

文章编号: 1000-0887(2001) 10-1097-08

J 积分在多层介质中的守恒性和其应用*

王利民^{1,2}, 陈浩然³, 徐世²

(1. 山东工程学院 力学教学部, 山东 淄博 255012; 2. 大连理工大学 土木工程系, 大连 116024;
3. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116024)

(唐立民推荐)

摘要: 首先证明和讨论了当裂纹平行于多层介质界面时, 其裂纹尖端 J 积分的守恒性; 然后建立了具有界面裂纹的由 4 种介质构成的材料分析模型, 根据 J 积分在多层介质中的守恒性原理, 提出了该模型的 I 型断裂能量释放率守恒假设, 并经过了数值实验的验证. 通过能量分析和量纲分析, 用渐近分析方法得到了计算该模型结构界面裂纹尖端能量释放率和复应力强度因子的分析公式, 并且进行了讨论.

关键词: 多层介质; J 积分守恒性; 界面裂纹; 复应力强度因子

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

在材料科学和工程结构强度的分析研究中, 应力强度因子与能量释放率是两个重要指标. 对于线弹性材料, J 积分是与能量释放率等价的. 而且, 该积分不仅适用于线弹性, 还可适合于非线性材料^[1]. 在均质介质中, 围着裂纹尖端 J 积分与路径无关的性质和该积分的应用及物理意义的解释, 已经被 Rice 和 Hutchinson 等人所证明和讨论^[2,3]. 对于由两种介质或多种介质组成的含界面裂纹或裂纹平行于界面的问题, 能否可以使用 J 积分, 或着说 J 积分在多层介质中是否与积分路径无关呢? 作者将对这个问题分别给出理论和有限元法数值结果的证明.

1 多层介质中 J 积分的守恒性

1.1 多层介质中的 J 积分守恒性

对于无体积力的单一均质材料, 无论本构关系是线弹性还是非线性的, 其介质内的应力可以表示为:

$$\sigma_j = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_j}, \quad (1)$$

式中 W 是变形能密度. 满足以上关系式的介质有下面 J 积分的定义式:

* 收稿日期: 1999_07_12; 修订日期: 2001_05_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672014); 国家杰出青年基金资助项目(59625814); 中国博士后科学基金资助项目

作者简介: 王利民(1962—), 男, 山东章丘人, 副教授, 博士, 主要从事多相介质的损伤断裂行为研究.

$$J = \int W dy - \int T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (2)$$

该积分在无奇异性点的域内沿任一闭合回路的积分值为零^[2]; 也就是均质介质中任何围绕裂纹尖端的 J 积分是守恒的, 是与积分路径无关的。

若考虑具有界面裂纹的两相介质, 其材料标号分别为 1# 和 2#, 如图 1 所示。分别研究围绕裂纹尖端的三种围线 $\Gamma_1 = \overline{ABDGF EA}$, $\Gamma_2 = \overline{A^* E^* F^* GDB^* A^*}$ 和 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。由于回路 Γ_1 与回路 Γ_2 不穿过界面, 由 J 积分在单一均质介质中的守恒性原理可知, 其回路上的 J 积分为零, 即有:

$$J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2} = 0 \quad (3)$$

当 Γ 为穿越界面的回路线时, 由图 1 可知:

$$J_{\Gamma} = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} - J_{DG} - J_{\omega} \quad (4)$$

设界面以上变量均带符号“+”, 界面以下变量均带符号“-”, 因为在几何界面上有 $dy = 0$, 而 Y 方向上的应力和位移均都连续, 故有:

$$T_y^+ = -T_y^-, \quad u_y^+ = u_y^- \quad (5)$$

同时考虑到沿 DG 与 GD 间积分的方向性, 故:

$$J_{\Gamma} = 0 - \int_{DG} W^+ dy + \int_{DG} T_y^+ \frac{\partial u_y^+}{\partial x} dx - \int_{GD} W^- dy + \int_{GD} T_y^- \frac{\partial u_y^-}{\partial x} dx = 0 \quad (6)$$

这样就证明了具有界面裂纹的双相材料系统围绕裂纹尖端的 J 积分与路径无关的性质。同理, 也不难证明当裂纹平行于多层介质的界面时, 围绕裂纹尖端的 J 积分与路径无关的性质。

