

文章编号: 1000-0887(2001)09-0911-07

动脉血管流动计算的伽辽金有限元法研究^{*}

G. C. 夏玛, 马德胡·珍, 阿尼尔·克乌玛

(印度基础科学研究所 数学科学部, 阿格拉 282002, 印度)

(钱伟长推荐)

摘要: 得到大动脉三维模型的过二重分叉的二维截定常流的 NS 方程有限元解。采用了物理坐标系变换到曲线边界贴体坐标系的数学技巧。以支流至主动脉流率为参数, 计算了雷诺数为 1000 的壁面切应力。所得结果与前人的工作(包括实验数据)进行了比较, 发现与他们的结果非常接近, 改进了 Sharma 和 Kapoor(1995)的工作, 相比之下, 所用的数值方法上更经济, 适用的雷诺数更大。

关键词: 切应力; 血液流动; 动脉流动; 伽辽金法

中图分类号: O242.21; O357.1 文献标识码 A

引 言

由于动脉壁面切应力和动脉硬化可能存在着关系, 自然要求动脉流动中的切应力测量。大动脉和中等大小中的动脉流动现象影响动脉硬化损伤的发展。动脉硬化是由于油脂和其它物质堆积于动脉壁的内皮层而导致的退化性疾病。这种面积上的积聚就象贴瓷片。该疾病多发于大动脉的弯曲、交叉和分支处。Fry(1969)^[1]假设这些“瓷片”代表生物组织对血浆物质通过内皮层表面的通量增加的响应。Thompson 等人(1974)^[2]考虑了一种适合于任意几何形状的自然坐标系生成的数值方法。Gokhale 等人(1978)^[3]采用了有限元方法求解二维几何截面的定常 NS 方程。Gresno 等人(1979)^[4]求解了这个 NS 方程组。Lutz 等人(1981)^[5]考虑了二重分叉网络的一个简化模型, 该网络范围为胸部动脉、腹部及其间分支。Mishra 和 Singh(1983)^[6]研究了动脉内血液的非线性流动。Sharma 和 Kapoor(1995)^[7]对血液在动脉血管中的流动进行了数学分析。Dash 等人(1996)^[8]研究了窄动脉中的流动改变, 估计了由于插入导管而增加的摩擦。Ku(1997)^[9]研究了动脉内血液流动。Dash 等人(1999)^[10]分析了插入导管后变窄的弯曲动脉中的血液流动。

本文假设流体为不可压牛顿流体, 并假设流动只限于动脉系统。这里, 所采用的数值格式包括坐标系的变换以及所得的参数在伽辽金格式中的应用。我们采用伽辽金方法进行求解并计算了雷诺数为 1000 的壁面切应力, 发现该结果与实验结果非常接近。数值结果还与 Sharma 和 Kapoor(1995)^[7]的结果进行了比较。

1 坐标变换

我们采用下面的椭圆型方程来形成贴合于边界的坐标系:

* 收稿日期: 2000_03_03; 修订日期: 2001_07_08

基金项目: 新德里 CSIR 资助项目(25/98/97_EMR_II)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

这些方程构成了从物理平面到数值平面的变换。这个变换由上述椭圆型方程形成,称为椭圆网格生成法[Thompson(1974)]。^[2]

交换方程(1)和(2)中的自变量和因变量,得

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0, \quad (3)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0, \quad (4)$$

其中 α, β, γ 为坐标变换参数, x, y 为自变量。

2 场控制方程

在本文的研究中,假设流体是不可压缩的、等温的牛顿流体,而且流动是定常的层流。虽然我们研究的是定常问题,但在计算中保留非定常项也比较容易,然后通过时间上取渐近值得到定常解。含原始变量的质量守恒和依赖时间的 N_S 方程可由输运方程和椭圆型流函数代替,在直角坐标系中它们是

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

流函数 Ψ 满足连续性方程

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (7)$$

方程(5)可以被变换到数值平面 (ξ, η) 上,经变换后得

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Y_\eta(u\omega)_\xi - Y_\xi(u\omega)_\eta}{j} + \frac{X_\xi(v\omega)_\eta - X_\eta(v\omega)_\xi}{j} = \frac{(\alpha\omega_\xi - 2\beta\omega_{\xi\eta} + \gamma\omega_{\eta\xi} + \sigma\omega_\eta + \tau\omega_\xi)}{j^2 Re}, \quad (8)$$

$$\alpha\Psi_{\xi\xi} - 2\beta\Psi_{\xi\eta} + \gamma\Psi_{\eta\eta} + \sigma\Psi_\eta + \tau\Psi_\xi = -j^2\omega, \quad (9)$$

