

文章编号: 1000-0887(2001)09-0988-09

一类差分方程的不变曲线分枝*

贺天兰

(昆明理工大学 理学院, 昆明 650093)

(李继彬推荐)

摘要: 讨论一类差分方程的不变曲线分枝. 由于该差分方程所定义的动力系统是可积的, 故该方程的不变曲线的讨论可化为对平面 Hamilton 系统所定义的轨线的拓扑分类的研究. 通过严格的定性分析, 获得其不变曲线在参数空间内的分类.

关键词: 差分方程; Hamilton 系统; 不变曲线

中图分类号: O175.7 文献标识码: A

引 言

近年来, 对于微分_差分方程及纯差分方程所控制的离散动力系统的可积性(或可解性)的研究吸引着大量应用数学与力学家的注意. 所谓可积性是指离散动力系统存在某个不变量, 其离散轨道在该不变量所定义的水平集上运动. 最近, R. Sahadevan^[1]研究了差分系统

$$x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = \frac{P(x_n, y_n)}{Q(x_n, y_n)} \quad (1)$$

的不变量的一般形式, C. J. Schinas [2] 考虑了差分方程

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n + cx_n^2}{(c + dx_n + ex_n^2)x_{n-1}} \quad (2)$$

的不变量. 其中 a, b, c, d, e 是正常数. 方程(2) 有不变量

$$I_n = \frac{a}{x_{n-1}x_n} + b \left(\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n} \right) + c \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}} \right) + d(x_{n-1} + x_n) + ex_{n-1}x_n = \text{const} \quad (3)$$

方程(2) 对应于一个二维映射

$$G(x, y) = \left[y, \frac{a + by + cy^2}{(c + dy + ey^2)x} \right]. \quad (4)$$

于是在二维平面上, 映射 $G(x, y)$ 有不变曲线族

$$I(x, y) = \frac{a + b(x + y) + c(x^2 + y^2) + dxy(x + y) + ex^2y^2}{xy} = h = \text{const} \quad (5)$$

注意, 如果将 $I(x, y) = h$ 中分母 xy 移到右边, 并设常数 $h \neq 0$, 可得到

$$P(x, y) = a + b(x + y) + c(x^2 + y^2) + dxy(x + y) + ex^2y^2 + hxy = 0$$

这个双二次对称多项式就是著名的 Euler-Chasles 方程, 研究 $P(x, y) = 0$ 的图具有重要意义

* 收稿日期: 2000.02.22; 修订日期: 2001.03.25
基金项目: 云南省自然科学基金资助(1999A0018M)
作者简介: 贺天兰(1975-), 女, 云南昆明市人, 硕士.

(见 A. Veselov^[3])•

一个重要而有趣的问题是:由(5)所定义的曲线族在参数空间内具有什么样的动力学性质?换言之,随着参数 a, b, c, d, e 的改变,(5)所定义的曲线族有什么样的具体形式?如何进行分类?本文的目的就是要回答这个问题•李继彬等在[4]中曾考虑过 Lyness 映射

$$x_{n+1} = \frac{b + x_n}{(a + x_n)x_{n-1}}$$

的类似问题•本文考虑具有正参数的系统(2)•作参数变换 $\frac{a}{c} \rightarrow a, \frac{b}{c} \rightarrow b, \frac{d}{c} \rightarrow c, \frac{e}{c} \rightarrow e$, 可将(2)的参数减少一个,将(2)变为

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n + x_n^2}{(1 + dx_n + ex_n^2)x_{n-1}} \quad (n = 0, 1, \dots), \tag{6}$$

其中 a, b, d, e 仍为正常数•

此方程等价于二维映射

$$G(x, y) = \left[y, \frac{a + by + y^2}{(1 + dy + ey^2)x} \right]. \tag{7}$$

其对应于(5)的不变量为

$$H(x, y) = \frac{a + b(x + y) + x^2 + y^2 + dxy(x + y) + ex^2y^2}{xy} = h = \text{const} \tag{8}$$

于是,研究(7)的不变集,即是研究(8)所定义的水平曲线族•将 $H(x, y)$ 视为一个 Hamilton 函数,我们可以考虑下面的 Hamilton 系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \frac{-a - bx + y^2 - x^2 + dxy^2 + ex^2y^2}{xy^2}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = -\frac{-a - by - y^2 + x^2 + dx^2y + ex^2y^2}{x^2y}. \end{cases} \tag{9}$$

