

文章编号: 1000-0887(2001) 09-0976-07

任意形状凸起地形对平面 SH 波的散射^{*}

曹欣荣¹, 宋天舒², 刘殿魁¹

(1. 哈尔滨工程大学 建筑工程系, 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

(唐立民推荐)

摘要: 将具有任意形状的凸起地形对稳态 SH 波散射问题转换为契合问题加以研究。利用求解弹性波动问题的复变函数与保角映射方法, 在包括任意形状凸起边界在内的一个区域中, 构造一个在凸起边界上应力自由, 其他部分位移和应力均为任意的驻波解。然后再将这个驻波解与其余下的区域中的散射波解在两个区域结合面上完成契合过程, 由此决定出这两个区域中的驻波和散射波解答。最后对圆弧形和半椭圆形凸起进行了数值计算, 并将计算结果与有限元法的数值解进行了比较。

关键词: 任意形状凸起地形; SH 波散射; 契合; 保角映射

中图分类号: O34 **文献标识码:** A

引 言

研究强地震时地面运动的特征, 为结构物的抗震设计提供合理的设计参数, 是地震工程学研究的基本命题之一。地面运动是一个复杂的物理现象, 受诸多因素影响, 地形条件就是其一。研究地形条件对强震时地面运动的影响, 是近二十年来众多学者所关注的课题, 并取得了相当的研究成果。在解析法的研究上, 继 Trifunac^[1] 首开先河, 利用波函数展开法求解了平面 SH 波对半圆形凹陷地形的散射之后, 解决凹陷地形问题的方法得到了发展并逐步完善, 对凸起地形散射问题的研究由于存在数学上的困难而发展迟缓。1992 年以后, 袁晓铭^[2], 崔志刚^[3,4] 等人利用波函数展开法和分区方式, 采用不同的处理手段, 求解了平面 SH 波对半圆形和任意弧形凸起地形的散射问题。但任意形状凸起地形散射问题的研究, 仍是留在人们心中的一个难以解决的问题。

本文按文献[3]所采用的思路, 利用弹性波动理论中的复变函数与保角映射方法^[5,6] 来求解平面 SH 波对任意形状凸起地形散射的问题。最终将问题转化为一个普通的契合问题而加以解决。为此, 首先设计一个辅助问题, 即在包括有任意形凸起的边界线在内的区域 I 中, 寻找一个驻波解, 并使其在任意形凸起的边界线上应力自由, 而在其余下边界上应力和位移为任意。进一步, 将区域 I 装配至余下的区域 II 上, 在两个区域的结合面上, 按契合条件来建立求解该问题的无穷代数方程组。

本文最后对圆弧形和半椭圆形凸起地形的平面 SH 波散射问题进行了数值计算, 并与有

* 收稿日期: 2000_06_22; 修订日期: 2001_04_08

作者简介: 曹欣荣(1965—), 女, 副教授, 博士。

限元法作了比较,结果表明这个方法是可行的。本文为计算凸起地形散射问题提供了一个新方法,可供研究和工程设计参考。

1 辅助问题

求解稳态平面 SH 波对任意形状凸起地形的散射问题,就是在地表 S 和凸起界面 C 上应力自由的条件之下求解 SH 波的控制方程(图 1)。按文献[3]和[6]的思路,可以采用分区和保角映射的方法来处理:即将具有任意形状凸起地形的弹性半空间分为包括 C 和 C 在内的任意形区域 I 和包含边界 S 和 S 的区域 II, C 和 S 为公共边界,且满足契合条件(图 2);将 Z 平面上区域 I 的外域保角映射成 η 平面上单位圆外域,映射函数由 Schwarz_Christoffel 积分构造,且具有如下形式^[7]:

$$Z = \omega(\eta) = c(\eta + a_0 + a_{-1}\eta^{-1} + a_{-2}\eta^{-2} \dots) \quad (1)$$

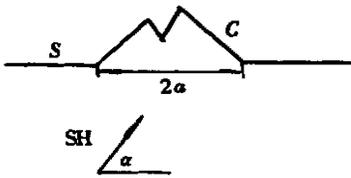


图 1 任意形状凸起地形

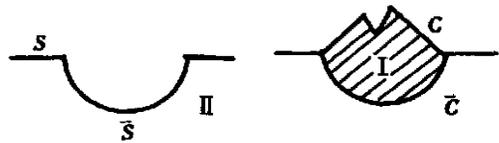


图 2 求解区域的分割

在映射平面 η 上,均匀、各向同性、线弹性介质空间中,关于稳态 SH 波的传播与散射的控制方程为如下形式^[7,61]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = \left[\frac{ik}{2} \right]^2 \omega'(\eta) \overline{\omega'(\eta)} w(\eta, \bar{\eta}), \quad (2)$$