其中 Re 为雷诺数, $\sigma = -j^2 P$, $\tau = -j^2 Q$ 。

2.1 初始条件

为求解涡量输运方程初始涡量分布是必需的,因为对依赖于时间的解来说瞬态解是无意义的。通过解势流方程可得到试探性的初始流函数分布。应用流体在固体壁边界上的无滑移条件可确定初始涡量分布。

2.2 边界条件

因为在固体边界上 Ψ 为常数(即无质量通量),在动脉壁上的边界条件可由方程(9)导出:

$$W_{\text{wall}} = -\frac{\gamma}{j} \quad (\eta = \text{常数}),$$

$$W_{\text{wall}} = -\frac{\alpha}{j} \quad (\xi = \text{常数}).$$

且

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0$$

在出口平面上, 速度和涡量满足 Neumann 型边界条件

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\eta = \text{常数}),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi = \text{常数})$$

3 数值方法(伽辽金方法)

在伽辽金方法中, 我们有

$$\int_{\Omega} E \Phi_i d\Omega = 0, \tag{10}$$

其中 E 为权函数 Φ_i 的残量, $\Psi(x, y)$ 为近似解. 这里

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Phi_i c_i \tag{11}$$

所以由方程(7)可得

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \omega = 0,$$

则得残量

$$E = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \omega$$

做如下形式的伽辽金积分

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \omega \right] \Phi_i dx dy = 0$$

通过分部积分, 并由 Green-Gauss 理论, 得

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi_i dy + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Phi_i dx \right] + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - \omega \Phi_i \right] dx dy \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi_i \cos(n, x) ds + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Phi_i \cos(n, y) ds + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - \omega \Phi_i \right] dx dy \\ & = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - \omega \Phi_i \right] dx dy = \\ & - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Phi_i \cos(n, x) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Phi_i \cos(n, y) \right] ds \end{aligned} \tag{12}$$

用式(11)中 Ψ 代替式(12)中的 Ψ , 形成线性代数方程组. 使用逐次超松弛法求解这些方程.

由方程(5), 可得

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \Phi_i(x, y),$$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \Phi_i(x, y),$$

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \Phi_i(x, y)$$

由初始变量的伽辽金方法, 得

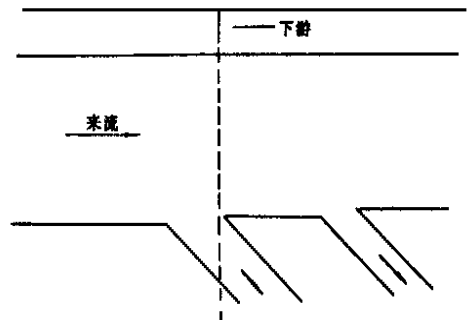


图 1

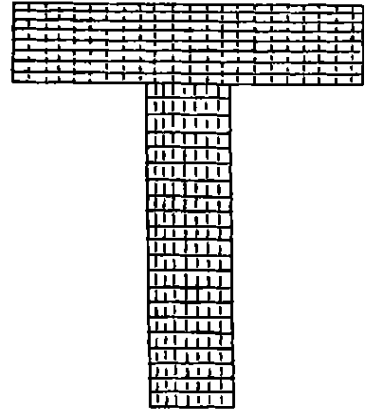
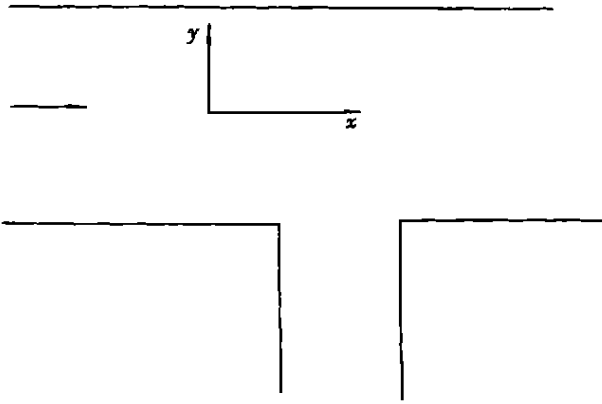


图 2 单分支几何形状

图 3 曲线线性坐标线的数值生成

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \Phi_1 dx dy = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \Phi_1 dx dy \quad (13)$$