这样,研究(7)的不变曲线就等价于研究 Hamilton 系统(9)的相轨线,其中 $x \neq 0, y \neq 0$ •

研究(9)的困难在于该系统的水平和竖直等倾线是对称于 $y = x$ 的四次代数曲线,而四次代数曲线可能存在一至四个分枝•因此我们必需仔细研究等倾线的性质来确定平衡点的个数和性状•

1 系统(9)的水平 and 竖直等倾线的性状

由 $ex^2y^2 + dxy^2 - x^2 + y^2 - bx - a = 0$ 及 $ex^2y^2 + dx^2y + x^2 - y^2 - by - a = 0$ 分别解出 y, x 得:

$$y = \pm \sqrt{\frac{a + bx + x^2}{1 + dx + ex^2}}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{a + by + y^2}{1 + dy + ey^2}}$$

它们分别定义了对称于直线 $y = x$ 的两曲线 C_x, C_y •正是由于这种对称性,只要画出 C_x 的图形,将 C_x 关于直线 $y = x$ 作反射变换即得 C_y 的图形•

再注意到(9)的对称性,该系统的平衡点是 C_x, C_y 在直线 $y = x$ 上的交点,且满足四次代数方程

$$f(z) = -a - bz + dz^3 + ez^4 = 0 \tag{10}$$

下面讨论 C_x 的性状• C_x 的定义域是集合

$$\left\{ x \mid (1 + dx + ex^2) \neq 0, (a + bx + x^2)(1 + dx + ex^2) \geq 0 \right\}.$$

$$\text{再记 } x_a = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e}, x_b = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e}, x_c = \frac{-d}{2e}, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2},$$

$$x_0 = -b/2$$

命题 1 竖直等倾线 C_x 的渐近线有以下几种情形:

- a) C_x 恒有水平渐近线 $y = \pm \sqrt{1/e}$;
 b) 当 $d^2 > 4e$ 时, C_x 有两条垂直渐近线 $x = x_a$ 及 $x = x_b$;
 c) 当 $d^2 = 4e$ 时, C_x 只有一条垂直渐近线 $x = x_c$;
 d) 当 $d^2 < 4e$ 时, C_x 没有垂直渐近线.

命题 2 当 C_x 与 y 轴相交于 $(0, \pm\sqrt{a})$; 当 $b^2 > 4a$ 时, C_x 与 x 轴相交于两个点 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$; 当 $b^2 = 4a$ 时, C_x 与 x 轴相交于一个点 $(x_0, 0)$; 当 $b^2 < 4a$ 时, C_x 与 x 轴没有交点.

命题 3 C_x 的极值点由

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(d-be)x^2 + 2(1-ae)x + b-ad}{2y(1+dx+ex^2)} = 0$$

确定. 记 $\Delta' = (1-ae)^2 - (d-be)(b-ad)$, 则

若 $\Delta' > 0$, C_x 有两个极值点 $\left(\frac{ae-1+\sqrt{\Delta'}}{d-be}, 0\right)$ 及 $\left(\frac{ae-1-\sqrt{\Delta'}}{d-be}, 0\right)$;

若 $\Delta' = 0$, C_x 只有一个极值点 $\left(\frac{ae-1}{d-be}, 0\right)$;

若 $\Delta' < 0$, C_x 没有极值点.

显然, (9) 的奇点个数不超过四个, 且满足方程 (10). 由于

$$f'(z) = -b + 3dz^2 + 4ez^3 = 0 \quad (11)$$

的解具有判别式

$$\Delta = 4e^2b - d^3,$$

故有下列命题:

命题 4 当 $\Delta \geq 0$ 时, 系统 (9) 在第一、三象限各有一个奇点, 分别记为 P_+ , P_- .

命题 5 当 $\Delta < 0$ 时, 系统 (9) 有下列情形之一

i) 如果 a, b, d, e 满足下列情形:

a) $d^2 > 4e, b^2 > 4a, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e};$

b) $d^2 > 4e, b^2 > 4a, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} > \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e};$

c) $d^2 > 4e, b^2 = 4a, -b/2 > (-d + \sqrt{d^2 - 4e})/2e;$

d) $d^2 = 4e, b^2 > 4a, (-b - \sqrt{b^2 - 4a})/2 > -d/2e;$

e) $d^2 = 4e, b^2 = 4a, -b/2 > -d/(2e);$

f) $d^2 > 4e, b^2 > 4a, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e};$

$$\Delta' = 0;$$

之一时, (9) 在第一、三象限各有一、三个奇点;

ii) 当 $d^2 > 4e, b^2 > 4a, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e}$ 时, (9) 在第一、三象限各有一、二个奇点•

iii) 当 a, b, d, e 是除了以上两种情况外的其它可能情形时, (9) 在第一、三象限各有一个奇点•

2 系统(9)的奇点分布及相图

显然, 在系统(9)的一奇点 (z, z) , 其线性化系统的 Jacobi 矩阵为

$$J(z, z) = \frac{3a^2 + 8abz + 4(b^2 + 3a)z^2 + 8z^3 - 2aez^4 + 4ez^6 - e^2z^8}{z^8},$$

