + \phi_2) \mu_1 t_2] - \frac{1}{2} \ln\left\{1 + [(\phi_1 - \phi_2) \mu_1 t_1 + (\phi_1 + \phi_2) \mu_1 t_2]^2\right\}, \end{cases} \quad (41)$$

同样地, (40)式需通过数值积分方法计算。

根据不同的 μ_1 值按上述过程进行计算, 可以求出 λ_1 、 λ_2 的 c 次方能差解和 FPK 解, 并可进一步得出以相对坐标 y_i 表示的解 α_{y1}/σ_0 和 α_{y2}/σ_0 。计算结果表明, $\alpha_{y1}/\sigma_0 = \alpha_{y2}/\sigma_0 = \alpha_y/\sigma_0$ 。图 2、图 3 分别给出了 $c = 2.0, 3.0$ 时的 c 次方能差解 α_y/σ_0 与 FPK 解之间的误差, 为便于比较, 图中也给出了方程差解相对于 FPK 解的误差(图中的曲线 I、II 分别为方程差解、 c 次方能差解相对于 FPK 解的误差)。

从图 2、图 3 的结果比较可以看出, 当 μ_1 较小, 比如小于 2.0 时, $c = 2.0$ 的 c 次方能差解方法比方程差方法更好; 当 $\mu_1 \geq 2.0$ 时, 取 $c = 3.0$ 则更好; 实际计算表明, 对于某些 μ_1 值, 在 2.0 与 3.0 之间还可找到更好的 c 值。由于 $\mu_1 = \varepsilon \sqrt{\pi N / k}$, 所以这一结果也可表达为, 如果系统非线性程度较大或外部激励强度较大, 则应提高 c 值, 反之, c 值也可取得低些; 同样地, 如果系统阻尼较小或刚度较小, 也应提高 c 值, 反之, c 值也可取得低些。根据本文的分析, 上述结果

可解释为: 由于软弹簧恢复力的增加速度低于位移的增加速度, 使得非线性系统能量比对应线性系统的能量偏低, 且非线性程度越大, 能量就越偏低, 因此为改善等效线性系统的结果, 应设法增加参加等效的能量的“效应量^[7]”, 即 c 值。但本例实际计算过程显示, c 也不能取得过大, 比如当 $c > 3.0$ 时, 计算的收敛性将有所降低。

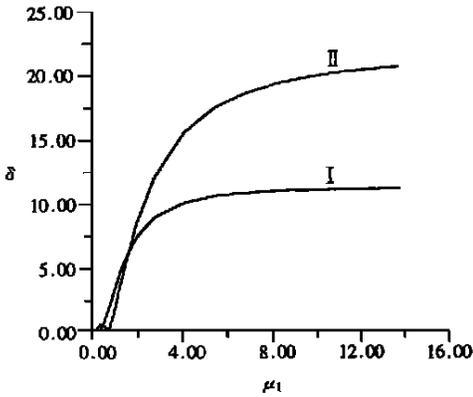


图2 $c = 2.0$ 时的计算结果比较

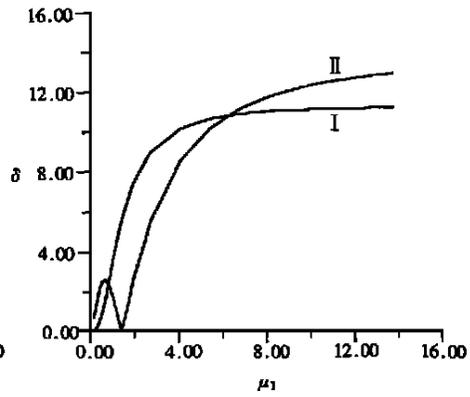


图3 $c = 3.0$ 时的计算结果比较

3 结 语

本文在文献[1]的基础上进一步研究多自由度非线性系统的 c 次方能量差方法。为减少需求解的未知数, 本文将振型变换方法引入基于能量差准则的等效线性化方法, 使原本对刚度矩阵的等效转为对固有频率的等效; 文中针对多自由度非线性系统受非零均值平稳高斯激励的情形建立 c 次方能量差方法的基本方程, 给出了主要算式及 c 的取值, 并结合算例分析了本文方法的精度。

算例分析结果表明, 对于硬弹簧系统, $c = 1.0$ 的 c 次方能量差方法已比方程差方法具有更好的精度; 对于软弹簧非线性系统, 当非线性程度较小时, $c = 2.0$ 的 c 次方能量差方法也有更好的精度, 但随着非线性程度的增加, 应适当提高参加等效的能量效应量, 即提高 c 值, 比如取 $c = 3.0$ 。算例计算过程还表明, 在同样采用振型变换方法的情况下, 本文方法比方程差方法更为简便。

[参 考 文 献]

- [1] 王国砚, 张相庭. 非线性随机振动中基于能量 c 次方的等效线性化方法[J]. 振动与冲击, 1998, 17(3): 6—9.
- [2] Iwan W D, Yang I M. Application of statistical linearization techniques to nonlinear multidegree_of_freedom system[J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 1972, 39(2): 545—550.
- [3] Atalik T S, Utku S. Stochastic linearization of multi_degree_of_freedom nonlinear systems[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1976, 4(4): 411—420.
- [4] Socha L, Soong T T. Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems[J]. Applied Mechanics Review, 1991, 44(10): 399—422.
- [5] Caughey T K. Equivalent linearization techniques[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1963, 35(11): 1706—1711.

- [6] Caughey T K. Derivation and application of the Kokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1963, 35(11): 1683—1692.
- [7] 张相庭. 非线性随机振动理论研究进展及在工程上应用[A]. 见: 黄文虎 主编. 一般力学(动力学、振动与控制)最新进展[C]. 北京: 科学出版社, 1994, 132—139.

Equivalent Linearization Method Based on Energy_ to_c th_Power Difference Criterion in Nonlinear Stochastic Vibration Analysis of Multi_Degree_ of_Freedom Systems

WANG Guo_yan¹, DAI Min²

(1. Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Department of Engineering
Mechanics and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, P R China;

2. Institute of Mathematics and Department of Financial Mathematics, School of Mathematical
Sciences, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: Basic equations of energy_to_c th_power difference criterion were derived for multi_degree_of_freedom(MDOF) systems subjected to stationary Gaussian excitations with non_zero mean. Modal transform technique was used in order to reduce unknowns. Main computational formulae were presented and suggested values of c were given. Numerical results show that the method of this paper prevails over equation difference criterion both in accuracy and in simplicity.

Key words: nonlinear; stochastic vibration; energy; equivalent linearization