

文章编号: 1000-0887(2001)09-0969-07

# 电场作用下压电层合梁的分析<sup>\*</sup>

林启荣, 刘正兴, 王宗利

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(沈惠申推荐)

摘要: 利用压电介质的二维本构关系, 推导出带有上、下压电激励器的弹性梁在电场作用下的位移、应力分布的解析表达式, 得到了压电激励器对弹性梁的等效作用力, 最后给出了带有上、下压电激励的弹性梁在一端固支或两端简支边界条件下的算例

关键词: 压电层合梁; 压电激励器/传感器; 压电弹性

中图分类号: O342 文献标识码: A

## 引 言

由于压电材料在智能结构中有着广泛的应用前景, 所以对其作动与感测机理的研究显得格外重要<sup>[1]</sup>。对于压电层合梁, Crawley 和 Luis<sup>[2]</sup>作出了开创性的工作, 建立了表面粘贴或嵌入压电体作为驱动元件的层合梁的静力与动力模型。由于 Crawley 的模型中没有考虑横向剪切力和轴向力的影响, Im 和 Atluri<sup>[3]</sup>提出了一个更完善的模型。对于压电层合板, Ray 等<sup>[4]</sup>采用双级数解法对四边简支板进行了静力分析。Mitchell 和 Reddy<sup>[5]</sup>采用三阶剪切变形理论建立了压电层合板的运动方程。Tzou 和 Gadre<sup>[6]</sup>利用 Hamilton 原理推导了带压电体的层合壳的运动方程和边界条件。作为压电材料智能结构的形状控制的基础研究, 本文对受电场作用的压电层合梁进行了分析, 求得其弹性基体和压电层的应力、位移的分布状态, 并分析了压电激励器对弹性梁的等效作用, 最后给出了其在一端固支或两端简支边界条件下的数值算例。本文的结果是严格按照压电弹性耦合方程推导出来的。

## 1 基本方程

图 1 为受到电压作用的压电层合梁。在此讨论的压电介质属于 mm2 类, 在  $x-y$  平面内呈各向同性, 在  $x-z$  平面内是正交异性的; 弹性基体是各向同性的。假定压电材料与弹性材料同厚度  $t$ , 且远小于长度  $l$  及高度  $H$ , 那么可以作为  $x-z$  平面内的平面应力问题进行讨论, 其基本方程可参见文献[7]。

## 2 压电层合梁在电场作用下的静力分析

如图 1, 上、下压电层分别受到电压  $V_1$ 、 $V_2$  的作用, 上压电层的下表面与下压电层的上表

\* 收稿日期: 2000.09.25; 修订日期: 2001.04.08  
基金项目: 中国船舶工业总公司资助项目(98J403.3)  
作者简介: 林启荣(1973—), 男, 福建云霄人, 博士。

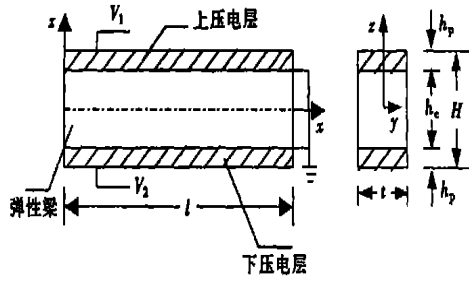


图 1 压电弹性层合梁

面都接地。假定压电层与弹性层理想粘结且不考虑粘结层影响。

### 1) 平面应力问题中压电体、弹性体的应力函数

由平衡方程可知, 平面应力问题存在应力函数  $\phi$ , 使

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}, \quad (1)$$

压电材料的应力函数和电势分别用  $\phi^{pi}$  和  $\varphi^{pi}$  ( $i = 1, 2$ ) 表示 ( $i = 1$  表示为上压电层;  $i = 2$  表示为下压电层)。这样其电学方程和协调方程可分别表示为

$$(d_{33} - d_{15}) \frac{\partial^3 \phi^{pi}}{\partial z \partial x^2} - g_{11} \frac{\partial^2 \varphi^{pi}}{\partial x^2} + d_{31} \frac{\partial^3 \phi^{pi}}{\partial z^3} - g_{33} \frac{\partial^2 \varphi^{pi}}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$s_{11} - \frac{\partial^4 \phi^{pi}}{\partial z^4} + (2s_{13} + s_{44}) \frac{\partial^4 \phi^{pi}}{\partial z^2 \partial x^2} + s_{33} \frac{\partial^4 \phi^{pi}}{\partial x^4} - d_{31} \frac{\partial^3 \varphi^{pi}}{\partial z^3} - (d_{33} - d_{15}) \frac{\partial^3 \varphi^{pi}}{\partial z \partial x^2} = 0. \quad (3)$$