故当 $J(z, z) > 0 (< 0)$ 时, 奇点 (z, z) 是中心(鞍点); 当 $J(z, z) = 0$ 时, 且此时奇点的指标是 0, 则该点为退化鞍点, 亦称为尖点• 而且在中心点的某个邻域内, 存在一族闭轨填满相平面上的某个区域, 该区域称为周期环域 (period annulus)•

系统(9)的 (a, b, d, e) 四参数空间可以分类为以下区域:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), \text{ i. e. } \Delta > 0 \right\}, \\ A_a &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 > 4a \right\}, \\ A_b &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 = 4a \right\}, \\ A_c &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ A_d &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 > 4a \right\}, \\ A_e &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 = 4a \right\}, \\ A_f &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ A_g &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 < 4e, b^2 \geq 4a \right\}, \\ A_h &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b > d^3/(4e^2), d^2 < 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ B &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), \text{ i. e. } \Delta = 0 \right\}, \\ B_a &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 > 4a \right\}, \\ B_b &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 = 4a \right\}, \\ B_c &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ B_d &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 > 4a \right\}, \\ B_e &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 = 4a \right\}, \\ B_f &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ B_g &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 < 4e, b^2 \geq 4a \right\}, \\ B_h &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b = d^3/(4e^2), d^2 < 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ C &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), \text{ i. e. } \Delta < 0 \right\}, \\ C_a &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 > 4a \right\}, \\ C_b &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 = 4a \right\}, \\ C_c &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 > 4e, b^2 < 4a \right\}, \\ C_d &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 > 4a \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_e &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 = 4a \right\}, \\
C_f &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 = 4e, b^2 < 4a \right\}, \\
C_g &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 < 4e, b^2 \geq 4a \right\}, \\
C_h &= \left\{ (a, b, d, e) \mid b < d^3/(4e^2), d^2 < 4e, b^2 < 4a \right\}, \\
A'_g &= A_g \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid a > \frac{1}{e} \right\}, \\
A''_g &= A_g \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid a < \frac{1}{e} \right\}, \\
C'_a &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e}, \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} > \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, a < \frac{1}{e}, \Delta' = 0 \right\} \right], \\
C'_d &= \left[C_d \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > -\frac{d}{2e} \right\} \right], \\
C_a^{(1)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2} < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right], \\
C_a^{(2)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} < \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right], \\
C_a^{(3)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} < \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \right\} \right], \\
C_a^{(4)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-d}{2e} < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \right\} \right], \\
C_a^{(5)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right], \\
C_a^{(6)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right], \\
C_a^{(7)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right], \\
C_a^{(8)} &= \left[C_a \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \right\} \right]. \\
C'_b &= \left[C_b \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b}{2} > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right],
\end{aligned}$$

$$C_b'' = \left\{ C_b \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b}{2} > \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4e}}{2e} \right\} \right\},$$

$$C_d'' = \left\{ C_d \cap \left\{ (a, b, d, e) \mid \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} < -\frac{d}{2e} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \right\} \right\},$$

1) 当 $(a, b, d, e) \in A_a, B_a, C_a^{(1)}, C_a^{(2)}, C_a^{(3)}, C_a^{(4)}, C_a^{(5)}$ 时, C_x 有两条垂直渐近线, 与 x 轴有两个交点.

2) 当 $(a, b, d, e) \in A_b, B_b, (C_b \cap \{(a, b, d, e) \mid x_0 < x_b\})$ 时, C_x 有两条垂直渐近线, 与 x 轴有一个交点. 而且 $x_0 < x_b < x_a, \Delta' > 0, a > \frac{1}{e}$.

3) 当 $(a, b, d, e) \in A_c, B_c, C_c$ 时, C_x 有两条垂直渐近线, 与 x 轴没有交点, $\Delta' > 0$ 或 $\Delta' = 0, a > \frac{1}{e}$ 或 $a < \frac{1}{e}$.

