

文章编号: 1000-0887(2001) 10-1037-06

各向异性材料界面周期刚性线 夹杂的反平面问题*

刘又文

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(樊大钧推荐)

摘要: 研究了两种各向异性材料界面含周期分布刚性线夹杂的反平面剪切问题。运用复变函数方法, 获得了封闭形式解答, 并给出了刚性线尖端应力场公式。从该文解答的特殊情形, 可直接导出各向同性材料界面以及均匀各向异性材料中相应问题的公式, 其极限情形与已有的结果吻合。

关键词: 各向异性材料; 界面断裂; 周期刚性线夹杂; 反平面剪切

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

固体材料中, 刚性线夹杂和裂纹是二维问题中片状嵌入物的两个极端, 均引起严重应力集中。随着复合材料科学的进展, 各向异性材料的裂纹与刚性线问题日益受到研究者关注。继文[1~3]后, 本文研究两种各向异性材料界面含周期分布刚性线夹杂的反平面剪切问题, 如图 1。各向异性介质 I 和 II 分别占有上半平面 S^+ 和下半平面 S^- , 两种介质拼接界面沿实轴 x 分布一系列周期刚性线, 考察在一个周期带内只含一条刚性线的情形(含多条刚性线可类似处理), 即刚性线所在区间为 $-a + 2nb \leq x \leq a + 2nb$, n 为整数。设全部刚性线占实轴位置为 L , 而在实轴其余部分 L' 上两种介质相互联结, 设刚性线上无外载, 无穷远处反平面剪切应力为 $\tau_{xz_1}^\infty, \tau_{xz_2}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ ($\tau_{yz_1}^\infty = \tau_{yz_2}^\infty = \tau_{yz}^\infty$), 约定下标 1 和 2 分别表示相应于介质 I 和 II 的量, 而以上标+ 和- 表示分别从 S^+ 和 S^- 趋于实轴的函数值, 则有

$$w_1^+ = w_2^- = w_0 \quad \text{在 } L \text{ 上,} \quad (1)$$

式中 w_0 为常数, 是刚性线的纵向位移。

$$w_1^+ = w_2^- \quad \text{在 } L' \text{ 上,} \quad (2)$$

$$\tau_{yz_1}^+ = \tau_{yz_2}^- \quad \text{在 } L' \text{ 上。} \quad (3)$$

由(1)式可得

$$w_1'^+ + w_2'^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上,} \quad (4)$$

$$w_1'^+ = w_2'^- \quad \text{在 } L \text{ 上,} \quad (5)$$

* 收稿日期: 1999_09_17; 修订日期: 2001_04_27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972005)

作者简介: 刘又文(1948—), 男, 湖南益阳人, 教授, 硕士, 副系主任, 《力学与实践》杂志编委, 湖南省力学学会常务理事, 中国力学学会科普工作委员会委员。

式中 $w' = \partial w / \partial x$ 。

考察一个周期带(图 1 中竖线间部分), 若刚性线上无外载, 其平衡条件为

$$\int_{-a}^a (\tau_{yz_1}^+ - \tau_{yz_2}^-) dx = 0 \tag{6}$$

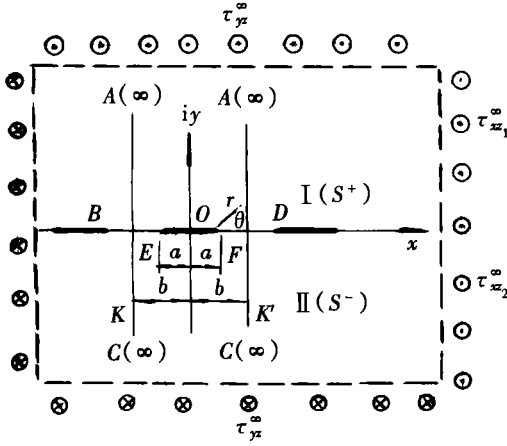


图 1 周期刚性线无限平面

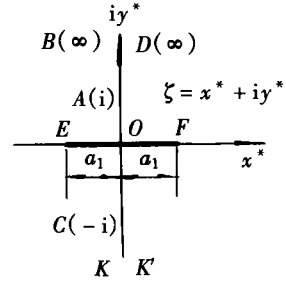


图 2 共形变换平面

1 基本公式

各向异性材料反平面剪切问题平衡方程为

$$C_{55k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + 2C_{45k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} + C_{44k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0, \tag{7}$$

其中 C_{44k} 、 C_{45k} 、 C_{55k} 为各向异性弹性常数。定义

$$\left. \begin{aligned} z_k &= x + S_k y, \quad S_k = \alpha_k + i\beta_k, \\ \alpha_k &= -C_{45k} / C_{44k}, \quad \beta_k = (C_{44k} C_{55k} - C_{45k}^2)^{1/2} / C_{44k}, \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