当裂纹与界面不平行, 而且积分回路穿过界面时, 因式 (5) 和式 (6) 都不能得到满足, 故此时 J 积分值是不守恒的。

1.2 有限元数值方法的验证

若采用有限元数值方法对在远场单轴拉应力载荷作用下, 具有不同的裂纹长度 L 和 Dundur 双材料参数 (α, β) 的双介质界面裂纹构型进行 J 积分的数值计算。

设无量纲化的 J 积分的表达形式为: $J = J/J^0$; 其中 J^0 为特定条件下的 J 积分值。表 1 列出了在不同积分围道上的 J 积分无量纲化数值, 平均值以及相应误差百分数, 其中 $C2, C6, C10, \dots, C25$ 表示与裂尖距离从近到远的不同积分围道。

由表 1 中数据可以看出, 选择不同路径所得的有限元法 J 积分数值彼此相差很小, 故通过数值分析进一步证明了对于双介质界面裂纹问题, 其 J 积分数值是与积分路径无关的; 同时也表明本文所采用的有限元数值方法是有效和可靠的。

2 多层介质裂纹模型和 I 型能量释放率的守恒假设

2.1 含裂纹的多层介质材料参数

在工程中由于对材料的功能和强度的需要, 经常采用由不同介质组成的所谓复合型材料, 而这类材料的破坏往往发生在界面近处, 所以研究界面裂纹的破坏行为是很有必要的。图 2 为具有界面裂纹的多层介质分析模型。该模型由 4 种介质组成, 介质 1# 和 4# 分别为两半无

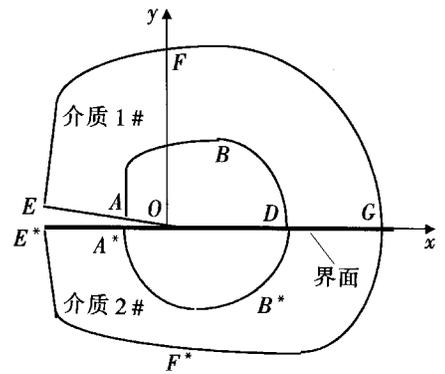


图 1 双介质界面裂纹尖端的 J 积分路径

穷大介质, 具有长度为 L 的裂纹位于层厚分别为 h 的介质 2# 和 3# 之间的界面上。

表 1 在不同材料参数与裂纹长度时沿不同路径的 J 积分值与误差百分数

裂纹长 L	1.0		2.0		3.0		4.0	
α	0.074 19		- 0.500		- 0.272 7		- 0.391 3	
β	- 0.037 31		- 0.142 9		0.030 3		0.210 1	
路径	J 积分	误差 $E/(%)$	J 积分	误差 $E/(%)$	J 积分	误差 $E/(%)$	J 积分	误差 $E/(%)$
C2	0.313 6	0.4	0.370 1	0.3	0.759 6	0.4	1.057	1.2
C6	0.317 7	0.9	0.374 0	1.4	0.771 0	1.5	1.024	1.9
C10	0.316 7	0.6	0.372 1	0.9	0.767 5	1.1	1.056	1.1
C15	0.315 3	0.1	0.369 7	0.2	0.762 4	0.4	1.047	0.3
C20	0.312 2	0.8	0.364 4	1.2	0.748 4	1.4	1.026	1.7
C25	0.314 3	0.2	0.366 1	0.8	0.753 8	0.7	1.031	1.2
J 平均	0.314 8		0.368 9		0.759 3		1.044	

对于双材料界面裂纹问题, 可以定义 Dundur 参数 (α, β) 和双材料弹性常数 ϵ 为^[4]:

$$\alpha = \frac{\mu_1(k_2 + 1) - \mu_2(k_1 + 1)}{\mu_1(k_2 + 1) + \mu_2(k_1 + 1)}, \quad \beta = \frac{\mu_1(k_2 - 1) - \mu_2(k_1 - 1)}{\mu_1(k_2 + 1) + \mu_2(k_1 + 1)}, \quad (7)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right], \quad (8)$$

式中下标 1 和 2 指示材料标号, μ 和 k 分别为剪切弹性模量与 Lamé 常数。参数 (α, β) 以及 ϵ 表示出了裂纹上下两种介质材料性质的差异程度, 当两种介质一致时, 三者均为零。

