

文章编号: 1000-0887(2001) 11-1211-06

用时域边界元法分析半圆表面裂纹 的动态应力强度因子*

钟 明, 张永元

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(汤任基推荐)

摘要: 发展了时域边界元法在分析三维裂纹的动态应力强度因子(DSIF)方面的应用, 采用了等参单元及其奇性元很好地模拟了三维裂纹应力场奇异性, 首次用时域边界元法位移方程计算了半圆表面裂纹的 DSIF^{*} 提出并讨论了时间步长的选取方案。自编了时域边界元法动态分析程序, 几个算例说明了时域边界元法在三维动态断裂问题中可以得到很好的精度。

关键词: 时域边界元法; 三维动态断裂问题; 动态应力强度因子

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

三维裂纹问题的瞬态分析是断裂力学中的重要内容。由于问题的复杂性, 三维裂纹动态应力强度因子(DSIF)的计算至今尚未完善。Chen^[1]最早有限差分法(FDM)研究了内埋圆片裂纹、椭圆片裂纹和半椭圆表面裂纹。因为有限差分法不能很好地描绘裂纹前沿的奇异应力场, 此法没有得到广泛应用。而有限元法(FEM)能用裂纹前沿的奇性元模拟动态裂纹的奇异性, 但由于数据准备和计算时间花费大, 至今在三维裂纹的瞬态分析方面很少有文献发表^[2]。

最近二十多年来, 边界元法(BEM)得到了很大的发展, 它具有降低维数、节省计算时间和求解精度高的优点, 并能较好地处理应力集中问题、无限域和半无限域问题^[3,4], 因此, BEM 在断裂力学领域显示出比 FEM 更大的潜力, 得到了广泛的应用^[5]。用 BEM 进行三维裂纹问题的瞬态分析目前主要有时域法、拉氏或傅氏变换法和用静态基本解的对偶互等法(DR_BEM)三种。Sladek 和 Sladek^[6]用拉氏变换法研究了无限弹性体内埋圆片裂纹在裂纹面上受冲击载荷下的 DSIF; Zhang 和 Shi^[7]研究了厚板贯穿裂纹和半圆表面裂纹问题; Wen^[8]用虚应力和位移不连续公式计算了 DSIF; Fedelinski 等^[9]用对偶边界元法(DBEM)计算了内埋圆片、椭圆片裂纹和厚板边裂纹的 DSIF; Wen 等^[10]中运用了适合于断裂力学三维动态混合型问题的权函数。Hirose 和 Achenbach^[11]用时域法面力方程计算了圆片状裂纹问题。而在时域法中用位移方程计算二维裂纹问题的 DSIF 已得到广泛的应用^[12,13], 但在三维裂纹问题中的应用尚无文献报导。这是因为时域法与拉氏变换法相比具有时间累积误差和系数运算量大的缺点, 但这可通过提高每一时间步长内精度和当前迅猛发展的计算机硬件水平的事实来克服; 同时, 时域法避

* 收稿日期: 1999_10_09; 修订日期: 2001_03_20

作者简介: 钟明(1969—), 男, 上海奉贤人, 博士。

免了反演误差和解的不稳定性。

本文首次采用时域边界元法位移方程计算三维裂纹的 DSIF。空间采用二次等参元插值, 时间采用线性插值, 提出并讨论了时间步长的选取方案。采用了等参单元及其奇性元很好地模拟了三维裂纹应力场奇异性, 用位移定义的公式计算了内埋圆和椭圆片裂纹以及半圆表面裂纹受 Heaviside 函数型载荷作用下的 DSIF, 与现有的文献比较可见, 其精度是令人满意的。

1 时域边界元法基本方程

当初始条件和体积力为零时, 弹性动力学的边界积分方程是^[14]:

$$c_{ij}(\xi) u_i(\xi, T) = \int_S [G_{ij}^*(x, \xi, T) * t_i(x, T) - F_{ij}^*(x, \xi, T) * u_i(x, T)] dS(x), \quad (1)$$