式中 $k = 1, 2$ 。位移 w_k 和应力可由 z_k 的一个任意函数表示:

$$w_k = -\frac{i}{\beta_k} [\Phi_k(z_k) - \overline{\Phi_k(z_k)}], \tag{9}$$

$$\tau_{xz_k} = -[S_k \Phi_k(z_k) + \overline{S_k \Phi_k(z_k)}], \tag{10}$$

$$\tau_{yz_k} = \Phi_k(z_k) + \overline{\Phi_k(z_k)}, \tag{11}$$

式中 $\Phi_k(z_k) = \overline{\Phi_k'(z_k)}$, “ $\overline{\quad}$ ” 表示取共轭, 且有

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k + \Phi_k^*(z_k), \tag{12}$$

$\Phi_k^*(z_k)$ 在无穷远处值为零,

$$\Gamma_k = \frac{1}{2} \tau_{yz_k}^\infty + \frac{\tau_{xz_k}^\infty + \alpha_k \tau_{yz_k}^\infty}{2\beta_k} i. \tag{13}$$

在实轴上, $z_k = z = x$, 可将仅在实轴上有边界条件的广义复变量 z_k 的问题化为普通复变量 $z = x + iy$ 的边值问题。为分析方便, 我们引入两个新的解析函数^[4]

$$\Omega_k(z) = \Phi_k(z) = \overline{\Phi_k(z)}. \tag{14}$$

2 问题解答

所述问题可以化为一个 Riemann-Hilbert 问题求解。由(2)、(5)两式, 可得

$$w'_1(t) = w'_2(t) \quad t \in L + L' \quad (15)$$

将(9)式代入(15), 得

$$[\gamma_2 \Phi_1(t) + \gamma_1 \Omega_2(t)]^+ = [\gamma_1 \Phi_2(t) + \gamma_2 \Omega_1(t)]^- \quad t \in L + L' \quad (16)$$

可知, 函数 $[\gamma_2 \Phi_1(z) + \gamma_1 \Omega_2(z)]$ 和 $[\gamma_1 \Phi_2(z) + \gamma_2 \Omega_1(z)]$ 越过实轴 x 互为解析延拓, 且在无穷远处有

$$\gamma_2 \Gamma_1 + \gamma_1 \Gamma_2 = \gamma_1 \Gamma_2 + \gamma_2 \Gamma_1 \quad (17)$$

由 Liouville's 定理, 在全平面我们有

$$\eta(z) = \begin{cases} \gamma_2 \Phi_1(z) + \gamma_1 \Omega_2(z) = \gamma_2 \Gamma_1 + \gamma_1 \Gamma_2 & z \in S^+, \\ \gamma_1 \Phi_2(z) + \gamma_2 \Omega_1(z) = \gamma_2 \Gamma_1 + \gamma_1 \Gamma_2 & z \in S^- \end{cases} \quad (18)$$

将式(11)代入(3), 并注意到(14), 可得

$$[\Phi_1(t) - \Omega_2(t)]^+ = [\Phi_2(t) - \Omega_1(t)]^- \quad \text{在 } L' \text{ 上}, \quad (19)$$

可知函数 $[\Phi_1(z) - \Omega_2(z)]$ 和 $[\Phi_2(z) - \Omega_1(z)]$ 越过 L' 互相解析延拓, 且在无穷远处有相同的极限, 即

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 = \Gamma_2 - \Gamma_1 \quad (20)$$

将式(13)代入(20), 可得

$$\tau_{yz_1}^\infty = \tau_{yz_2}^\infty = (\tau_{yz}^\infty) \quad (21)$$

设

$$\xi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) - \Omega_2(z) & z \in S^+, \\ \Phi_2(z) - \Omega_1(z) & z \in S^-, \end{cases} \quad (22)$$

从(18)与(22)式, 可得

$$\Phi_1(z) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \xi(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \eta(z) \quad z \in S^+, \quad (23)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{-\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \xi(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \eta(z) \quad z \in S^+, \quad (24)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \xi(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \eta(z) \quad z \in S^-, \quad (25)$$

$$\Omega_1(z) = \frac{-\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \xi(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \eta(z) \quad z \in S^-. \quad (26)$$

将(9)式代入(4), 再将(23)~(26)代入, 并注意到(16)和(18)两式, 我们得到

$$\xi^+(t) + \xi^-(t) = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上}. \quad (27)$$

