

文章编号: 1000-0887(2001) 10-1001-08

# 粘弹性薄板准静态分析中一种时域算法<sup>\*</sup>

张能辉, 程昌钧

(上海市应用数学和力学研究所, 上海大学 力学系, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 基于线性粘弹性材料的 Boltzmann 叠加原理和大挠度薄板的 von Kármán 假设, 给出了粘弹性薄板准静态问题的数学模型。在空域上采用 Galerkin 方法可将原积分-偏微分系统化为积分系统, 而在时域上利用本文所提出的新方法可将该积分系统化为微分系统。计算结果表明, 新算法与常用的有限差分法相比操作简单, 具有无存贮和计算快等优点。

**关键词:** 粘弹性薄板; von Kármán 假设; Galerkin 方法; 准静态响应; 直接法; 积分-微分方程

**中图分类号:** O345      **文献标识码:** A

## 引 言

在几何非线性的情况下, 粘弹性结构准静态问题的数学模型一般是非线性积分-偏微分系统。对这类问题很难求得精确解, 一般只能利用各种直接法获得数值解<sup>[1~2]</sup>。由于粘弹性材料的记忆特性, 计算时必须存贮整个历史, 通常在时域上利用有限差分法将积分项离散, 并采用 Prony 级数形式的材料函数推出递推公式<sup>[3]</sup>。利用这种方法尽管可以解决数据存贮问题, 但对于结构稳态响应的预测仍存在误差积累和计算耗时等问题, 特别对于那些力学行为随时间变化极为缓慢的材料, 如一些地学材料更是如此。

本文首先利用线性粘弹性理论中的 Boltzmann 叠加原理<sup>[4]</sup>和薄板大挠度理论中的 von Kármán 几何假设, 建立了粘弹性薄板准静态分析的非线性数学模型, 其控制方程和边界条件均是积分-偏微分型的, 关于这类方程的定性和定量分析仍需作大量的研究工作。其次, 针对这类数学模型给出了一种数值方法, 计算时在空域上采用 Galerkin 方法将原积分-偏微分系统化为积分系统。当粘弹性材料的松弛函数满足一定的条件时, 在时域上利用 Leibnitz 公式对该积分系统关于时间求导一次后, 通过引进新变量可将该积分系统化为等价的微分系统。最后考察了横向阶跃载荷作用下粘弹性简支板的准静态响应。计算结果表明, 本文给出的时域新算法是一种行之有效的算法。本文所提出的时域新算法与常用的时域有限差分法相比, 计算时无须在每个离散时刻判断非线性代数方程根的情况, 具有操作简单、无存贮和计算快等优点。另外, 对于粘弹性结构稳态响应的研究通过本文所提出时域新算法可直接求解一个非线性

\* 收稿日期: 2000\_07\_18; 修订日期: 2001\_04\_24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772027); 上海市教育发展基金资助项目(99A01); 上海市博士后基金资助项目(1999 年度)

作者简介: 张能辉(1970—), 男, 博士。

性代数方程, 而无须一步一步迭代计算, 从而极大地减少了计算时间。

## 1 数学模型

设粘弹性材料服从 Boltzmann 叠加原理<sup>[4, 5]</sup>, 而应变\_位移关系满足薄板的 von Kármán 假设。若忽略惯性项的影响, 则粘弹性简支矩形板准静态分析的数学模型为<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} e \prec \cdot^4 w - [w, f] - q = 0 & (x, y, t) \in \Omega \times (0, t_0), \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \cdot^4 f + e \prec [w, w]/2 = 0 & (x, y, t) \in \Omega \times (0, t_0), \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} w = \Delta w = 0, f = \Delta f = 0 & (x, y, t) \in \partial \Omega \times [0, t_0], \\ w = f \equiv 0 & (x, y, t) \in \Omega \times [-\infty, 0]. \end{cases} \quad (1c)$$