对于图 2 所示的多层介质模型, 可以仿照 Dundur 双材料参数 (α, β) 和双材料弹性常数 ϵ , 同时考虑多相介质的上下相对位置, 可设材料参数为:

$$\alpha_{ij} = \frac{\mu_i(1 - \nu_j) - \mu_j(1 - \nu_i)}{\mu_i(1 - \nu_j) + \mu_j(1 - \nu_i)}, \quad \beta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\mu_i(1 - 2\nu_j) - \mu_j(1 - 2\nu_i)}{\mu_i(1 - 2\nu_j) + \mu_j(1 - 2\nu_i)} \quad (i < j), \quad (9)$$

$$\epsilon_j = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1 - \beta_j}{1 + \beta_j} \right] \quad (i < j), \quad (10)$$

公式中下标 i 和 j 分别表示两种介质的上下材料标号, ν 为泊松比。

2.2 多层介质裂纹尖端 I 型能量释放率守恒假设与数值验证

众所周知, 界面裂纹问题的应力场 I 型 II 型是耦合的^[5,6], 而且裂纹尖端近处与远处应力场 I 型 II 型的比例也是不相同的^[7]。事实上, 前面所述的 J 积分是裂纹一端 I 型断裂应力应变场的能量释放率。设中间介质 2# 和 3# 的层厚远小于其间的裂纹长度 L 时, 即 $h \ll L$, 根据裂纹平行或者位于界面上时的 J 积分守恒原理, 可以推测在半无穷大介质 1# 和 4# 中间加入两层薄的介质, 是不会明显改变 I 型应力应变场的能量释放率大小, 由此可假设:

$$G_1^{(23)} \approx G_1, \quad (11)$$

式中左端为 4 种介质构成的界面裂纹之端部 I 型应力应变场的能量释放率, 右端为中间介质 2# 和 3# 不存在时, 两半无穷大介质 1# 和 4# 间的界面裂纹尖端的 I 型能量释放率。

本文用有限元数值方法, 对上面提出的多层介质 I 型能量释放率守恒的假设进行数值验

证· 设介质 2# 和 3# 的层厚与裂纹长度之比 $h/L = 0.03$ 。表 2 中左右两边半栏分别给出了介质 1# 和 4# 具有两种材料性质组合情况下, 而介质 2# 和 3# 的不同材料组合时的无量纲化 J 积分的数值。分别对比左右两栏中的 J_{14} 和 J_{23} 可以看出, 对于介质 1# 和 4# 两种材料性质组合, 薄层介质 2# 和 3# 材料性质无论怎样组合变化, 其 J 积分的数值与不存在该薄层时的相应值相差不超过 5%。为此, 从有限元数值实验可验证, 由裂纹平行于多层介质界面的 J 积分守恒原理得到的以上推论式(11) 是合理的, 在满足假设的条件下, I 型应力应变场的能量释放率守恒假设是可以成立的。

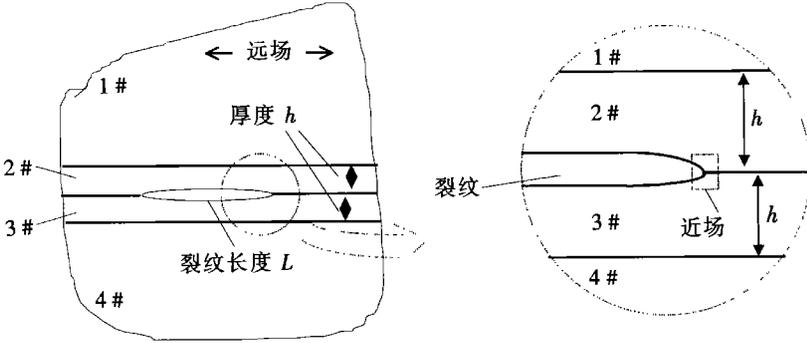


图 2 由四种介质和界面裂纹构成的多层介质界面裂纹分析模型

表 2 裂纹两侧是否存在薄层介质的两种 J 积分的数值比较

$\alpha_{14} = 0.9231, \beta_{14} = -0.2637$ 时			$\alpha_{14} = -0.7143, \beta_{14} = -0.2041$ 时		
α_{23}	β_{23}	J_{23}	α_{23}	β_{23}	J_{23}
-0.7857	-0.2245	0.5891	-0.3333	-0.09524	2.831
0.7857	0.2245	0.5780	-0.8182	-0.2338	3.052
0.8421	0.2406	0.5854	0.4286	-0.1225	2.797
-0.8421	-0.2406	0.5749	-0.4286	-0.1225	2.833
		$J_{14} = 0.5892$			$J_{14} = 2.936$