其中 $G_{ij}^* t_i = \int_0^T G_{ij}^*(x, T; \xi, \tau) t_i(x, \tau) d\tau$, $F_{ij}^* u_i = \int_0^T F_{ij}^*(x, T; \xi, \tau) u_i(x, \tau) d\tau$ 是 Riemann 卷积积分; ξ 和 x 表示源点和场点, 基本解 G_{ij} 和 F_{ij} 表示由于在 τ 时刻在点 ξ 的 j 方向作用一单位集中力, 而在 T 时刻在点 x 的 i 方向产生的位移分量 u_i 和面力分量 t_i , c_{ij} 是自由项系数, 在光滑边界上时, $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ 。在三维情况下, 基本解见文^[15]。

基本解遵守因果条件: 如果

$$c_1(t - \tau) < r, \text{ 则 } G_{ij}(x, t; \xi, \tau) = 0, \quad (2)$$

和如下的时间转换性质:

$$G_{ij}(x, t + t_0; \xi, \tau + t_0) = G_{ij}(x, t; \xi, \tau). \quad (3)$$

值得注意的是边界积分方程式(1)是隐含时间的公式, 计算 T 时的值必须考虑 T 以前的面力和位移历史。一旦解出边界积分方程, 边界应力可通过联立本构关系和边界平衡条件以及位移的方向导数形成矩阵求出。内点应力通过下式求出

$$q_k(\xi, T) = \int_S [G_{ijk}^*(x, \xi, T) * t_i(x, T) - F_{ijk}^*(x, \xi, T) * u_i(x, T)] dS(x), \quad (4)$$

式中函数 G_{ijk}^* 和 F_{ijk}^* 的表达式可见文^[14]。

2 数值实施

三维弹性动力边界元法的数值实施包括空间离散、时间离散、奇异积分的处理以及方程组的形成和求解, 有关这方面的细节可见文^[14, 16]。为了得到 T_N 时刻的值, 对式(1)进行离散, 时间分成 N 等分, 边界分成 L 个子单元, 且在每一时间步内, 设位移和面力呈线性变化, 即

$$u_i(x, \tau) = \sum_{n=1}^N [M_i^n u_i^{n-1}(x) + M_F^n u_i^n(x)], \quad t_i(x, \tau) = \sum_{n=1}^N [M_i^n t_i^{n-1}(x) + M_F^n t_i^n(x)], \quad (5)$$

其中, $u_i^n(x)$ 和 $t_i^n(x)$ 表示 T_n 时刻的 u_i 和 t_i ; $M_i^n M_F^n$ 表示 T_n 时刻的时间插值函数, 写成:

$$M_i^n = \frac{T_n - \tau}{\Delta T} \phi_n(\tau), \quad M_F^n = \frac{\tau - T_{n-1}}{\Delta T} \phi_n(\tau), \quad \phi_n(\tau) = H[\tau - (n-1)\Delta T] - H[\tau - n\Delta T],$$

H 是 Heaviside 函数。同时, 采用 8_ 节点二次等参单元插值, 把坐标和位移以及面力表示成

$$x_i = N_k(\zeta, \eta) x_{ik}, \quad u_i = N_k(\zeta, \eta) u_{ik}, \quad t_i = N_k(\zeta, \eta) t_{ik}, \quad (6)$$

其中, $i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, \dots, 8$ 。把式(5)、(6)代入式(1)得:

$$c_{ij} u_i(\xi, T_N) = \sum_{n=1}^N \left[\int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \sum_{l=1}^L \int_{-1}^1 M_l^n G_{ij}^*(x(\zeta, \eta), T_N; \xi, \tau) N_k |J| d\zeta d\eta d\tau \cdot t_{ik}^{(n-1)(l)} + \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \sum_{l=1}^L \int_{-1}^1 M_F^n G_{ij}^*(x(\zeta, \eta), T_N; \xi, \tau) N_k |J| d\zeta d\eta d\tau \cdot t_{ik}^{(n)(l)} \right] -$$

$$\sum_{n=1}^N \left[\int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \sum_{l=1}^L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_l^n F_{ij}(x(\zeta, \eta), T_N; \xi, \tau) N_k |J| d\zeta d\eta d\tau \cdot u_{ik}^{(n-1)(l)} + \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \sum_{l=1}^L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_l^n F_{ij}(x(\zeta, \eta), T_N; \xi, \tau) N_k |J| d\zeta d\eta d\tau \cdot u_{ik}^{(n)(l)} \right] \quad (7)$$