上式中所有变量均已无量纲化<sup>[3]</sup>。  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\partial \Omega = \{(x, y): x = 0, l; y = 0, 1\}$ ,  $l$  是板的长宽比,  $w, f$  分别为挠度和应力函数,  $q$  为横向载荷,  $e$  为松弛函数,  $[w, f] \equiv w_{,xx}f_{,yy} - 2w_{,xy}f_{,xy} + w_{,yy}f_{,xx}$ , 符号  $\prec$  表示 Boltzmann 算子, 其定义如下

$$a(t) \prec b(t) = a(0)b(t) + a \prec (t) * b(t) =$$

$$a(0)b(t) + \int_0^t \frac{da(t-\tau)}{d(t-\tau)} b(\tau) d\tau,$$

符号  $*$  表示卷积。需要指出的是, 由于使用了积分型本构关系, 边界条件(1b)原来的形式也是积分\_偏微分型的, 这里已利用 Titchmarsh 定理作了处理<sup>[4]</sup>。

## 2 数值方法

### 2.1 空域上的 Galerkin 近似

精确求解积分\_偏微分系统(1)是很困难的, 这里在空域上采用 Galerkin 方法, 将  $w, f, q$  展成如下重三角级数

$$\begin{cases} w(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij}(t) \sin(i\pi x/l) \sin(j\pi y), \\ f(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}(t) \sin(i\pi x/l) \sin(j\pi y), \\ q(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}(t) \sin(i\pi x/l) \sin(j\pi y), \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $w_{ij}(t), f_{ij}(t)$  是待定函数, 而  $q_{ij}(t)$  是已知函数, 由下式给定

$$q_{ij}(t) = \frac{4}{l} \int_0^l \int_0^1 q(x, y, t) \sin(i\pi x/l) \sin(j\pi y) dx dy. \quad (3)$$

取  $m = n = 1$ , 代(2)入(1), 得一阶近似方程

$$\begin{cases} g(t) = -T'e(t) \prec u^2(t), \\ Ce(t) \prec u(t) + Tu(t)[e(t) \prec u^2(t)] - r(t) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

这里,

$$\begin{cases} B = 32\pi^2/3l^2, C = \pi^4(1+l^{-2})^2, T' = B/(2C), \\ T = B^2/(2C), u = W_{11}, g = f_{11}, r = q_{11}. \end{cases} \quad (5)$$

### 2.2 时域上的处理过程

由(4)不难得到粘弹性板的瞬态响应为

$$\begin{cases} g(0) = -T' u^2(0)/2, \quad u^3(0) + R_1(0)u(0) + R_0(0) = 0, \\ R_0(0) = -T^{-1}r(0), \quad R_1(0) = T^{-1}C. \end{cases} \quad (6)$$

下面将给出对(4)中积分项的两种处理方法。

### 方法1 有限差分法<sup>[3]</sup>

若记

$$S(t) = \int_0^t e(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [u(\tau)] d\tau, \quad V(t) = \int_0^t e(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [u^2(\tau)] d\tau, \quad (7)$$

并设松弛函数  $e(t)$  可用 Prony 级数形式表示, 即

$$e(t) = \sum_{i=0}^k e_i \exp(-\alpha_i t), \quad \alpha_0 = 0, \quad \sum_{i=0}^k e_i = 1. \quad (8)$$

取离散时间为

$$\Delta t_q = t_q - t_{q-1}, \quad q = 1, 2, \dots, p, \quad t_p = t, \quad t_0 = 0, \quad (9)$$

则(7)可化为

$$\begin{cases} S(t_p) = e_0(u(t_p) - u(0)) + \sum_{i=1}^k e_i S_p^{(i)}, \\ V(t_p) = e_0(u^2(t) - u^2(0)) + \sum_{i=1}^k e_i V_p^{(i)}, \end{cases} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{cases} S_0^{(i)} = V_0^{(i)} = 0, \quad p = 0; \quad \phi_p^{(i)} = \exp(-\alpha_i \Delta t_p), \\ S_p^{(i)} \approx \phi_p^{(i)} S_{p-1}^{(i)} + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \exp[-\alpha_i(t_p - \tau)] \frac{d}{d\tau} [u(\tau)] d\tau \quad p \geq 1, \\ V_p^{(i)} \approx \phi_p^{(i)} V_{p-1}^{(i)} + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \exp[-\alpha_i(t_p - \tau)] \frac{d}{d\tau} [u^2(\tau)] d\tau \quad p \geq 1. \end{cases} \quad (11)$$

递推关系(11)是方法1的关键, 尽管卷积积分考虑了整个以往的历史, 但计算时不必存储全部历史, 只需对前一时间作适当校正。针对(11)式中的导数项, 可给出不同的离散格式。这里仅给出采用向后差分方法得到的计算格式