3 含界面裂纹多层介质的渐进分析表达式

3.1 双介质的界面裂纹尖端场

对于由两种介质构成的界面裂纹构型, 其裂纹尖端的应力场是断裂 I 型 II 型的耦合场^[6], 其表达式为:

$$\sigma_j = \operatorname{Re} \left\{ \frac{K r^{i\epsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \right\} \sigma_{ij}^I(\theta, \epsilon) + \operatorname{Im} \left\{ \frac{K r^{i\epsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \right\} \sigma_{ij}^{II}(\theta, \epsilon) \quad (i, j = 1, 2) \quad (12)$$

平面问题界面裂纹扩展单位长度所释放出的能量(即能量释放率 G) 与复应力强度因子 $K = K_I + iK_{II}$ 之间的关系可以表示为^[8]:

$$G = \frac{1 - \beta^2}{E^*} |K|^2 \quad (13)$$

以上各式中 (r, θ) 为图 1 所示构型以裂尖为原点的极坐标系, $\sigma_j^I, \sigma_j^{II}$ 为 I 型、II 型应力

场无量纲化的极角分布函数: $1/E^* = (1 - \nu_1^2)/(2E_1) + (1 - \nu_2^2)/(2E_2)$ 为等效弹性模量。

从公式(12)可以看出双介质应力强度因子的量纲不同于单一介质中的情况,它具有长度的复指数因子分量项,其表达式为:

$$[K] = [\text{应力}] \cdot [\text{长度}]^{1/2 - i\varepsilon} \quad (14)$$

对于混合型的断裂问题,一般可以用应力强度因子的两个分量表征其耦合场的强弱。由于界面裂纹问题的应力场 I 型和 II 型的比例,在裂纹近端处和远端处是不完全一致的,故可用韧带上离裂尖一个特征长度 l 的应力来表征^[9]:

$$\tan \phi = \frac{K_{II}}{K_I} = (\alpha_{xy}/\alpha_{yy})_{r=l, \theta=0} \quad (15)$$

公式中的特征长度可以是小范围屈服的边界半径,也可以是其它某一特征尺寸。

3.2 多层介质界面裂纹的能量释放率和应力强度因子

图2所表示的4层介质界面裂纹模型,在远场外载荷作用下,裂纹尖端的应力场可以由复应力强度因子或能量释放率来表征:

$$K^{(23)} = K_I^{(23)} + iK_{II}^{(23)}, \quad (16)$$

$$G^{(23)} = G_I^{(23)} + G_{II}^{(23)} = \frac{1 - \beta_{23}^2}{E_{23}^*} |K^{(23)}|^2 \quad (17)$$

裂纹端部的 I 型 II 型应力场混合度表示为:

$$\tan \phi_{23} = \frac{K_{II}^{(23)}}{K_I^{(23)}} \quad (18)$$

当无中间介质 2# 和 3# 时,裂纹尖端复应力强度因子与能量释放率的关系可以表示为:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{(1 - \beta_{14}^2)}{E_{14}^*} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (19)$$

对于4层介质的界面裂纹问题,根据前述 I 型能量释放率守恒的假设,由公式(11)和式(16)~(19)以及定义式(9),可以得到下列关系式:

$$q = \frac{|K_I^{(23)}|}{|K_I|} = \frac{\sqrt{(1 - \beta_{14}^2) E_{23}^*}}{\sqrt{(1 - \beta_{23}^2) E_{14}^*}} = \sqrt{\frac{1 + (1 - \alpha_{14})/(1 + \alpha_{14})}{1 + (1 - \alpha_{24})/(1 + \alpha_{24}) + (1 - \alpha_{34})/(1 + \alpha_{34})}} \frac{(1 - \beta_{14}^2)}{(1 - \beta_{23}^2)} \quad (20)$$

和

$$f^2 = \frac{G^{(23)}}{G} = \frac{1 + (\tan \phi_{23})^2}{1 + (\tan \phi)^2} = \left(\frac{\cos \phi}{\cos \phi_{23}} \right)^2 \quad (21)$$