其中, $|J|$ 是三维变换的雅可比行列式。在式(7)中, 为了求得 T_N 时的值, 须先知道在这时间以前的值, 因此在每一时间步都要求解一次边界积分方程, 并把所得值留作以后时间步用。经过交换已知和未知量, 在第 N 个时间步, 边界积分方程式(1) 可写成:

$$[A_F^N] \{X^N\} - [B_Y^N] \{Y^N\} = - \sum_{n=2}^N [A_F^n + A_I^{n-1}] \{X^{N-n+1}\} - [B_F^n + B_I^{n-1}] \{Y^{N-n+1}\} + [B_I^N] \{Y^0\}, \quad (8)$$

其中, 等号右端是过去动态历史对当前时间点的影响, 矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 分别对应于未知量和已知量, $\{X\}$ 和 $\{Y\}$ 表示未知量和已知量, $[A]$ 和 $[B]$ 的上标表示时间步, 下标表示该时间步内的局部时间节点(I 或 F)。关于奇异性的处理见文[16]。对于在非奇异单元上的积分, 为了提高精度, 对单元进行细分, 本文采用了单元递归子分法实现等精度的 Gauss 积分。

时间步长 ΔT , 即 $\Delta T = \beta L / c_1$ 中 β 的选取是时域边界元法中的重要问题, L 为用于边界面离散中典型单元的惯用尺寸。文[16] 中指出: 为了使精确度最好, β 必须小于 1。Dominguez 和 Gallego^[17] 在二维情况下比较了 $0.5 \leq \beta \leq 2.0$ 的结果后得出结论: β 在 1 左右时精度最好。但以上结论仅在一般弹性力学, 即单元尺寸相差不大时得出的, 在断裂问题中, 由于单元尺寸相差很大, 本文作者受文[12] 的启发, 提出了经验公式, $\beta \approx \sqrt{L_{\max}/L_{\min}}$, L_{\max} 和 L_{\min} 分别是最大和最小单元的尺寸, 在后面的考题中取得了很好的效果。

3 动态应力强度因子的计算公式

本文采用裂纹面前沿的位移 u 来计算应力强度因子, 所用公式在文[18, 7] 中已得到了推导和应用, 文[5] 中给予好的评价。为了模拟 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性, 在 8_ 节点等参单元基础上, 在裂纹前沿布置奇性元。假定裂纹前沿是由参数方程 $x = \alpha \sin \theta, y = \beta \cos \theta$ 表示的椭圆, 于是 I 型裂纹的 DSIF 可表示成:

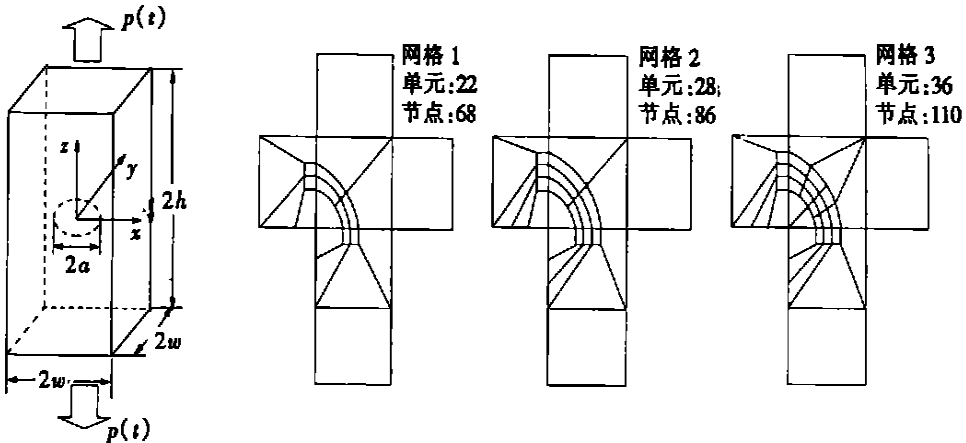


图 1 含内埋圆片状裂纹的立方柱及三种网格离散

$$K_I(t) = f(\theta) \left\{ (1 + \eta) [(\eta - 2) u_z^{(1)} + 4u_z^{(2)}] + 2(1 - \eta^2) u_z^{(8)} + (1 - \eta) [4u_z^{(8)} - (2 + \eta) u_z^{(7)}] \right\} \quad (9)$$

式中 $f(\theta) = E\sqrt{\pi}(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{1/4}/4(1-\nu^2)(2abL)^{1/2}$, $\eta = (\theta_0 - \theta)/\Delta$, L 为单元尺寸与椭圆半径的比值, 本文取 $L = 0.15$ 。当 $a = b$ 时, 就是圆形裂纹的特例。

4 考核算例

例 1 突加荷载 $p(t) = p_0H(t)$ 作用下内埋圆片状裂纹的瞬态响应

已知条件为: $w/h = 0.5$, $a/w = 0.5$, 泊松比 $\nu = 0.2$ 。由于对称性, 取 1/8 立方柱进行计算, 三种网格离散方案见图 1, $K^0 = 2p_0\sqrt{a/\pi}$ 。图 2 为内埋圆片状裂纹三种网格离散收敛性考核, 由图可见, 随着裂纹区网格的细分, 动态应力强度因子 DSIF 的精度提高。图 3 为取网格 3 时本文计算的内埋圆片状裂纹的量纲一的动态应力强度因子, 与现有文献的比较可见, 结果比较一致。