考察图1中所示带形域, 边值条件(27)成为

$$\xi^+(t) + \xi^-(t) = 0 \quad |t| \leq a \quad (28)$$

为了求解该边值问题, 引入从 z 平面到 ζ 平面上的共形映射(式(29)), 变换后各对应特征点如图1、2所示

$$z = \frac{2b}{\pi} \arctan \zeta \quad (29)$$

式(28)变为

$$\xi^+(x^*) + \xi^-(x^*) = 0, \quad y^* = 0, \quad |x^*| \leq \tan \frac{\pi a}{2b} \quad (30)$$

方程(30)的解为^[4]

$$\xi(\zeta) = \frac{C_1 \zeta + C_0}{\sqrt{\zeta^2 - a_1^2}} \quad (31)$$

式中 $a_1 = \tan \frac{\pi a}{2b}$, $\zeta = x^* + iy^*$.

再将(31)式变回到 z 平面为

$$\xi(z) = \frac{C_1 \tan(\pi z/2b) + C_0}{\sqrt{\tan^2(\pi z/2b) - \tan^2(\pi a/2b)}} \quad (32)$$

运用刚性线的平衡条件, 将(11)式代入(6), 并注意到(23)~(26)可得

$$\oint_{\Lambda} \xi(z) dz = 0, \quad (33)$$

式中 Λ 是包围刚性线的顺时针方向的封闭围线. 将(32)代入(33)式, 利用留数定理, 可得

$$C_0 = 0 \quad (34)$$

考虑无穷远处应力状态, 并注意到式(20), 对于充分大的 $|z|$, 有

$$\xi(z) = \Gamma_1 - \Gamma_2 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (35)$$

而 $\tan iy = -i \operatorname{th} y$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{th} y = 1$.

由式(32)和(35)得

$$C_1 = (\Gamma_1 - \Gamma_2) \sec^2 \frac{\pi a}{2b}. \quad (37)$$

将(34)与(37)代入(32), 再将(32)和(18)代入(23)和(25)式, 我们得到

$$\Phi_1(z_1) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2) \sec^2 \frac{\pi a}{2b} \tan \frac{\pi z_1}{2b}}{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi z_1}{2b} - \tan^2 \frac{\pi a}{2b}}} + \frac{\gamma_2 \Gamma_1 + \gamma_1 \Gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (38)$$

$$\Phi_2(z_2) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2) \sec^2 \frac{\pi a}{2b} \tan \frac{\pi z_2}{2b}}{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi z_2}{2b} - \tan^2 \frac{\pi a}{2b}}} + \frac{\gamma_2 \Gamma_1 + \gamma_1 \Gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (39)$$

在式(38)与(39)中令 $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$, $\gamma_k = G_k$ (剪切弹性模量), 使得两种各向同性材料界面相应问题解答; 取消式中下标 1 和 2 的区别, 可得均匀各向异性材料中相应问题的解.

3 刚性线端附近的应力分布

在刚性线端点 a 引入极坐标 r 和 θ (图 1) 则有

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (40)$$

假定 $r \ll a$, 则有

$$z_k \approx a, \quad \tan \frac{\pi z_k}{2b} \approx \tan \frac{\pi a}{2b} + \frac{\pi}{2b} \sec^2 \frac{\pi a}{2b} (r \cos \theta + S_k r \sin \theta),$$

$$\text{所以} \quad \left[\tan^2 \frac{\pi z_k}{2b} - \tan^2 \frac{\pi a}{2b} \right]^{1/2} \approx \left[\frac{\pi r}{b} \tan \frac{\pi a}{2b} \sec^2 \frac{\pi a}{2b} (\cos \theta + S_k \sin \theta) \right]^{1/2}. \quad (41)$$

将(40)和(41)代入(28)与(29)后, 再将其代入(10)与(11)式, 取其主项, 得到

$$\tau_{xz_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left\{ \frac{\tau_{xz_1}^\infty + \alpha_1 \tau_{yz}^\infty}{\beta_1} + \frac{\tau_{xz_2}^\infty + \alpha_2 \tau_{yz}^\infty}{\beta_2} \right\} \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \operatorname{Im} \left[\frac{S_1}{(\cos \theta + S_1 \sin \theta)^{1/2}} \right], \quad (42)$$