压电层受表面电压作用, 设其电势分布为

$$\varphi^{pi} = az^2 + bz + ci. \quad (4)$$

把(4)代入(2), (3), 求解两式并利用应力边界条件

$$z = \pm \left[ \frac{h_c}{2} + h_p \right]: \sigma_z^{pi} = 0, \quad \tau_{zx}^{pi} = 0. \quad (5)$$

经过繁复的运算, 可得到压电层的应力函数的表达式

$$\phi^{pi} = \frac{g_{33}}{3d_{31}} a_i z^3 + \frac{1}{2} \zeta_i z^2 + \frac{1}{2} \eta_{ix} [z \mp (h_c + 2h_p)], \quad (6)$$

上式中当  $i = 1$  时取负号, 当  $i = 2$  时取正号(下同)。由此可假设弹性体的应力函数为

$$\phi^e = \beta_{1z}^3 + \beta_{2z}^2 x + \beta_{3z}^2 + \beta_{4zx}, \quad (7)$$

其中  $a_i, b_i, c_i, \zeta_i, \eta_i, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  均为待定常数。

### 2) 压电层和弹性体的位移

把式(6)代入(1)得压电层的应力分布为

$$\sigma_x^{pi} = \frac{2g_{33}}{d_{31}} az + \zeta_i + \eta_{ix}, \quad \sigma_z^{pi} = 0, \quad \tau_{zx}^{pi} = \frac{1}{2} [\pm (h_c + 2h_p) - 2z] \eta_i. \quad (8)$$

由式(4)可得压电层的电场为

$$E_x^i = 0, \quad E_z^i = -2az - b_i. \quad (9)$$

把式(7)代入(1)得弹性体的应力分布为

$$\sigma_x^e = 6\beta_{1z} + 2\beta_{2x} + 2\beta_3, \quad \sigma_z^e = 0, \quad \tau_{zx}^e = -2\beta_{2z} - \beta_4. \quad (10)$$

把式(8), (9)代入压电介质的物理方程可得其应变, 再由几何方程得到压电层的位移分布为

$$u^{pi} = 2 \frac{s_{11} g_{33} - d_{31}^2}{d_{31}} azx + \frac{1}{2} s_{11}^p \eta_{ix}^2 + s_{11}^p \zeta_i x - d_{31} b_{1x} - \frac{1}{2} (s_{13}^p + s_{44}^p) \eta_{ix}^2 \pm$$

$$s_{44}^p \Pi_k \left( \frac{1}{2} h_e + h_p \right) z + \omega_p z + u_0^p, \quad (11)$$

$$w^p = \frac{s_{13}^p g_{33} - d_{31} d_{33}}{d_{31}} a z^2 + s_{13}^p \zeta z + s_{13}^p \eta_{zx} - d_{33} b z - \frac{s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2}{d_{31}} a x^2 - \omega_p x + w_0^p. \quad (12)$$

把(10)代入弹性体的物理方程得其应变,再由几何方程得到弹性体的位移分布为

$$u^e = 2s_{11}^e \beta_3 x + 6s_{11}^e \beta_{1z} x + s_{11}^e \beta_2 x^2 - (s_{13}^e + s_{44}^e) \beta_2 z^2 - s_{44}^e \beta_{4z} + \omega_e z + u_0^e, \quad (13)$$

$$w^e = 2s_{13}^e \beta_{3z} + 3s_{13}^e \beta_{1z} z^2 + 2s_{13}^e \beta_{2zx} - 3s_{11}^e \beta_{1x} z^2 - \omega_e x + w_0^e, \quad (14)$$