4) 当 $(a, b, d, e) \in A_d, B_d, C_d$ 时, C_x 只有一条垂直渐近线, 与 x 轴有两个交点.

5) 当 $(a, b, d, e) \in A_e$ 时, C_x 只有一条垂直渐近线, 与 x 轴有一个交点, $a > \frac{1}{e}, x_0 < x_c, \Delta' > 0$.

6) 当 $(a, b, d, e) \in A_f, B_f, C_f$ 时, C_x 只有一条垂直渐近线, 与 x 轴没有交点, $a > \frac{1}{e}$ 或 $a < \frac{1}{e}, \Delta' > 0$ 或 $\Delta' = 0$.

在(1)~(6)中, 系统(9)在第一、三象限各有一个奇点, 它们分别是中心、鞍点.

7) 当 $(a, b, d, e) \in A_g, B_g, C_g$ 时, C_x 没有垂直渐近线及与 x 轴有两个交点. 它们有如下情形:

i) $(a, b, d, e) \in A_g, a > \frac{1}{e}, \Delta' > 0$, 系统(9)在第一、三象限各有一个奇点, 二者都是中心.

ii) $a < 1/e, \Delta' > 0$ 或 $\Delta' = 0$, 系统(9)在第一、三象限各有一个奇点, 它们分别是中心、鞍点.

8) 当 $(a, b, d, e) \in A_h, B_h, C_h$ 时, C_x 没有垂直渐近线, 与 x 轴没有交点, $a > 1/e$ 或 $a < 1/e, \Delta' > 0$ 或 $\Delta' = 0$, 系统(9)在第一、三象限各有一个奇点, 它们都是中心.

9) 当 $(a, b, d, e) \in B_e$ 时, C_x 有两条水平渐近线, 只有一条垂直渐近线, 与 x 轴有一个交点($x_0 = -b/2, 0$), $a = 1/e, \Delta' = 0$, 系统(9)在第一、三象限各有一个奇点, 它们分别是中心、尖点.

10) 当 $(a, b, d, e) \in C_a$ 时, C_x 有两条垂直渐近线, 与 x 轴有两个交点. 它们有如下情形:

i) $x_2 > x_a, a < 1/e$, 此时有 $\Delta' > 0$, 系统(9)在第一、三象限分别有一个奇点、三个奇点, 它们分别是中心、鞍点、鞍点、鞍点.

ii) $x_1 > x_a, x_b < x_2 < x_a$, 则 $a < 1/e$, 此时有 $\Delta > 0$ 或 $\Delta' = 0$ 或 $\Delta' < 0$, 系统(9)的奇点分布同上.

iii) $x_1 > x_a, x_b > x_2$, 则 $a < 1/e$ 或 $a > 1/e, \Delta' = 0$, 系统(9)在第一、三象限分别有一个奇点、三个奇点, 它们分别是中心、鞍点、中心、鞍点.

iv) $x_2 = x_a$, 此时 $a > 1/e$ 或 $a < 1/e, \Delta' > 0$, 系统(9)在第一、三象限分别有一个奇点、

二个奇点, 它们分别是中心、鞍点、鞍点。

11) 当 $(a, b, d, e) \in C_b$ 时, C_x 有两条垂直渐近线, 与 x 轴有一个交点, 且当 $x_0 > x_a, \Delta' > 0, a < \frac{1}{e}$ 时, 系统(9) 在第一、三象限分别有一个奇点、三个奇点, 它们分别是中心、中心、鞍点、鞍点。

12) 当 $(a, b, d, e) \in C_d$ 时, C_x 只有一条垂直渐近线, 与 x 轴有两个交点。 $a < 1/e$, 且当 $x_2 > x_c, \Delta' > 0$, 系统(9) 在第一、三象限分别有一个奇点、三个奇点, 它们分别是中心、鞍点、鞍点、中心。

13) 当 $(a, b, d, e) \in C_e$ 时, C_x 只有一条垂直渐近线, 与 x 轴有一个交点, $a < 1/e, \Delta' > 0$, 且 $x_0 > x_c$, 系统(9) 在第一、三象限分别有一个奇点、三个奇点, 它们分别是中心、中心、鞍点、鞍点。

由于 C_x 的图形太多, 我们只绘出对应与系统(9) 的轨线结构的四种有代表性的图形, 分别如图 1, 图 2, 图 3, 图 4。

总结上面的图形, 我们得到以下几个结论:

命题 6 对任何正参数 a, b, e, d , 系统(9) 在第一象限恒存在一个围绕中心 P_+ 的周期环域(如图 5)。

事实上, 系统(9) 的所有第一象限内的奇点的指标是 + 1, 由此可推得相应的结论。

命题 7 当 $(a, b, d, e) \in A_h, B_h, C_h, A'_g$ 时, 第三象限亦存在一个周期环域(如图 6)。 这些周期环所对应的 Hamilton 量满足, 当 $(a, b, d, e) \in (A'_g)$ 时, $-\infty < h < H(P_-)$; 当 $(a, b, d, e) \in A_h, B_h, C_h$ 时, $H(P_-) < h < +\infty$

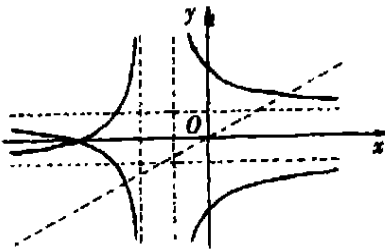


图 1

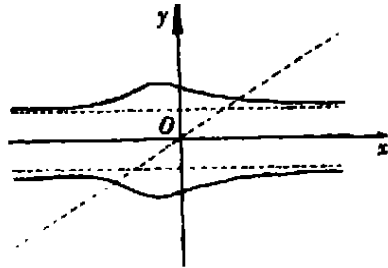


图 2

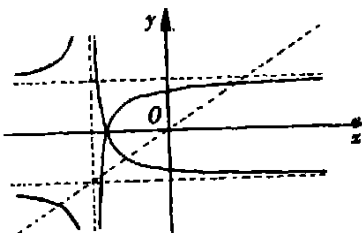


图 3

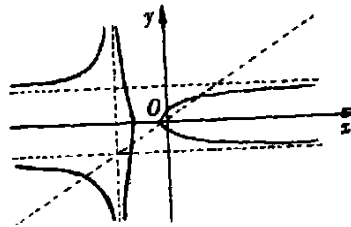


图 4

命题 8 记系统(9) 的第三象限的三个奇点依次为 P_1, P_2, P_3 , 则当 $(a, b, d, e) \in C_e, C_b, C_a, C_d$ 时, 第三象限存在一个同宿闭轨, 其内部被围绕中心的周期闭轨所填满, 且这些周期闭轨所对应的 Hamilton 量满足:

当 $(a, b, d, e) \in (C_a)$ 时, $H(P_3) < h < H(P_2), P_2$ 是中心;

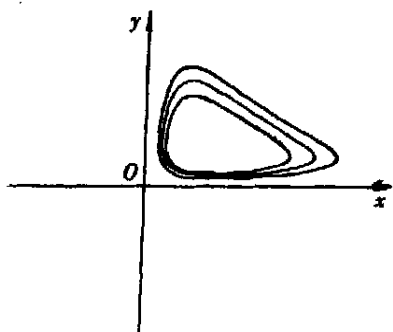


图 5

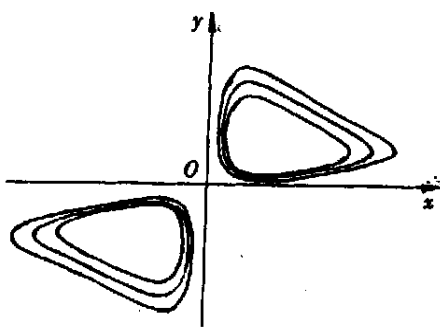


图 6

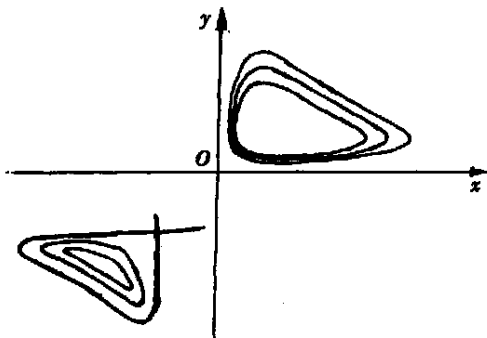


图 7

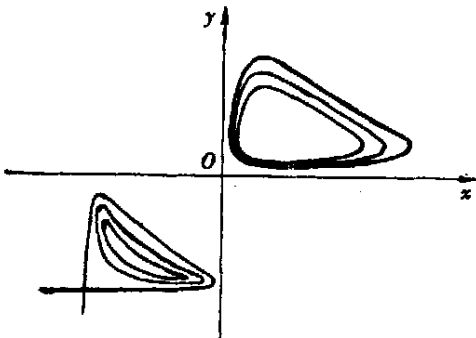


图 8

当 $(a, b, d, e) \in C'_b$ 时, $H(P_1) < h < H(P_2)$, P_1 是中心.