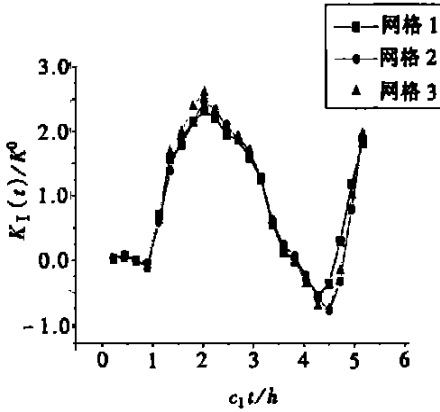


图 2 内埋圆片状裂纹三种网络离散收敛性考核

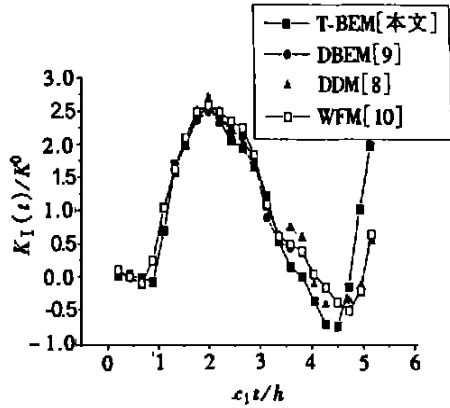


图 3 内埋圆片状裂纹的量纲一的动态应力强度因子

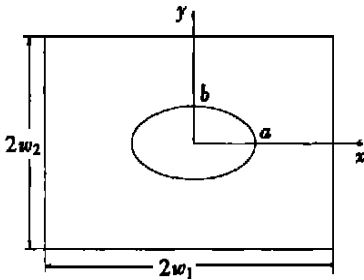


图 4 含内埋椭圆片状裂纹的立方柱的剖面

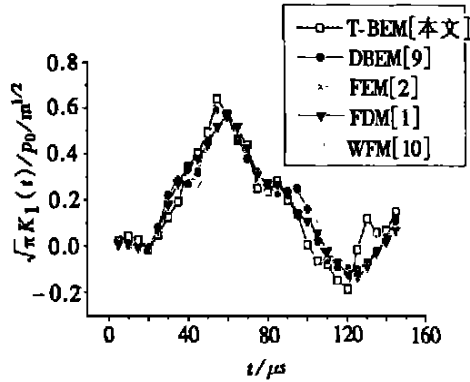


图 5 内埋椭圆片状裂纹的动态应力强度因子

例 2 突加荷载 $p(t) = p_0H(t)$ 作用下内埋椭圆片状裂纹的瞬态响应

对于外形类似于例 1, 尺寸为 $2w_1 \times 2w_2 \times 2h$ 的柱体内埋椭圆片状裂纹, 已知: $w_1/w_2 = 1.5$, $h/w_1 = 5/3$, a 和 b 是椭圆的主轴, $a/w_1 = 3.5/9$, $b/w_2 = 2/9$, $h = 15\text{cm}$; 体积模量 $K = 165\text{GPa}$, 剪切模量 $G = 77\text{GPa}$, 密度 $\rho = 7.9 \times 10^3\text{kg/m}^3$; 柱的两端受荷载 $p_0H(t)$ 的作用, 取 $\Delta T = 5.0\mu\text{s}$ 。短轴处的动态应力强度因子 $\sqrt{\pi}K_I(t)/p_0$ 见图 5。与现有文献的结果比较可

见,最大误差小于 10%,峰值误差小于 7%,结果比较一致。

例 3 突加载荷 $p(t) = p_0H(t)$ 作用下半圆表面裂纹的瞬态响应

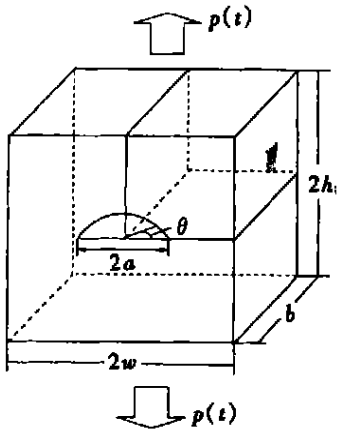


图 6 含表面圆片状裂纹的立方柱

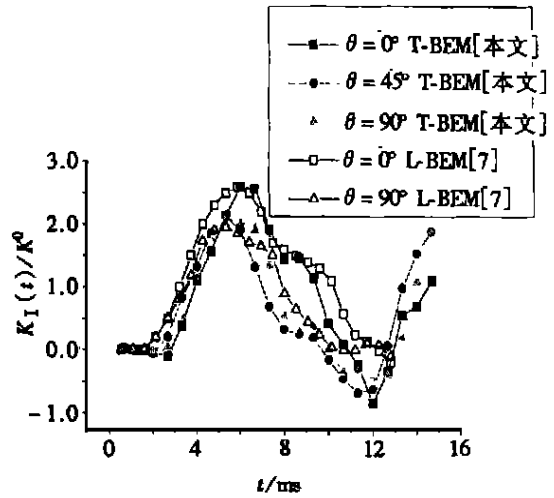


图 7 半圆表面裂纹的量纲一的动态应力强度因子的

材料常数和几何参数为:弹性模量 $E = 10^5 \text{ N/m}^2$,泊松比 $\nu = 0.3$,质量密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$;板宽 $2w = 6.0 \text{ cm}$,高 $2h = 6.0 \text{ cm}$,厚 $b = 2.5 \text{ cm}$,裂纹半径 $a = 1.0 \text{ cm}$,载荷 $p_0 = 100 \text{ N/m}^2$,时间步长 $\Delta T = 0.000667 \text{ s}$, $K^0 = 2p_0 \sqrt{a/\pi}$.无量纲的 DSIF 见图 7,本文结果与文[7]比较吻合。

5 结 论

本文实现了时域边界元法在分析三维裂纹体中 DSIF 方面的应用。在数值实施时,空间采用二次等参元插值,时间采用线性插值,提出并讨论了时间步长的选取方案。采用了等参单元及其奇性元很好地模拟了三维裂纹应力场的奇异性,用位移计算了这类裂纹的 DSIF。几个考题说明了,在三维弹性动力学和二维动态断裂问题中被广泛采用的时域边界元法在三维动态断裂问题中同样得到很好的精度。此外,由于时间步算法的递增性质,可以把此法进一步发展应用到非线性领域。