其中 w 为位移函数, k 为波数,而相应的应力表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z} &= \frac{\mu}{|\omega'(\eta)|} \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} e^{i\theta} + \frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}} e^{-i\theta} \right], \\ \tau_{\theta z} &= \frac{\mu}{|\omega'(\eta)|} \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} e^{i\theta} - \frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}} e^{-i\theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为简化凸起地形散射问题的求解,现构造一个辅助问题。取映射边界 T , T 与 C , C 相对应,在映射平面上的单位圆域内,求解一个驻波解,使其满足以下边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(st)} &= 0, \quad (\eta \in T), \\ \tau_{\theta z}^{(st)} &= \frac{Hkw_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [J_{n-1}(k|\eta|) - J_{n+1}(k|\eta|)] \left[\frac{\eta}{|\eta|} \right]^n \quad (\eta \in T), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 C_n 为任意常数。满足上述边界条件的驻波解可表示为:

$$w^{(st)} = w_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l J_l(k|\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^l, \quad (5)$$

其中 D_l 为任意常数。相应的应力表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(st)} &= \frac{Hkw_0}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l \left[J_{l-1}(k|\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{l-1} \frac{\omega'(\eta)}{|\omega'(\eta)|} e^{i\theta} - \right. \\ &\quad \left. J_{l+1}(k|\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{l+1} \frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\overline{\omega'(\eta)}|} e^{-i\theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(4)和(6)在 $(-\pi, \pi)$ 区间内展成 Fourier 级数,并比较得:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l \beta_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (J_{n-1}(k) - J_{n+1}(k)) \alpha_{nm} \quad m \in (-\infty, +\infty), \quad (7)$$

式中

$$\beta_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(J_{l-1}(k | \omega(\eta) | \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{l-1} \frac{\omega'(\eta)}{|\omega'(\eta)|} e^{i\theta} - J_{l+1}(k | \omega(\eta) | \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{l-1} \frac{\omega'(\eta)}{|\omega'(\eta)|} e^{-i\theta} \right) e^{-im\theta} d\theta,$$

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_T e^{i(n-m)\theta} d\theta.$$

解式(7)得:

$$D_l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (J_{n-1}(k) - J_{n+1}(k)) \alpha_{nm} p_{ml}, \quad (8)$$

式中

$$p_{ml} = \left(\prod_{j=1}^{2l} \beta_j - \prod_{j=1}^{2l} \beta_j \right) / D,$$

其中 l 为式(7)中的无穷级数截断项数, D 为式(7)中 D_l 的系数行列式的值, 且有:

$$f = m + i - \left[\frac{m + l + 1 + i}{2l + 1} \right] * (2l + 1),$$

$$j = n + i - \left[\frac{n + l + 1 + i}{2l + 1} \right] * (2l + 1),$$

$$e = m - i - \left[\frac{m + l + 1 - i}{2l + 1} \right] * (2l + 1),$$

[*] 表示分数的整数部分. 代式(8)至式(5)得:

$$w^{(st)} = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_n (J_{n-1}(k) - J_{n+1}(k)) \alpha_{nm} p_{ml} J_l(k | \omega(\eta) |) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^l, \quad (9)$$

式(9)即为控制方程(2)满足边界条件(4)的、单位圆域内的驻波解.

2 SH 波的散射和边值问题

按文摘[3], 可利用式(9)将平面 SH 波对任意形状凸起地形的散射转换成一个契合问题, 即可将式(9)之解装配到其余下的区域 II 的边界 C 上, 按连续条件建立求解方程. 图 2 中区域 II 的总波场为:

$$w^{(t)} = w^{(i)} + w^{(r)} + w^{(s)}, \quad (10)$$

$w^{(i)}$ 和 $w^{(r)}$ 为完整半空间的入射波和反射波, 而 $w^{(s)}$ 为具有任意形状凹陷的弹性半空间的散射波, 且满足水平表面应力自由的条件. 在 η 平面上, 按文献[4] 可记为:

$$\left. \begin{aligned} w^{(i)} &= w_0 \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\omega(\eta) e^{i\alpha} + \overline{\omega(\eta)} e^{-i\alpha} \right] \right\}, \\ w^{(r)} &= w_0 \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\overline{\omega(\eta)} e^{i\alpha} + \omega(\eta) e^{-i\alpha} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$w^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k | \omega(\eta) |) \left\{ \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^n + \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-n} \right\}, \quad (12)$$

其中 α 为入射波之入射角, A_n 为任意常数.