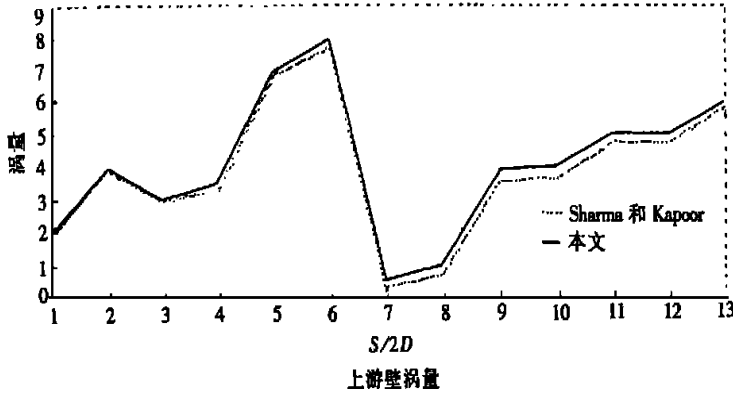


图 4(a) 二维动脉流动的壁涡量分布
上游壁涡量
下游壁涡量

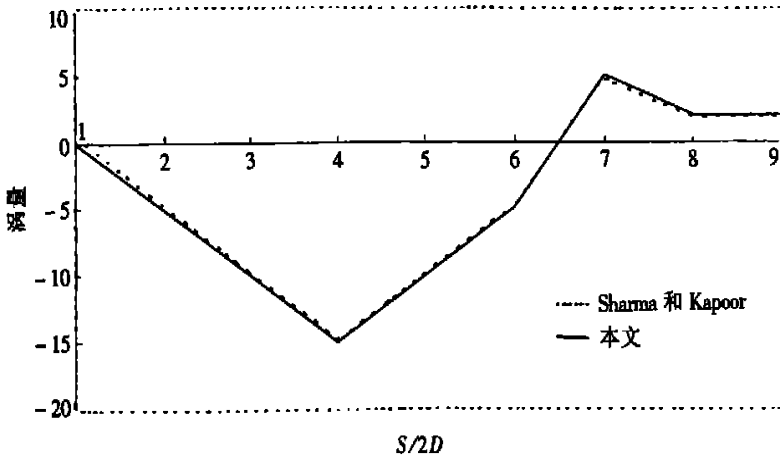


图 4(b) 壁涡量分布

对方程(13)的右端应用 Gauss_Green 理论, 并代入 u, v, w 的插值表达式, 则得有限元方程

$$A_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (B_{i,j} + C_{i,j}) \omega_i = \int_{\Gamma} \Phi \Phi_k ds, \tag{14}$$

其中

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j dx dy,$$

$$B_{i,j} = \int \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$C_{i,j} = \int_{\Omega} \Phi_i \left[u_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] \Phi_j dx dy,$$

$$\Phi_k = - \frac{\partial \omega}{\partial t} = - \left[\cos(n, x) \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \cos(n, y) \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right]$$

这些方程是标准的伽辽金有限元方程, 可由预测校正法或其它类似的方法求得它们的解。

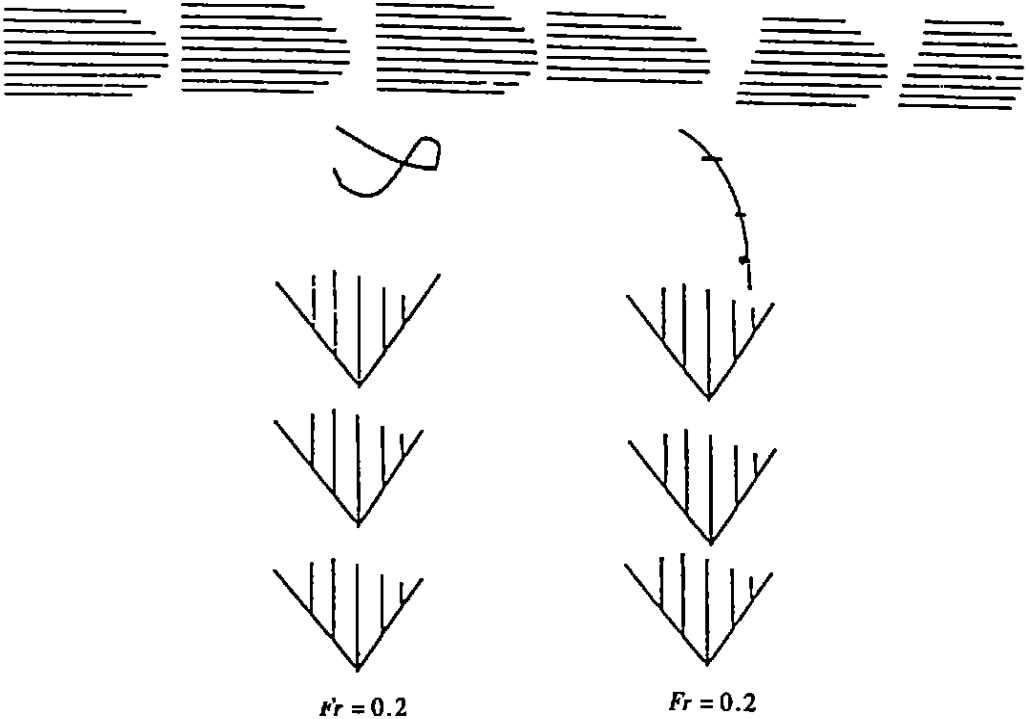


图5 定常流动速度剖面的数值结果

4 结果和讨论

首先对上述数值方法用以前的研究者所考虑的几何形状进行检验。自然坐标线由图2中的物理坐标来生成, 见图3。用伽辽金有限元法来解这个流体力学问题。图4a和图4b分别出了上游和下游壁涡量分布。