其中  $\omega_{pi}, u_0^p, w_0^p, \omega_e, u_0^e, w_0^e$  均为待定常数。上述待定常数可由下列边界条件确定。

### 3) 边界条件

A) 层间连续条件

应力连续条件:

$$z = \frac{1}{2} h_e: \quad n_i \sigma_{ij}^{p1} = n_i \sigma_{ij}^e, \quad (15)$$

$$z = -\frac{1}{2} h_e: \quad n_i \sigma_{ij}^{p2} = n_i \sigma_{ij}^e. \quad (16)$$

位移连续条件:

$$z = \frac{1}{2} h_e: \quad u^e = u^{p1}, \quad w^e = w^{p1}, \quad (17)$$

$$z = -\frac{1}{2} h_e: \quad u^e = u^{p2}, \quad w^e = w^{p2}. \quad (18)$$

B) 应力边界条件

主要应力边界条件:

$$z = \pm \left( \frac{1}{2} h_e + h_p \right): \quad \alpha_z = \tau_{zx} = 0. \quad (19)$$

在前面推导压电体的应力函数时,已满足了上述主要应力边界条件。

对于一端固支(在  $x = 0$  处),放松应力边界条件:

$$x = l: \quad \int_{-(h_e/2+h_p)}^{h_e/2} \sigma_x^{p2} dz + \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \sigma_x^e dz + \int_{h_e/2}^{h_e/2+h_p} \sigma_x^{p1} dz = 0, \quad (20)$$

$$\int_{-(h_e/2+h_p)}^{h_e/2} \sigma_{xz}^{p2} dz + \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \sigma_{xz}^e dz + \int_{h_e/2}^{h_e/2+h_p} \sigma_{xz}^{p1} dz = 0, \quad (21)$$

$$\int_{-(h_e/2+h_p)}^{h_e/2} \tau_x^{p2} dz + \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \tau_x^e dz + \int_{h_e/2}^{h_e/2+h_p} \tau_x^{p1} dz = 0. \quad (22)$$

对于两端简支,放松应力边界条件:

$$x = l: \quad \int_{-(h_e/2+h_p)}^{h_e/2} \sigma_x^{p2} dz + \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \sigma_x^e dz + \int_{h_e/2}^{h_e/2+h_p} \sigma_x^{p1} dz = 0, \quad (23)$$

$$x = 0, l: \quad \int_{-(h_e/2+h_p)}^{h_e/2} \sigma_{xz}^{p2} dz + \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \sigma_{xz}^e dz + \int_{h_e/2}^{h_e/2+h_p} \sigma_{xz}^{p1} dz = 0. \quad (24)$$

C) 放松位移边界条件

$$\text{对于一端固支有 } x = 0: \quad u^e = 0, \quad w^e = 0, \quad \frac{\partial w^e}{\partial x} = 0, \quad (25)$$

$$\text{对于两端简支有 } x = 0: \quad u^e = 0; \quad x = l: \quad w^e = 0. \quad (26)$$

D) 电学边界条件

$$\varphi^{pi} |_{z=\pm h/2} = 0, \quad \varphi^{p1} |_{z=h/2+h_p} = V_1, \quad \varphi^{p2} |_{z=-h/2-h_p} = V_2 \quad (27)$$

## 4) 求解待定常数

对于一端固支, 把式(4)代入(27); 式(8)、(10)代入(15)、(16)、(20)、(21)、(22); 及式(11)、(12)、(13)、(14)代入(17)、(18)、(25)• 对于两端简支, 把式(4)代入(27); 式(8)、(10)代入(15)、(16)、(23)、(24); 及式(11)、(12)、(13)、(14)代入(17)、(18)、(26), 求解这些方程可解得待定常数为