现由契合条件来确定 A_n . 记

$$w^{(f)} = w^{(i)} + w^{(r)}, \quad \tau_{\alpha}^{(f)} = \tau_{\alpha}^{(i)} + \tau_{\alpha}^{(r)}. \quad (13)$$

在映射平面单位圆周 T 上, 位移和应力满足如下契合条件:

$$w^{(f)} + w^{(s)} = w^{(st)}, \quad \tau_{\rho}^{(f)} + \tau_{\rho}^{(s)} = \tau_{\rho}^{(st)}. \quad (14)$$

将式(11)和(12)代入式(3), 然后一并代入式(14)得到以下方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{11} A_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n^{12} C_n &= \varepsilon_1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{21} A_n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n^{22} C_n &= \varepsilon_2, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{11} &= -H_n^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left\{ \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^n + \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-n} \right\}, \\ \varepsilon_n^{12} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (J_{n-1}(k) - J_{n+1}(k)) a_{lm} p_{ml} l(k|\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^l, \\ \varepsilon_1 &= \exp \left\{ \frac{ik}{2} [\omega(\eta) e^{i\alpha} + \overline{\omega(\eta)} e^{-i\alpha}] \right\} + \exp \left\{ \frac{ik}{2} [\overline{\omega(\eta)} e^{i\alpha} + \omega(\eta) e^{-i\alpha}] \right\}, \\ \varepsilon_n^{21} &= \frac{1}{|\omega'(\eta)|} \left\{ \left[H_{n+1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left(\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right)^{-n-1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. H_{n-1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left(\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right)^{n-1} \right] \omega'(\eta) e^{i\theta} + \right. \\ &\quad \left. \left[H_{n+1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left(\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right)^{n+1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. H_{n-1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left(\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right)^{-n+1} \right] \overline{\omega'(\eta)} e^{-i\theta} \right\}, \\ \varepsilon_n^{22} &= (J_{n-1}(k) - J_{n+1}(k)) \left(\frac{\eta}{|\eta|} \right)^n, \\ \varepsilon_2 &= \frac{i}{|\omega'(\eta)|} \left\{ \frac{w^{(i)}}{w_0} [\omega'(\eta) e^{i(\alpha+\theta)} + \overline{\omega'(\eta)} e^{-i(\alpha+\theta)}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{w^{(r)}}{w_0} [\omega'(\eta) e^{i(\theta-\alpha)} + \overline{\omega'(\eta)} e^{-i(\theta-\alpha)}] \right\}. \end{aligned}$$

将式(15)两边同乘 $e^{-im\theta}$ 并在单位圆边界 T 上积分, 得到关于 A_n 的无穷代数方程:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} A_n = E_n, \quad (16)$$

式中:

$$a_{nm} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{nl} p_{lq} k_{qm} - c_{nm}, \quad E_m = e_m - \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_{lq} g_{lq} k_{qm},$$

其中:

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{1}{2\pi} \int_T \varepsilon_n^{11} e^{-im\theta} d\theta, & d_{nl} &= \frac{1}{2\pi} \int_T \varepsilon_n^{21} e^{-i\theta} d\theta, \\ e_m &= \frac{1}{2\pi} \int_T \varepsilon_1 e^{-im\theta} d\theta, & g_l &= \frac{1}{2\pi} \int_T \varepsilon_2 e^{-il\theta} d\theta, \\ k_{qm} &= \frac{1}{2\pi} \int_T J_q(k|\omega(\eta)|) \left(\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right)^q e^{-im\theta} d\theta, \end{aligned}$$

p_{lq} 见式(8)定义.