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} [u(\tau)] = \frac{u(t_q) - u(t_{q-1})}{t_q - t_{q-1}} = \frac{\Delta u(t_q)}{\Delta t_q} \quad \tau \in (t_{q-1}, t_q), \\ \frac{d}{d\tau} [u^2(\tau)] = 2u(\tau) \frac{d}{d\tau} [u(\tau)] = 2 \frac{u(t_q) + u(t_{q-1})}{2} \frac{\Delta u(t_q)}{\Delta t_q} = \\ \frac{u^2(t_q) - u^2(t_{q-1})}{\Delta t_q} = \frac{\Delta u^2(t_q)}{\Delta t_q} \quad \tau \in (t_{q-1}, t_q). \end{cases} \quad (12)$$

由(4)、(10)、(11)和(12), 得

$$\begin{cases} g(t_p) = -T' \left\{ e(t_p) u^2(0) + e_0 [u^2(t_p) - u^2(0)] + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^k e_i \left[ \phi_p^{(i)} V_{p-1}^{(i)} + \alpha_i^{-1} (1 - \phi_p^{(i)}) \frac{\Delta u(t_p)}{\Delta t_p} \right] \right\}, \\ u^3(t_p) + R_1(p)u(t_p) + R_0(p) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中,

$$R_1(p) = -T^{-1}C + \left[ e_0 + \sum_{i=1}^k e_i \frac{(1 - \phi_p^{(i)})}{\alpha_i \Delta t_p} \right]^{-1} \left\{ [e(t_p) - e_0] u^2(0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \sum_{i=1}^k e_i \left[ \phi_p^{(i)} V_{p-1}^{(i)} - \frac{(1 - \phi_p^{(i)}) u^2(t_{p-1})}{\alpha_i \Delta t_p} \right] \right\}, \\
 R_0(p) = & -T^{-1} C \left[ e_0 + \sum_{i=1}^k e_i \frac{(1 - \phi_p^{(i)})}{\alpha_i \Delta t_p} \right]^{-1} \left\{ [e(t_p) - e_0] u^2(0) + \right. \\
 & \left. \sum_{i=1}^k e_i \left[ \phi_p^{(i)} S_{p-1}^{(i)} - \frac{(1 - \phi_p^{(i)}) u(t_{p-1})}{\alpha_i \Delta t_p} \right] - C^{-1} r(t_p) \right\}.
 \end{aligned}$$

因此,通过有限差分法将粘弹性薄板的准静态问题转化为在每个离散时刻求一个非线性代数方程的合理解。利用方法 1, 尽管不必存贮解的历史, 但获取当前时刻的信息是以历史已知为前提的。

## 方法 2 微分方法

若板的材料为标准线性固体材料, 则

$$\begin{cases} e(t) = e_0 + e_1 \exp(-\alpha_1 t), & e_0 + e_1 = 1, \\ e(\tau - \tau) = -\varphi_1(t) \phi_1(\tau) = -[e_1 \exp(\alpha_1 t)] / [\alpha_1 \exp(\alpha_1 \tau)]. \end{cases} \quad (14)$$

将(14)代入(4b), 得

$$C \left[ u - \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) u(\tau) d\tau \right] + Tu \left[ u^2 - \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) u^2(\tau) d\tau \right] - r = 0 \quad (15)$$

将(15)式两边同除以  $\varphi_1$  ( $\varphi_1 \neq 0$ ), 得

$$C \left[ \frac{u}{\varphi_1} - \int_0^t \phi_1(\tau) u(\tau) d\tau \right] + T \left[ \frac{u^3}{\varphi_1} - u \int_0^t \phi_1(\tau) u^2(\tau) d\tau \right] - \frac{r}{\varphi_1} = 0 \quad (16)$$

对(16)式两边同时关于  $t$  求导, 得

$$\begin{aligned}
 C \left[ \frac{u\varphi_1 - u\varphi_1}{\varphi_1^2} - \phi_1 u \right] + T \left[ \frac{3u^2 u\varphi_1 - u^3 \varphi_1}{\varphi_1^2} - \phi_1 u^3 - \right. \\
 \left. u \int_0^t \phi_1(\tau) u^2(\tau) d\tau \right] - \frac{r\varphi_1 - r\varphi_1}{\varphi_1^2} = 0 \quad (17)
 \end{aligned}$$