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \frac{d_{31}^2 s_{11}^e (h_e + h_p) (V_1 + V_2)}{\lambda}, \\ b_1 &= \left\{ 3h_p d_{31}^2 s_{11}^e (V_2 - V_1) (h_e + h_p)^2 + s_{11}^e h_e^3 V_1 (s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2) + \right. \\ &\quad \left. 2s_{11}^e s_{11}^p V_1 g_{33} h_p (3h_e^2 + 6h_e h_p + 4h_p^2) \right\} / h_p \lambda, \\ c_1 &= [3h_e h_p d_{31}^2 s_{11}^e (3h_p V_2 - 3h_e V_1 + h_e V_2 - 5h_p V_1) + 6d_{31}^2 s_{11}^e h_p^3 (V_2 - V_1) + \\ &\quad 2s_{11}^p h_e^3 V_1 (s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2) + 4s_{11}^p s_{11}^e V_1 g_{33} h_p (3h_e^2 + 6h_e h_p + 4h_p^2)] \frac{-h_e}{h_p \lambda}, \\ \zeta^1 &= [s_{11}^2 s_{11}^p g_{33} (7h_e^3 h_p V_1 + 12h_e^2 h_p^2 V_1 + 8h_p^3 h_e V_1 + h_e^3 h_p V_2) + \\ &\quad h_e^3 h_p d_{31}^2 s_{11}^e (2V_2 - 4V_1) + h_e^4 V_1 (s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2) + \\ &\quad 2h_p^2 s_{11}^e g_{33} (3h_e^2 + 6h_e h_p + 4h_p^2) (V_1 + V_2) + \\ &\quad 3h_e h_p^2 d_{31}^2 s_{11}^e (2h_e + h_p) (V_1 - V_2)] \frac{d_{31}}{\lambda h_p (s_{11}^p h_e + 2s_{11}^e h_p)}, \\ \beta_1 &= -\frac{d_{31} (h_e + h_p) (V_1 + V_2) (s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2)}{\lambda}, \quad \beta_3 = \frac{(V_2 - V_1) d_{31}}{2(s_{11}^p h_e + 2s_{11}^e h_p)}, \\ a_2 &= a_1, \quad b_2 = \frac{V_2 - V_1}{h_p} - b_1, \quad c_2 = c_1 - \frac{h_e}{2h_p} (V_2 - V_1), \quad \zeta_2 = \frac{(V_2 - V_1) d_{31} h_e}{(s_{11}^p h_e + 2s_{11}^e h_p) h_p} - \zeta_1, \\ \omega_{p1} &= \omega_{p2} = \omega_e, \quad \eta_1 = \eta_2 = \beta_2 = \beta_4 = u_0^e = w_0^e = u_0^{p1} = u_0^{p2} = 0, \\ w_0^{p1} &= s_{13}^e h_e \left\{ \beta_3 + \frac{3}{4} \beta_1 h_e \right\} - \frac{1}{2} s_{13}^p \zeta_1 h_e + \frac{1}{2} d_{33} b_1 h_e - \frac{s_{13}^p g_{33} - d_{31} d_{33}}{4d_{31}} a_1 h_e^2, \\ w_0^{p2} &= s_{13}^e h_e \left\{ -\beta_3 + \frac{3}{4} \beta_1 h_e \right\} + \frac{1}{2} s_{13}^p \zeta_1 h_e - \frac{1}{2} d_{33} b_1 h_e - \frac{s_{13}^p g_{33} - d_{31} d_{33}}{4d_{31}} a_1 h_e^2, \end{aligned}$$

其中  $\lambda = (h_e^3 s_{11}^p + 6h_e^2 h_p s_{11}^e + 6h_p^3 s_{11}^e + 12h_p^2 h_e s_{11}^e) (s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2) + 2h_p^3 s_{11}^e s_{11}^p g_{33}$ • 一端固