由于中间薄层介质 2# 和 3# 的厚度 h 远小于裂纹长度 L ,那么裂纹尖端的几何特征量只有 h 。根据界面裂纹问题的应力强度因子量纲特点,可以令存在或者不存在中间薄层介质 2# 和 3# 两种情况下相应裂纹的复应力强度因子有如下线性关系式:

$$K^{(23)} h^{i\varepsilon_{23}} = aKh^{i\varepsilon_{14}} + bKh^{-i\varepsilon_{14}}, \quad (22)$$

式中 a, b 均为无量纲复常数。若将该公式两端同时乘以其自身的共轭复数,然后两端进行比较可知 a, b 两者其一必为零。考虑到当 h 为零时等式两端的一致性,可以取: $a \neq 0, b = 0$;

且 $a = |a| e^{i\xi}$, 其中 ξ 为相角, 则:

$$K_1^{(23)} + iK_2^{(23)} = |a| e^{i\xi} K h^{i(\epsilon_{14} - \epsilon_{23})}. \tag{23}$$

再对式(23)两端自乘共轭复数, 同时注意到式(20)~(21), 可以得到,

$$|a| = \left| \frac{K_1^{(23)} \cos \phi}{K_1 \cos \phi_{23}} \right| = q \cdot f. \tag{24}$$

公式(20)~(24)中材料参数和无薄层介质时的 K 均可以由定义和有关文献中得到^[6-9], 而仅需要确定的是 f 和 ξ . 其中 $\xi = \phi_{23} - \phi_+ (\epsilon_{23} - \epsilon_{14}) \ln h$. 表3给出了在单轴拉应力条件时各种不同弹性常数的介质组合情况下的 f 和 ξ 值. 这样就得到了计算多层介质界面裂纹尖端的复应力强度因子和能量释放率的分析公式. 从表3中可以看出, ξ 可以是正值也可以是负值, 其最大绝对值接近于一个弧度, 由此可见, 即使在 I 型远场载荷下, 材料性质的差异也将会产生比较大的断裂 II 型附加应力场. 尽管表中数据 f 值大部分接近 1, 但在许多情况下, 某些数值还是与 1 相差超过 10%, 也就是说令 $f = 1$ 其数值结果有可能出现比较大的误差. 如果设分析模型图2中的介质 2#、3# 和 4# 相同或者介质 1#、2# 和 4# 相同, 则该模型将分别退化为文献[8, 10]中提出的分析模型; 显然, 本文的工作要比文献[8, 10]提出的方法与结果更趋合理与精确.

表3 各种介质组合情况下的 f 值和 ξ 值

		$\alpha_{14} = -0.42857$		$\beta_{14} = -0.12245$		
α_{23}	β_{23}	α_{24}	β_{24}	f	ξ	
0.3333	0.09524	-0.7391	-0.2112	0.9721	0.3202	
0.6000	0.1714	-0.6667	-0.1905	0.9694	0.4077	
0.8957	0.2559	0.0000	0.0000	0.9665	0.5095	
0.9663	0.2761	0.5556	0.15873	0.9650	0.5422	
-0.1057	-0.3020	-0.5686	-0.1625	0.9862	0.1352	
-0.8457	-0.2416	-0.5936	-0.1696	0.9965	-0.9843	
-0.07407	-0.02166	0.4286	0.1225	1.023	0.02341	
0.7582	0.2166	0.6000	0.1714	0.9843	0.3678	
0.75824	0.2166	0.3333	0.9524	0.9825	0.3761	
		$\alpha_{14} = 0.9512$		$\beta_{14} = 0.2718$		
α_{23}	β_{23}	α_{24}	β_{24}	f	ξ	
0.4884	0.1395	0.2308	0.6593	0.9871	0.7219	
0.6667	0.1905	0.8806	0.2516	1.085	0.9434	
0.8769	0.2506	0.8789	0.2506	1.0186	-0.05792	
0.8018	0.2291	0.6667	0.1905	1.1129	-0.2190	
-0.8791	-0.2512	0.3846	0.1099	1.0425	0.4755	
-0.3750	-0.1071	0.8519	0.2434	1.1705	0.7771	
-0.9106	-0.2602	-0.2903	-0.8295	0.9624	0.2935	
-0.7491	-0.2140	0.6639	0.1897	1.071	0.5558	
0.9048	0.2585	0.8182	0.2338	0.9849	0.8279	