将(17)式两边同乘以  $\varphi_1^2$ , 得

$$\begin{aligned}
 C[u\varphi_1 - u\varphi_1 - \varphi_1^2 \phi_1 u] + \\
 T \left[ 3u^2 u\varphi_1 - u^3 \varphi_1 - \varphi_1^2 \phi_1 u^3 - \varphi_1^2 u \int_0^t \phi_1(\tau) u^2(\tau) d\tau \right] - \\
 (r\varphi_1 - r\varphi_1) = 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

不可能利用 Leibnitz 公式将(18)式化为微分方程, 因此下述条件并非永远成立

$$\text{当 } t \in [0, +\infty) \text{ 时, } u(\tau) \neq 0 \quad (19)$$

为将积分\_微分方程(18)化为微分方程, 引入新变量

$$y_1 = u, \quad y_2 = \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) u^2(\tau) d\tau, \quad (20)$$

则(18)式可化为

$$\begin{aligned}
 C(y_1\varphi_1 - y_1\varphi_1 - \varphi_1^2 \phi_1 y_1) + T(3y_1^2 y_1\varphi_1 - y_1^3 \varphi_1 - \\
 \varphi_1^2 \phi_1 y_1^3 - \varphi_1 y_1 y_2) - (r\varphi_1 - r\varphi_1) = 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

利用(14)将(21)化为下式

$$F_1(y_1, y_2) y_1 = F_0(y_1), \quad (22)$$

其中,

$$F_1(y_1, y_2) = C + T(3y_1^2 - y_2),$$

$$F_0(y_1) = -C\alpha_1 e_0 y_1 - T\alpha_1 e_0 y_1^3 + r - \alpha_1 r.$$

注意到(20)和(22), (4b)可化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1^{-1}(y_1, y_2) F_0(y_1), \\ \dot{y}_2 = (e_1 y_1^2 - y_2) \alpha_1, \end{cases} \quad (23)$$

同样利用 Leibnitz 求导法则, (4a)可化为

$$g - \alpha_1 g + T'(2u - \alpha_1 e_0 u^2) = 0. \quad (24)$$

因此, 令  $y_3 = g$ , 并注意到(20)、(23)和(24), 则(4)可化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1^{-1}(y_1, y_2) F_0(y_1), \\ \dot{y}_2 = (e_1 y_1^2 - y_2) \alpha_1, \\ \dot{y}_3 = -\alpha_1 y_3 - T'(2y_1 y_2 + \alpha_1 e_0 y_1^2). \end{cases} \quad (25a)$$

由上可见, 在一定条件下利用新方法可将非线性积分系统化为一个等价的微分系统, 而关于微分方程的数值解已有许多成熟且行之有效的方法. 相应于(25)的初值为

$$y_1(0) = u(0), \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = -T'u^2(0), \quad (25b)$$

其中,  $u(0)$  由方程(6)获得.

另外, 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 若  $r(t)$  和  $r'(t)$  的极限存在, 则令  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ , 不难求得粘弹性薄板稳态响应为

$$y_1^3(+\infty) + R_1(+\infty) y_1(+\infty) + R_0(+\infty) = 0; \quad (26a)$$

$$\begin{cases} y_2(+\infty) = e_1 y_1^2(+\infty) = e(0) y_1^2(+\infty), \\ y_3(+\infty) = -T'e_0 y_1^2(+\infty) = -T'e(+\infty) y_1^2(+\infty); \end{cases} \quad (26b)$$

其中,

$$\begin{cases} R_1(+\infty) = CT^{-1} - [T\alpha_1 e(+\infty)]^{-1} D \lim_{t \rightarrow +\infty} (\lambda + \alpha_1 \lambda), \\ R_0(+\infty) = -[T\alpha_1 e(+\infty)]^{-1} \lim_{t \rightarrow +\infty} (r - \alpha_1 r). \end{cases} \quad (27)$$

由(26)和(27)可见, 当粘弹性薄板趋于稳态时, 其力学响应仅与材料的稳态性质和松弛时间有关, 而与材料的瞬态性质无关. 另外, 由(26)和(27)所获得的稳态解不存在误差积累的问题, 因而利用新方法节省了大量的计算稳态所需时间. 为简单起见, 这里仅给出对标准线性固体材料的处理过程, 应指出这种新方法只要求材料函数能展成(8)的形式即可.