支时  $\omega_e = 0$ , 两端简支时  $\omega_e = -3s_{11}^e \beta_1 l$ •

所以, 压电体和弹性体的应力与位移分别为

$$\begin{aligned} \alpha_x^{pl} &= \frac{2g_{33}}{d_{31}} a_z \zeta_x, \quad \alpha_z^{pi} = \tau_{zx}^{pi} = 0, \quad \sigma_x^e = 2\beta_3 + 6\beta_{1z}, \quad \sigma_z^e = \tau_{zx}^e = 0, \\ u^{pi} &= 2 \frac{s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2}{d_{31}} a_z x + s_{11}^p \zeta_x - d_{31} b_x + \omega_p z, \\ w^{pi} &= \frac{s_{13}^p g_{33} - d_{31} d_{33}}{d_{31}} a_z^2 + s_{13}^p \zeta_x - d_{33} b_x - \frac{s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2}{d_{31}} a_x^2 - \omega_{px} + w_0^{pi}, \\ u^e &= 6s_{11}^e \beta_{1z} x + 2s_{11}^e \beta_3 x + \omega_e z, \quad w^e = 3s_{13}^e \beta_{1z}^2 - 3s_{11}^e \beta_1 x^2 + 2s_{13}^e \beta_3 z - \omega_e x \end{aligned}$$

压电激励对弹性梁的等效作用力为

$$N = \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \sigma_x^e dz = \frac{(V_2 - V_1) d_{31} h_e}{s_{11}^p h_e + 2s_{11}^e h_p},$$

$$M = \int_{-h_e/2}^{h_e/2} \sigma_{xz}^e dz = - \frac{(V_2 + V_1)(h_e + h_p)(s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2) d_{31} h_e^3}{2\lambda}$$

可见,压电激励器对弹性梁的影响,一方面产生拉伸,另一方面产生弯曲。当作用于两压电材料的电压  $V_1 = -V_2 = V$  时,  $M = 0$ , 压电材料对弹性梁的作用相当于施加拉力; 当  $V_1 = V_2 = V$  时,  $N = 0$ , 压电材料对弹性梁的作用相当于施加弯矩  $M = [-V(h_e + h_p) d_{31} h_e^3] / [h_e^3 s_{11}^p + 6h_e^2 h_p s_{11}^p + 12h_p^2 h_e s_{11}^p + 8h_p^3 s_{11}^p / (1 - d_{31}^2 / s_{11}^p g_{33})]$ 。通常压电材料的高度相对弹性体比较薄, 弯矩可近似表示为  $M = -V d_{31} h_e^2 / [h_e s_{11}^p + 6h_p s_{11}^p]$ , 这结果与文献[2]一样。对压电材料(如下面的算例),  $d_{31}^2 / s_{11}^p g_{33} \ll 1$ , 弯矩可近似为  $M = -V(h_e + h_p) d_{31} h_e^3 / [h_e^3 s_{11}^p + 6h_e^2 h_p s_{11}^p + 12h_p^2 h_e s_{11}^p + 8h_p^3 s_{11}^p]$ , 这结果与文献[8]一样。当把下压电层改作为传感器时, 电学边界条件式(27)的第三式变为  $D|_{z=-h_e/2-h_p} = 0$ , 类似地, 当压电层相对弹性梁比较薄时, 可得到压电激励器对弹性梁的等效作用力为

$$N = \frac{V d_{31} [(s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2)(h_e + h_p) + 6s_{11}^p g_{33} h_p]}{h_e s_{11}^p (d_{31}^2 - s_{11}^p g_{33}) + 4h_p s_{11}^p (d_{31}^2 - 2s_{11}^p g_{33})}$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{V d_{31} h_e [(s_{11}^p g_{33} - d_{31}^2)(h_e + h_p) + 2s_{11}^p g_{33} h_p]}{h_e s_{11}^p (d_{31}^2 - s_{11}^p g_{33}) + 4h_p s_{11}^p (d_{31}^2 - 2s_{11}^p g_{33})}$$

又由于  $d_{31}^2 / s_{11}^p g_{33} \ll 1$ , 可近似表示为  $N = -V d_{31} / s_{11}^p$ ,  $M = -0.5 V d_{31} h_e / s_{11}^p$ 。这个结果大致分别为受相反和相同电压作用的两个激励器对弹性梁的等效拉力和纯弯矩的一半。