$$\tau_{xz_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left\{ \frac{\tau_{xz_1}^\infty + \alpha_1 \tau_{yz}^\infty}{\beta_1} + \frac{\tau_{xz_2}^\infty + \alpha_2 \tau_{yz}^\infty}{\beta_2} \right\} \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \operatorname{Im} \left[\frac{S_2}{(\cos \theta + S_2 \sin \theta)^{1/2}} \right], \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tau_{z_1} &= \frac{-\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left\{ \frac{\tau_{xz_1}^\infty + \alpha_1 \tau_{yz}^\infty}{\beta_1} + \frac{\tau_{xz_2}^\infty + \alpha_2 \tau_{yz}^\infty}{\beta_2} \right\} \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos \theta + S_1 \sin \theta)^{1/2}} \right], \quad (44) \\ \tau_{z_2} &= \frac{-\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left\{ \frac{\tau_{xz_1}^\infty + \alpha_1 \tau_{yz}^\infty}{\beta_1} + \frac{\tau_{xz_2}^\infty + \alpha_2 \tau_{yz}^\infty}{\beta_2} \right\} \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos \theta + S_2 \sin \theta)^{1/2}} \right]. \quad (45) \end{aligned}$$

由此导出几个特殊新结果, 在(42)~(45)式中, 令 $\alpha_k = 0, \beta_k = 1, \gamma_k = G_k$ (剪切弹性模量) $S_k = i$, 便得两种各向同性材料界面周期性线夹杂问题的相应结果:

$$\tau_{xz_1} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} (\tau_{xz_1}^\infty + \tau_{xz_2}^\infty) \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \cos \frac{\theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi, \quad (46)$$

$$\tau_{xz_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} (\tau_{xz_1}^\infty + \tau_{xz_2}^\infty) \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \cos \frac{\theta}{2} \quad -\pi < \theta < 0, \quad (47)$$

$$\tau_{yz_1} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} (\tau_{xz_1}^\infty + \tau_{xz_2}^\infty) \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \sin \frac{\theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi, \quad (48)$$

$$\tau_{yz_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} (\tau_{xz_1}^\infty + \tau_{xz_2}^\infty) \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \sin \frac{\theta}{2} \quad -\pi < \theta < 0. \quad (49)$$

在(46)~(49)式中, 令 $b \rightarrow \infty$, 可得界面含一条刚性线的解答, 注意到

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} = \sqrt{\frac{a}{2}},$$

以及在无穷远处应力状态的关系 $\tau_{xz_1}^\infty / G_1 = \tau_{xz_2}^\infty / G_2$ (可由(17)和(20)导出), 可以得出与文[5]相一致的结果。

若取消公式(42)~(45)中所有下标1与2的区别, 即令 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta, S_1 = S_2 = S$, 便得均匀各向异性材料中含周期分布刚性线夹杂问题的解答:

$$\tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}^\infty + \alpha \tau_{yz}^\infty}{\beta} \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \operatorname{Im} \left[\frac{S}{(\cos \theta + S \cos \theta)^{1/2}} \right], \quad (50)$$

$$\tau_{yz} = - \frac{\tau_{xz}^\infty + \alpha \tau_{yz}^\infty}{\beta} \sqrt{\frac{b}{\pi r}} \sqrt{\tan \frac{\pi a}{2b}} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos \theta + S \sin \theta)^{1/2}} \right]. \quad (51)$$

在(50)、(51)两式中令 $b \rightarrow \infty$, 便得各向异性介质中含一条刚性线的解答, 这与文[6]结果相一致。

[参 考 文 献]

- [1] LIU You_wen, JIANG Chi_ping. Stress distribution at the rigid circular arc inclusion end[J]. Eng Frac Mech, 1994, 47(3): 431—440.
- [2] 刘又文, 蒋持平. 两种各向异性材料界面周期裂纹的反平面问题[J]. 固体力学学报, 1996, 17(2): 140—144.
- [3] 蒋持平, 刘又文. 两种各向异性材料界面共线裂纹的反平面问题[J]. 固体力学学报, 1994, 15(4): 327—332.
- [4] 樊大钧. 数学弹性力学[M]. 北京: 新时代出版社, 1983.
- [5] Jiang C P, Cheung Y K. Antiplane problems of collinear rigid line inclusions in dissimilar media[J]. Eng Frac Mech, 1995, 52(3): 907—916.
- [6] 蒋持平. 各向异性材料中共线刚性线夹杂的纵向剪切问题[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(2): 147—154.

Antiplane Problems of Periodical Rigid Line Inclusions Between Dissimilar Anisotropic Materials

LIU You_wen

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, P R China)

Abstract: The antiplane shear problems of periodical rigid line inclusions between dissimilar anisotropic materials are dealt with. By using the complex variable method, the closed form solutions are obtained. The stress distribution in the immediate vicinity of the rigid line is examined. The corresponding formulation between dissimilar isotropic materials and in homogeneous anisotropic medium can be derived from the special cases of those in the present paper, and the limit conditions are in agreement with the previously known results.

Key words: anisotropic materials; interface fracture; periodical rigid line inclusions; antiplane shear