### 3 数值结果与讨论

对于标准线性固体材料, 计算时取  $e_0 = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 0.06$ ,  $q(t) = q_0 H(t)$ ,  $l = 1$ . 表1给出了大挠度理论数值解与小挠度理论解析解之间的比较, 加载幅度  $q_0 = 1$ , 时间步长均取为  $\Delta t_q = 1$ , 对微分系统(25)采用变步长 Runge-Kutta-Merson 方法求得. 而  $(w_G^{(c)}, f_G^{(c)})$  和  $(w_G^{(n)}, f_G^{(n)})$  分别表示利用方法1和方法2所获得的挠度和应力函数的一阶 Galerkin 近似解,  $Er^{(c)}$  或  $Er^{(n)}$  表示相对误差. 这里解析解  $w^{(a)}$  是采用变量分离法和积分变换法获得的 Levy 形式解, 其表达式见文献[5].

由表1可见, 当外部输入很弱时, 用两种理论获得的结果基本一致. 数值结果表明, 此时应力函数值的量级为  $10^{-6}$ , 完全可以忽略不计, 因此在这种情况下用小挠度理论来代替大挠度理论是可行的. 显然数值结果的误差主要来源于空域上的 Galerkin 离散, 为提高精度, 可在(2)中可多取几项.

表 2 给出了在  $q_0 = 6\ 000$ ,  $\Delta t_q = 1$  情况下, 采用以上两种方法获得的数值解。表 1 和表 2 表明, 在足够小的步长下, 采用以上两种方法可获得相同精度的数值结果, 但采用新方法较为简便。

表 1  $q(t) = H(t)$  作用下粘弹性方板的最大挠度值

时间 $t$	解析解 $w^{(a)}$	$w_G^{(c)} (\times 10^{-3})$	$Er^{(c)} / (\%)$	$w_G^{(n)} (\times 10^{-3})$	$Er^{(n)} / (\%)$
0	4 060 000	4.160 643	2.478 891	4 160 643	2.478 891
10	5 112 278	5.238 771	2.474 298	5 239 004	2.478 855
20	5 891 825	6.037 712	2.476 091	6 037 873	2.478 824
30	6 469 327	6.628 467	2.475 373	6 629 689	2.478 804
40	6 897 125	7.067 919	2.475 905	7 068 117	2.479 177
50	7 214 092	7.392 883	2.478 357	7 392 912	2.478 759
60	7 448 887	7.633 448	2.477 699	7 633 526	2.478 746
70	7 622 827	7.811 785	2.478 844	7 811 777	2.478 739
80	7 751 686	7.943 869	2.479 241	7 943 829	2.478 725
90	7 847 146	8.041 620	2.478 276	8 041 655	2.478 722
100	7 917 865	8.114 100	2.478 382	8 114 126	2.478 711
200	8 109 936	8.311 033	2.479 637	8 310 958	2.478 712
300	8 119 499	8.320 808	2.479 327	8 320 757	2.478 699
400	8 119 975	8.321 047	2.476 263	8 321 245	2.478 702
500	8 119 999	8.321 047	2.475 960	8 321 269	2.478 694

表 2  $q(t) = 6\ 000H(t)$  作用下粘弹性方板的最大挠度值及应力函数值

时间 $t$	$w_G^{(c)}$	$w_G^{(n)}$	$-f_G^{(c)}$	$-f_G^{(n)}$
0	7.779 347	7.779 348	8.175 707	8.175 709
10	8.578 757	8.579 750	7.870 925	7.870 284
20	9.110 237	9.111 665	7.669 165	7.668 404
30	9.469 930	9.471 570	7.525 205	7.524 457
40	9.716 618	9.718 015	7.420 042	7.419 111
50	9.886 874	9.888 104	7.342 362	7.341 613
60	10.005 08	10.006 11	7.285 389	7.284 758
70	10.087 43	10.088 27	7.243 784	7.243 274
80	10.144 95	10.145 61	7.213 589	7.213 181
90	10.185 18	10.185 70	7.191 803	7.191 473
100	10.213 35	10.213 75	7.176 156	7.175 889
200	10.277 58	10.277 60	7.138 785	7.138 772
300	10.279 44	10.279 44	7.137 646	7.137 647
400	10.279 50	10.279 49	7.137 611	7.137 614
500	10.279 50	10.279 50	7.137 611	7.137 613