### 3 数值算例

层合梁的几何参数为  $l = 0.2 \text{ m}$ ,  $h_e = 0.020 \text{ m}$ ,  $h_p = 0.005 \text{ m}$ , 中间弹性基体为普通钢材,  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\mu = 0.3$ , 上、下压电层的材料为压电陶瓷, 其力学与电学性能参数见表 1<sup>[9]</sup>。当  $V_1 = V_2 = 100 \text{ V}$  时, 压电层对弹性梁的作用只相当于作用了一定的弯矩, 图 2 为本文与文献[2, 8]的比较结果, 可以看出本文结果与文献[8]非常接近。当电压  $V_1 = 100 \text{ V}$ ,  $V_2 = 200 \text{ V}$  时, 结果见图 3~6。

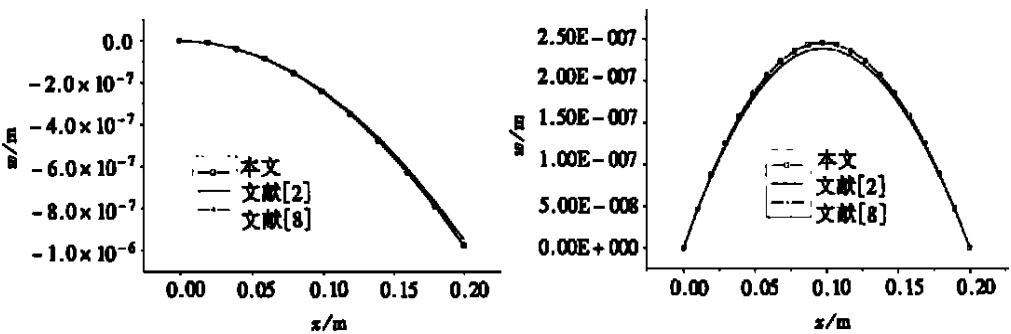


图 2 z 方向位移  $w(x, z)$  在  $z = 0$  处沿  $x$  轴的变化

表 1 压电陶瓷的物理参数<sup>[9]</sup>

物理参数	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$g_{11}^p$	$g_{33}^p$
量纲	$\times 10^9 \text{ Pa}$					$\text{C/m}^2$			$\times 10^{-9} \text{ C/v.m}$	
数值	81.3	0.329	0.432	64.5	25.6	-5.2	15.08	0	11.51	13.06

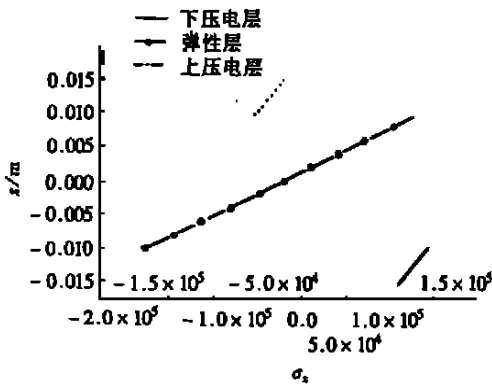


图3 应力沿  $z$  轴的变化

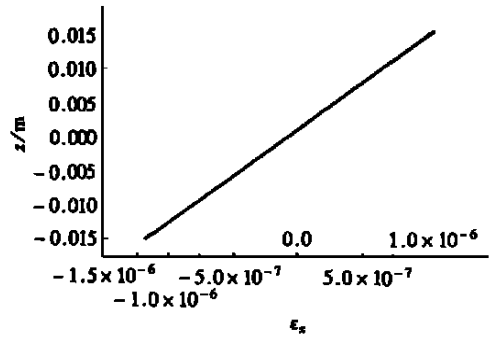


图4 应变沿  $z$  轴的变化

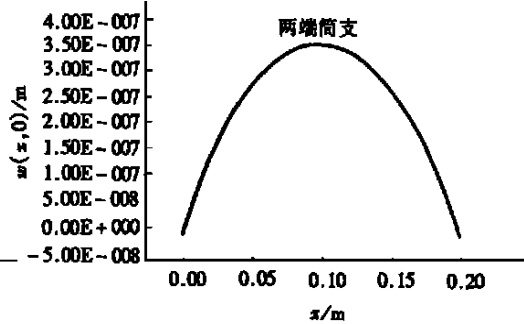
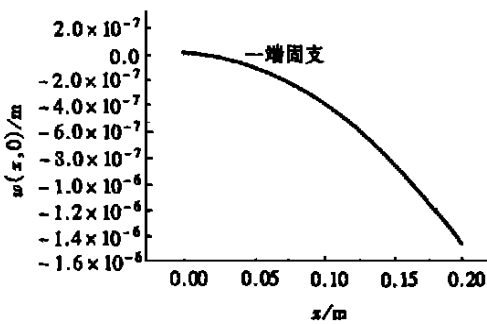