3 算 例

在计算过程中, 定义自由地表上的无量纲位移幅值和无量纲波数分别为:

$$w_d = \frac{|w|}{w_0}, \quad \zeta = \frac{ka}{\pi}, \quad (17)$$

其中 a 为任意形状凸起地形在水平面上的投影半宽度(如图 1)。

算例 1 圆弧形凸起地形对 SH 波的散射

该问题的区域 I 为延拓圆弧所构成的圆形, 将其映射为单位圆的映射函数为:

$$Z = \omega(\eta) = R\eta + (R - ta)i, \quad (18)$$

其中 t 为高宽比, 即圆弧高度为与 a 的比值, R 为圆弧半径。利用式(18)和方程(16)则可对其求解。截断无限矩阵 $n = m = 15$, 图 3 至图 6 给出当 $t = 0.5$ 和 0.75 时, 圆弧形凸起地形表面的无量纲位移幅值, $x/a = 0$ 处为凸起中心。

算例 2 半椭圆形凸起地形对 SH 波的散射

该问题的区域 I 为一个完整的椭圆形, 将其映射成单位圆的映射函数为:

$$Z = \omega(\eta) = a \left[\frac{1+t}{2} \right] \left[\eta + \frac{1-t}{1+t} \eta^{-1} \right], \quad (19)$$

其中 t 为高宽比, 即半椭圆高度与 a 的比值。利用式(19)和方程(16)则可对其求解。截断无限矩阵 $n = m = 20$, 图 7(a) 至图 9(a) 分别给出 $t = 3/4$ 和 $4/3$ 时凸起地形表面的无量纲位移幅值, $x/a = 0$ 处为凸起中心。而图 7(b) 至 9(b) 分别给出相应条件下用有限元法得到的数值结果。

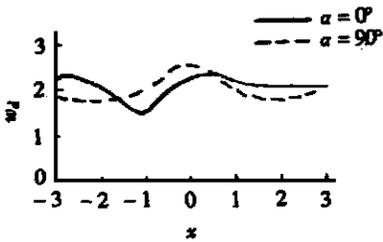


图 3 圆弧形凸起地形的位移幅值
($t = 0.5, \zeta = 0.25$)

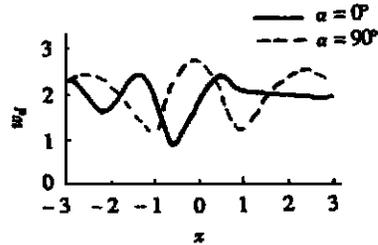


图 4 圆弧形凸起地形的位移幅值
($t = 0.5, \zeta = 0.5$)

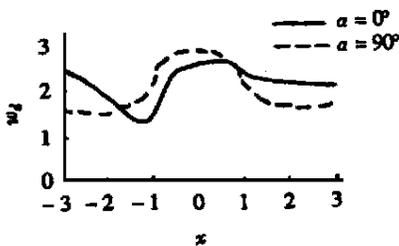


图 5 圆弧形凸起地形的位移幅值
($t = 0.75, \zeta = 0.25$)

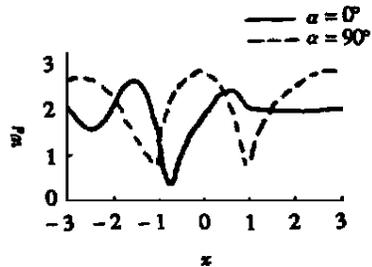


图 6 圆弧形凸起地形的位移幅值
($t = 0.75, \zeta = 0.5$)

4 结果分析

本文采用保角映射方法, 通过构造单位圆域中的驻波解, 将求解任意形状凸起地形对平面 SH 波的散射问题转化为契合问题。根据数值计算结果, 讨论如下:

1) 计算结果表明入射角及无量纲波数对位移幅值的影响是明显的。入射角增加, 位移幅

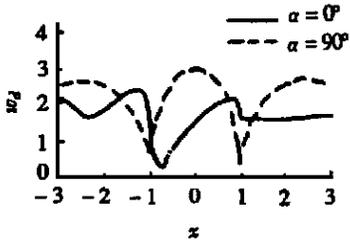


图 7(a) 半椭圆形凸起地形的位移幅值
($t = 2/3, \zeta = 0.5$)

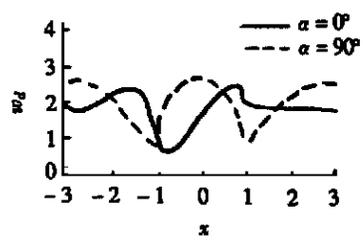


图 7(b) 半椭圆形凸起地形的位移幅值
($t = 2/3, \zeta = 0.5$, 有限元)