续表

α_{23}	$\alpha_{14} = 0.6800$		$\beta_{14} = 0.1943$		ξ
	β_{23}	α_{24}	β_{24}	f	
0.6000	0.1714	0.3333	0.9524	0.9733	-0.09091
0.8571	0.2490	0.7333	0.2095	0.9724	-0.02493
0.9337	0.2782	0.9481	0.2709	0.9554	-0.0491
-0.2174	-0.6211	0.3846	0.1099	1.0171	-0.1943
-0.8485	-0.2424	0.4286	0.1224	0.9894	-0.4236
0.6039	0.1726	0.9518	0.2719	1.094	0.1486
0.08108	0.02317	0.9354	0.2673	1.1074	0.03135
-0.8919	-0.2548	0.3333	0.9524	0.9808	-0.4581
-0.9632	-0.2752	-0.1429	-0.4082	0.9877	-0.4887
α_{23}	$\alpha_{14} = 0.9512$		$\beta_{14} = 0.2718$		ξ
	β_{23}	α_{24}	β_{24}	f	
0.4884	0.1395	0.2308	0.6593	0.9871	0.7219
0.6667	0.1905	0.8806	0.2516	1.085	0.9434
0.8769	0.2506	0.8769	0.2506	1.0186	-0.05792
0.8018	0.2291	0.6667	0.1905	1.1129	-0.2190
-0.8791	-0.2512	0.3846	0.1099	1.0425	0.4755
-0.3750	-0.1071	0.8519	0.2434	1.1705	0.7771
-0.9106	-0.2602	-0.2903	-0.8295	0.9624	0.2935
-0.7491	-0.2140	0.6639	0.1897	0.1071	0.5558
0.9048	0.2585	0.8182	0.2338	0.9849	0.8279

致谢 在本文工作中,作者与英国 Cardiff University B. L. Karahaloo 教授进行了有益的讨论,在此深表谢意。

[参 考 文 献]

- [1] Hutchinson J W. Fundamentals of the phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics[J]. J Appl Mech, 1983, 50(4b): 1042—1050.
- [2] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks[J]. J Appl Mech, 1968, 35: 379—386.
- [3] Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material[J]. J Mech Phys Solids, 1968, 16(1): 13—31.
- [4] Dundurs J. Edge_bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading[J]. J Appl Mech, 1969, 36: 650—652.
- [5] Williams M L. The stress around a fault or crack in dissimilar media[J]. Bull Seismol Soc Amer, 1959, 49(2): 199—204.
- [6] Shih C F, Asaro R. Elastic plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces, Part 1: Small scale yielding[J]. J Appl Mech, 1988, 55: 299—316.

- [7] Yang W, Shih C F. Fracture along an interlayer[J]. Internat J Solids Structures, 1994, **31**: 985—1002.
- [8] Hutchinson J W, Mear M E, Rice J R. Crack paralleling an interface between dissimilar materials [J]. J Appl Mech, 1987, **54**(4): 828—832.
- [9] Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials[A]. In: Hutchinson J W, Wu T Y Eds. Advances in Applied Mechanics [C]. Boston: Academic Press, 1992, **29**: 63—191.
- [10] Suo Z, Hutchinson J W. Sandwich test specimen for measuring interface crack toughness[J]. Materials Science and Engineering, 1989, **A107**: 135—143.

Conservation Law and Application of J Integral in Multi Materials

WANG Li_min^{1, 2}, CHEN Hao_ran³, XU Shi_jiang²

(1. Department of Mechanics, Shandong Institute of Technology,
Zibo, Shandong 255012, P R China;

2. Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, P R China;

3. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, P R China)

Abstract: The conservation law of J integral in two media with a crack paralleling to the interface of the two media was firstly proved by analytical and numerical finite element method. Then a schedule model was established that an interface crack is inserted in four media. According to the J integral conservation law on multi media, the energy release ratio of I type crack was considered to be conservation when the middle medium layers are very thin. And the conservation law was also convinced by numerical method. By means of the dimension analysis on the model, the asymptotic results and formula calculating the energy release ratio and complex stress intensity factor are presented.

Key words: multi materials; J integral conservation law; interface crack; complex stress intensity factor