[参 考 文 献]

- [1] Chen Y M, Wilkins M L. Numerical analysis of dynamic crack problems[A]. In: G C Sih Ed. Mechanics of Fracture, Volume 4[C]. Leyden: Noordhoff, 1977.
- [2] Nishioka T. Recent developments in computational dynamic fracture mechanics[A]. In: M H Aliabadi Ed. Dynamic Fracture Mechanics [C]. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1995.
- [3] Brebbia C A, Telles J C F, Wrobel L C. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [4] Beskos D E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986_1996) [J]. Appl Mech Rev. 1997, 50(3): 149—197.
- [5] Aliabadi M H. Boundary element formulations in fracture mechanics[J]. Appl Mech Rev, 1997, 50(2): 83—96.
- [6] Sladek J, Sladek V. Dynamic stress intensity factors studied by boundary integro-differential equa-

- tions[J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1986, **23**(5): 919—928.
- [7] Zhang Y Y, Shi W. Transient analysis of three_dimensional crack problems by the Laplace transform boundary element method[J]. *Engng Fracture Mech*, 1994, **47**(5): 715—722.
- [8] Wen P H. *Dynamic Fracture Mechanics: Displacement Discontinuity Method* [M]. Southampton, Boston: Comput Mech Publication, 1996.
- [9] Fedelinski P, Aliabadi M H, Rooke D P. Cracks in three dimensions: dynamic dual boundary element analysis[J]. *Comput Methods in Appl Mech Engng*, 1998, **167**(1_2): 139—151.
- [10] Wen P H, Aliabadi M H, Rooke D P. A variational technique for boundary element analysis of 3D fracture mechanics weight functions: Dynamic[J]. *Int J Numer Meth Engng*, 1998, **42**(8): 1425—1439.
- [11] Hirose S, Adenbach J D. Time_domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack[J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1989, **28**(1_3): 629—644.
- [12] Dominguez J, Gallego R. Time domain boundary element method for dynamic intensity factor computations[J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1992, **33**(3): 635—647.
- [13] Dominguez J. *Boundary Elements in Dynamics* [M]. Southampton: Comput Mech Publication, 1993.
- [14] Ahmad S, Banerjee P K. Time_domain transient elastodynamic analysis of 3_D solids by BEM[J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1988, **26**(8): 1709—1728.
- [15] Eringen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics, Vol 2, Linear theory* [M]. New York Academic Press, 1975.
- [16] Banerjee P K, Ahmad S, Manolis G D. Transient elastodynamic analysis of 3_D problems by boundary element method[J]. *Earthquake Engng Struct Dyn*, 1986, **14**(6): 933—949.
- [17] Dominguez J, Gallego R. The time domain boundary element method for elastodynamic problems [J]. *Math Comput Modell*, 1991, **15**(3_5): 119—129.
- [18] Luo G M, Zhang Y Y. Application of BEM with singular and isoparametric elements in 3_D crack problems[J]. *Engng Fracture Mech*, 1988, **29**(1): 97—106.

The Analysis of Dynamic Stress Intensity Factor for Semi_Circular Surface Crack Using Time_Domain BEM Formulation

ZHONG Ming, ZHANG Yong_yuan

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: The time_domain BEM was developed to analyze the dynamic stress intensity factor (DSIF) of 3_D elastodynamic crack problems. To simulate the stress singularity along the front of a crack, eight_node isoparametric singular elements were used, and the DSIF for a semi_circular surface crack was firstly calculated based on displacement equation using the time_domain BEM formulation. The new scheme to determine the time step was brought forward. By the dynamic analysis program of time_domain BEM compiled by us, several numerical examples are presented, which demonstrate the unconditional stability and high accuracy of time_domain BEM applied to 3_D elastodynamic crack problems.

Key words: time_domain BEM; 3_D elastodynamic crack problems; dynamic stress intensity factor