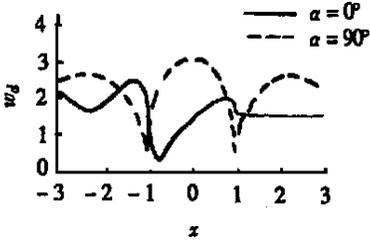


图 8(a) 半椭圆形凸起地形的位移幅值
 $t = 3/4, \zeta = 0.5$

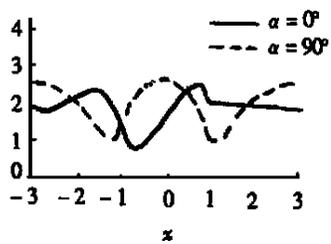


图 8(b) 半椭圆形凸起地形的位移幅值
($t = 3/4, \zeta = 0.5$, 有限元)

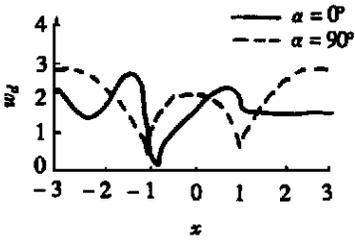


图 9(a) 半椭圆形凸起地形的位移幅值
($t = 4/3, \zeta = 0.5$)

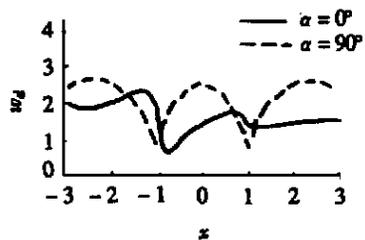


图 9(b) 半椭圆形凸起地形的位移幅值
($t = 4/3, \zeta = 0.5$ 有限元)

值增大;无量纲波数增大,位移幅值变化剧烈,呈现高频状。

2) 算例 1 的计算结果与文献[2]、[3]相吻合,表明本文的分析方法及程序是可行、可靠的。

3) 算例 1 和算例 2 表明,高宽比影响位移幅值,但与凸起形状有关。对圆弧形凸起,高宽比增加,位移幅值升高。对半椭圆形凸起,在所计算的入射频率范围内,高宽比增加,位移幅值降低,该结果与用有限元法得到的数值结果相符。

4) 对于有些形状的凸起地形,如高宽比过小(过扁)或具有尖角的凸起地形会导致线性方程组呈病态,计算时会遇到困难,有待克服。

感谢国家地震局工程力学研究所丁海平博士在数值计算过程中的大力协助。

[参 考 文 献]

- [1] Trifunac M D, Scattering of Plane SH wave by a semi_cylindrical canyon[J]. Int J Earthq Engng Struct Dyn, 1973, (1): 276—281.

- [2] 袁晓铭, 廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1996, **16**(2): 1—13.
- [3] 崔志刚, 曹欣荣, 刘殿魁. SH 波对半圆形凸起地形的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1998, **18**(1): 140—146.
- [4] 崔志刚, 邹永超, 刘殿魁. SH 波对圆弧形凸起地形的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1998, **18**(4): 8—14.
- [5] LIU Dian_kui, Han F. Scattering of plane SH_waves by a cylindrical canyon of arbitrary shape[J]. Int J Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1991, **10**(5): 249—255.
- [6] LIU Dian_kui, Gai B Z, Tao G Y. Application of the method of complex function to dynamic stress concentrations[J]. Wave Motion, 1982, (4): 293—304.
- [7] 黎在良, 刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

Scattering of Plane SH_Wave by a Cylindrical Hill of Arbitrary Shape

CAO Xin_rong¹, SONG Tian_shu², LIU Dian_kui¹

(1. Department of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P R China;

2. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China)

Abstract: The problems of scattering of plane SH_wave by a cylindrical hill of arbitrary shape is studied based on the methods of conjunction and division of solution zone. The scattering wave function is given by using the complex variable and conformal mapping methods. The conjunction boundary conditions are satisfied. Furthermore applying orthogonal function expanding technique, the problems can finally be summarized into the solution of a series of infinite algebraic equations. At last, numerical results of surface displacements of a cylindrical arc hill and of a semi_ellipse hill are obtained. And those computational results are compared with the results of finite element method (FEM).

Key words: cylindrical hill of arbitrary shape; scattering of SH_wave; conjunction; conformal mapping