当 $(a, b, d, e) \in (C'_d)$ 时, $H(P_3) < h < H(P_2)$, P_3 是中心; (如图 7)

当 $(a, b, d, e) \in C_e$ 时, $H(P_1) < h < H(P_2)$, P_1 是中心. (如图 8).

对于系统(9)在第三象限内的奇点,除了命题 7, 8 中讨论的情形外,还有如下的情况:

- 1) 当 $(a, b, d, e) \in B_e$ 时, $a = 1/e$, (9) 的在第三象限内的奇点 $(-1/\sqrt{e}, -1/\sqrt{e})$ 是尖点.
- 2) 当 $(a, b, d, e) \in A_a, A_b, A_c, A_d, A_e, A_f, B_a, B_b, B_c, B_d, B_f, B_g, C_a^{(1)}, C_a^{(2)}, C_a^{(3)}, C_a^{(4)}, C_a^{(5)}, A_g, C_d, C_b, C_c, C_f, C_g$, 时, 系统(9) 在第三象限内只有一个奇点, 且是高级鞍点.
- 3) 当 $(a, b, d, e) \in (C_a^{(6)})$ 时, 系统(9) 在第三象限内有两个奇点, 也是两个高级鞍点.
- 4) 当 $(a, b, d, e) \in (C_a^{(7)}, (C_a^{(8)})$ 时, 系统(9) 在第三象限内有三个奇点, 是三个高级鞍点.

3 总 结

由于(7)的不变曲线族的几何意义就是(9)所定义的 Hamilton 向量场的积分曲线, 故(9)的轨线的动力学行为决定了映射(7)的解的收敛性及振动的性质. 实际上, 对应于(9)的中心点 P_+ , 映射(4) (与(7) 只相差一个常数) 的任何初始点异于 P_+ 的离散轨道不可能收敛于此点, 而以 P_+ 为中心的周期环域对应着(4) 的一个不变区域. 即当(4) 的初始点位于此不变区域中时, 由(4) 的初始点出发的离散轨道一定绕着 P_+ 振动. 对应于(9) 的鞍点, 尖点, 或有双曲扇区的高次奇点 P_- , 若(4) 的初始点在 P_- 的稳定流形上时, (4) 的由此点确定的离散轨道将

收敛于此点。

总结以上, 对应于(4)有:

定理 映射(4)的不变曲线有以下三类:

- i) 第一象限恒存在(4)的一个由(9)的周期环域构成的不变区域。
- ii) 第一、三象限分虽存在(4)的一个由(9)的周期环域构成的不变域。
- iii) 第一象限恒存在(4)的一个由(9)的周期环域构成的不变区域及第三象限存在一个(4)的由(9)的一条同宿轨及其内部所包围的周期轨族构成的不变域。

在这些不变区域中, 映射(2)或(4)的所有解将围绕着(9)的平衡点振动, 如图5~8所示。

致谢 作者衷心感谢李继彬教授的精心指导与帮助。

[参 考 文 献]

- [1] Sahadevan R. On invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form[J]. J Math Anal Appl, 1999, **233**: 498—507.
- [2] Schinas C J. Invariants for difference equation and systems of difference equation of rational form[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**: 164—179.
- [3] Veselov A P. Integrable maps[J]. Russian Math Survey, 1991, **46**(5): 1—52.
- [4] LI Ji_bin, LIU Zheng_rong. Invariant curves of the generalized Lyness equation[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1999, **9**(7): 1143—1450.
- [5] 张芷芬, 等. 微分方程定性理论(现代数学丛书)[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [6] 李继彬, 冯贝叶. 稳定性分支与混沌[M]. 昆明: 云南科技出版社, 1994.
- [7] 李继彬, 李存富. 非线性微分方程[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1987.

Bifurcations of Invariant Curves of a Difference Equation

HE Tian_jan

(Institute of Science, Kunming University of Science and
Technology, Kunming 650093, P R China)

Abstract: Bifurcation of the invariant curves of a difference equation is studied. The system defined by the difference equation is integrable, so the study of the invariant curves of the difference system can become the study of topological classification of the planar phase portraits defined by a planar Hamiltonian system. By strict qualitative analysis, the classification of the invariant curves in parameter space can be obtained.

Key words: difference equation; Hamiltonian system; invariant curve