图1和图2分别示出了采用新方法获得的方板在阶跃载荷作用下中心处的挠度和应力函数的时程曲线,并对 $q_0 = 4\,000$ 和 $q_0 = 5\,000$ 作了比较。图中的曲线都有渐近线,这说明材料的稳态响应为弹性响应。

图3和图4分别示出了采用新方法获得的粘弹性方板中心处的瞬态和稳态响应。若采用方法1获得同样的稳态响应曲线所需要的计算工作量则是非常大的。

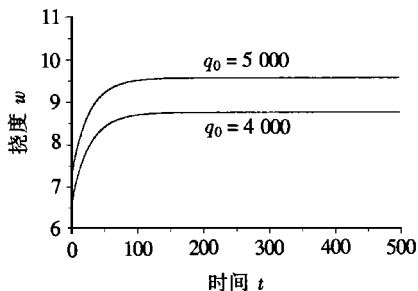


图1 挠度时程曲线

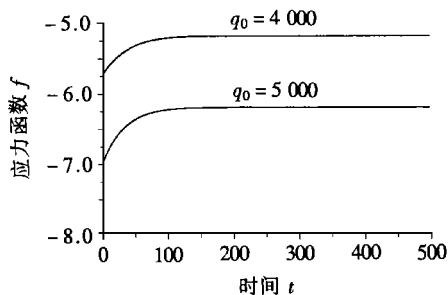


图2 应力函数时程曲线

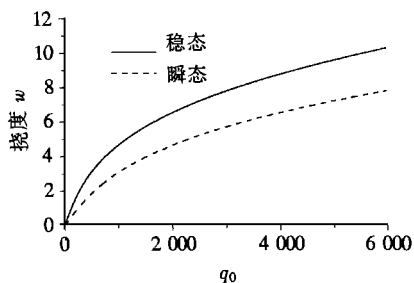


图3 挠度响应曲线

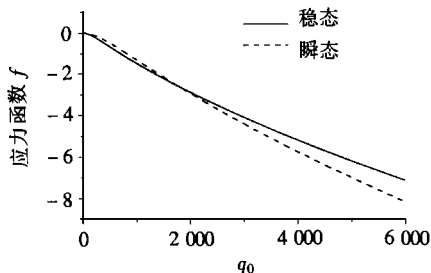


图4 应力函数响应曲线

### [参 考 文 献]

- [1] 沈亚鹏, 李录贤, 王晓明. 粘弹性准静态、动态问题的数值解法[J]. 力学进展, 1994, 24(2): 265—272.
- [2] Janovsky Y, Shaw S, Warby M K, et al. Numerical methods for treating problems of viscoelastic isotropic solid deformation[J]. J Comput Appl Math, 1995, 63(1\_3): 91—107.
- [3] ZHANG Neng\_hui, CHENG Chang\_jun. Non\_linear mathematical model of viscoelastic thin plates with applications[J]. Comput Methods Appl Mech Engng, 1998, 165(1\_4): 307—319.
- [4] 杨挺青. 粘弹性理论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1993.
- [5] CHENG Chang\_jun, ZHANG Neng\_hui. Variational principles on static\_dynamic analysis of viscoelastic thin plates with applications[J]. Int J Solids Struct, 1998, 35(33): 4491—4505.
- [6] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌和超混沌[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690—699.

# A Time Domain Method for Quasi-Static Analysis of Viscoelastic Thin Plates

ZHANG Neng\_hui, CHENG Chang\_jun

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of  
Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

**Abstract:** Based on the Boltzmann's superposition principles of linear viscoelastic materials and the von Kármán's hypotheses of thin plates with large deflections, a mathematical model for quasi-static problems of viscoelastic thin plates was given. By the Galerkin method in spatial domain, the original integro-partial differential system could be transformed into an integral system. The latter further was reduced to a differential system by using the new method for temporal domain presented in this paper. Numerical results show that compared with the ordinary finite difference method, the new method in this paper is simpler to operate and has some advantages, such as, no storage and quicker computational speed etc.

**Key words:** viscoelastic thin plate; von Kármán's hypothesis; Galerkin method; quasi-static response; direct method; integro-differential equation