本文假设流动参数为支流至主流的比率, 对完全发展流动在进口和出口的剪切率曲线形状相同。但如图所示剪切率值在某一点达到局部最大值, 并且在出口点之前快速地下降到零或负值。在分叉产生前剪切率是最大的, 在分叉点由于流动分为两个分支, 剪切率突然下降。当下一个分叉产生时有同样的现象出现。

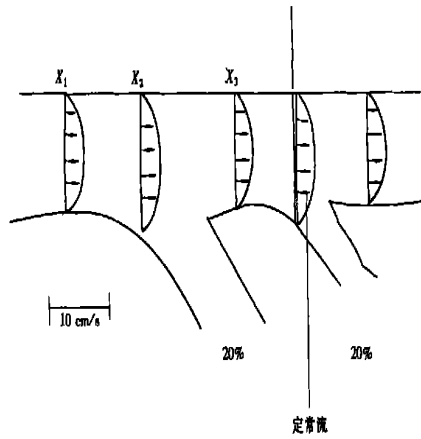


图 6 定常流动速度剖面的实验结果

对分支流率为 20% 的情况, 速度矢量的数值结果与实验结果的比较分别见图 5 和图 6。对犬动脉二维模型的稳态流, 数值结果和实验结果非常接近。

对复杂生物流几何形状, 与其他方法相比, 伽辽金有限元法是一个比较好的研究方法。其它效应如弹性壁脉动流可以加入到基本方法中。

从最后看来, 犬动脉二维模型的定常流动, 数值结果和实验结果相当吻合。

[参 考 文 献]

- [1] Fry D L. Certain histological and chemical responses of the vascular interface to acutely induced mechanical stress in the aorta of the dog[J]. *Circulation Res*, 1969, 93—108.
- [2] Thompson J F, Thomes F C, Mastin C W. Automatic numerical generation of body_fitted curvilinear coordinate system for field containing any of arbitrary two dimensional bodies[J]. *J Comput Phys*, 1994, 15: 299—319.
- [3] Gokhale V V, Tanner R I, Bischoff K B. Finite element solution of the Navier-Stokes equations for two dimensional steady flow through a section of a canine aorta model[J]. *Journal of Biomechanics*, 1978, 11: 241—249.
- [4] Gresho P M, Lee R L, Sani R L. Lawrence Livermore Laboratory Rept UCRL_83282, Sept, 1979.
- [5] Lutz R J, Hsu L, Menawat A, et al. Fluid mechanics and boundary layer mass transport in an arterial model during steady and unsteady flow[A]. In: 74th Annual AIChE [C]. New Orleans, LA, 1981.
- [6] Mishra J C, Singh S T. A large deformation analysis for aortic walls under a physiological loading [J]. *J Engg Sciences*, 1983, 21: 1193—1202.
- [7] Sharma G C, Kapoor J. Finite element computation of two dimensional arterial flow in the presence of a transverse magnetic field[J]. *Internat J Numer Methods Fluids*, 1995, 20: 1153—1161.
- [8] Dash R K, Jayarman G, Mehta K M. Estimation of increased flow resistance in a narrow catheterized arteries[J]. *Journal of Biomechanics*, 1996, 29A: 917—930.
- [9] Ku N. Blood flow in arteries[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1997, 29: 399—434.
- [10] Dash R K, Jayarman G, Mehta K M. Flow in catheterized curved artery with stenosis[J]. *Journal of Biomechanics*, 1999, 32: 46—61.

Finite Element Galerkin Approach for a Computational Study of Arterial Flow

G. C. Sharma, Madhu Jain, Anil Kumar

(School of Mathematical Sciences, Institute of Basic Science, Khandari, Agra_282002, India)

Abstract: A finite element solution for the Navier-Stokes equations for steady flow through a double branched two dimensional section of three dimensional model of canine aorta is obtained. The numerical technique involves transformation of the physical coordinates to a curvilinear boundary fitted coordinate system. The shear stress at the wall is calculated for Reynolds number of 1000 with branch to main aortic flow rate ratio as a parameter. The results are compared with earlier works involving experimental data and it is observed that the results are very close to their solutions. This work in fact is an improvement of the work of Sharma and Kapoor (1995) in the sense that computations scheme is economic and Reynolds number is large.

Key words: shear stress; blood flow; arterial flow; Galerkin approach