图5  $z$  方向位移  $w(x, z)$  在  $z = 0$  处沿  $x$  轴的变化

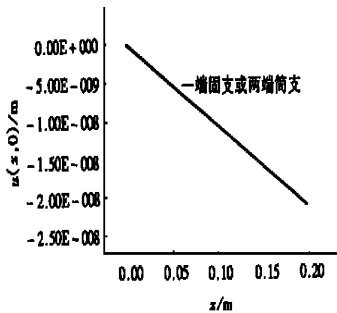


图6  $x$  方向位移  $u(x, z)$  在  $z = 0$  处沿  $x$  轴的变化

从图3和4可以看出, 弹性梁和压电层的应力和应变沿  $z$  轴线性变化; 由图5可知, 弹性梁中性轴的挠度呈抛物线型, 可见受电压作用的压电层合梁等效于受一定分布弯矩作用的欧拉伯努利梁。图6显示压电层对弹性梁有一定的拉伸作用。

### 4 结束语

本文利用压电介质的二维本构关系, 推导出带有上、下压电激励器的弹性梁在电场作用下的位移、应力分布的解析表达式, 得到了压电激励器对弹性梁的等效作用力, 最后给出了受电压作用下压电层合梁在一端固支或两端简支边界条件下的算例, 并与其它文献进行比较, 结果表明受电场作用的压电层合梁相当于受一定分布载荷的欧拉伯努利梁。本文对其在表面电压

作用下的变形分析以及在电压作用下对结构变形的不同影响进行了较为详细的分析,其结论对深入了解弹性压电层的力电耦合特性和控制问题有一定的帮助。

### [参 考 文 献]

- [1] Tzou H S. Distributed model identification and vibration control of continua: theory of applications [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1991, **113**(3): 484—499.
- [2] Crawley E F, Luis J. Use of piezoelectric actuator as elements of intelligent structures[J]. *AIAA Journal*, 1987, **25**(10): 1375—1385.
- [3] Im S, Atluri S N. Effects of a piezo actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading [J]. *AIAA Journal*, 1989, **27**(2): 1801—1807.
- [4] Ray M C, Bhattacharya R, Samanta B. Exact solutions for static analysis of intelligent structures[J]. *AIAA Journal*, 1993, **31**(9): 1684—1691.
- [5] Mitchell J A, Reddy J N. A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminate[J]. *Int J Solids Structures*, 1995, **32**(16): 2345—2367.
- [6] Tzou H S, Gadre M. Theoretical analysis of a multi-layered thin shell coupled with piezoelectric shell actuators for distributed vibration controls[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, **132**(3): 433—450.
- [7] 林启荣, 刘正兴, 金占礼. 均布载荷作用下的两端简支压电梁的解析解[J]. *应用数学和力学*, 2000, **21**(6): 617—624.
- [8] Crawley E F, Anderson E H. Detailed models of piezoceramic actuation of beams[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1990, **1**(1): 4—25.
- [9] Paul H, Stephen B. Free vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending[J]. *Int J Solids Structures*, 1995, **32**(20): 2945—2960.

## Analysis of Beams with Piezoelectric Actuators

LIN Qi\_rong, LIU Zheng\_xing, WANG Zong\_li

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,  
Shanghai 200030, P R China)

**Abstract:** Based on the two-dimensional constitutive relationships of the piezoelectric material, an analytical solution for an intelligent beam excited by a pair of piezoelectric actuators is derived. With the solution the force and moment generated by two piezoelectric actuators and a pair of piezoelectric actuator/sensor are obtained. Examples of a cantilever piezoelectric laminated beam or a simply supported piezoelectric laminated beam, applied with voltages, are given.

**Key words:** beam; piezoelectric actuator/sensor; piezoelectric elasticity