应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 11_1177_04

关于一致光滑 Banach 空间中的 Ishikawa 迭代*

黄震宇

(南京大学 数学系, 南京 210093)

(协平推荐)

摘要: 设 E 为一致光滑 Banach 空间, K 为 E 的非空闭凸子集, $T: K \to K$ 为具有有界值域的连续 Φ_强伪压缩算子• 使用新的分析技巧证明了在非常普遍的条件下, Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点 x^*• 改进和扩展了近期许多相关的结果•

关 键 词: Ishikawa 迭代; Φ_强伪压缩算子; 一致光滑 Banach 空间
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

设 E 为一致光滑 Banach 空间, K 为 E 的非空闭凸子集, $T: K \to K$ 为连续 Φ_强伪压缩算子• 记 E^* 为 E 的对偶空间•

正规对偶影射 $J: E \to 2^{E^*}$ 定义为

$$J(x) = \left\{ f \in E^*: \langle x, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \right\}• \tag{1}$$

若 E 为一致光滑 Banach 空间, 则 J 在 E 的任何有界集上是一致连续的•

Φ_强伪压缩算子 $T: K \to K$ 定义为

$$\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \leqslant \|x - y\|^2 - \Phi(\|x - y\|)\|x - y\| \quad (\forall x, y \in K), \tag{2}$$

其中 $\Phi(s)$ 为严格单调递增函数, $\Phi(0) = 0$• 特别地, 若 $\Phi(s) = ks$, $k \in (0, 1)$, 则 T 就是[1]、[2] 中的强伪压缩算子•

引理 1[1] 设 E 为一致光滑 Banach 空间, $J(x)$ 为正规对偶影射, 则 $\forall x, y \in E$, 有

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y) \rangle \quad (\forall j(x + y) \in J(x + y))• \tag{3}$$

最近, 周海云(参见文献[2] 定理) 证明了一致光滑 Banach 空间中当 T 为连续强伪压缩算子时, Iskikawa 迭代序列强收敛于其唯一的不动点• 与此同时, 丁协平教授(参见文献[3] 定理 3.2) 证明了在任意 Banach 空间中当 T 为 Lipschitz 连续 Φ_强伪压缩算子时, Ishikawa 迭代序列强收敛于其唯一的不动点• 在 1999 年, 周海云(参见文献[4] 定理 2.2) 证明了一致光滑 Banach 空间中当 T 为一致连续 Φ_强伪压缩算子且 $\{x_n\}$ 有界时, Ishikawa 迭代序列强收敛于其唯一的不动点• 在 1998 年, 本人(参见文献[5] 定理 1) 证明了对参数 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 要求较多且 T

* 收稿日期: 1999_06_08; 修订日期: 2001_03_20
基金项目: 国家自然科学基金(青年基金) 资助项目(19801017); 教育部骨干教师资助项目
作者简介: 黄震宇(1968—), 男, 江苏无锡人, 博士, 副教授, 该国家自然科学基金项目主持人(E_mail: Sunhome@jlonline.com).

为连续 Φ_强伪压缩算子时的强收敛性• 本文将作用新的技巧来证明以下定理:

定理 设 E 为一致光滑 Banach 空间, $K\subseteq E$ 为非空闭凸子集, $T: K\to K$ 为具有有界值域的连续 Φ_强伪压缩算子, 且 T 在 K 中存在不动点 x^*• 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 满足下列条件:

$$0\leqslant\alpha_n,\beta_n<1,\ \forall n\geqslant 1;\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty;\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\beta_n=0\tag{4}$$

$\forall x_1\in K$, 定义 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n\quad(n\geqslant 1),\quad y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n(n\geqslant 1),\tag{5}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点 x^*•

证 由文献[5]知, 不动点 $x^*\in K$ 是 T 在 K 中的唯一不动点• 由数学归纳法知, 序列 $\{x_n-x^*\}$, $\{y_n-x^*\}$ 和 $\{Ty_n-Tx^*\}$ 都是 K 中的有界集合• 令

$$M=\sup\{\|Tx-Ty\|: x,y\in K\}+\sup\{\|x_n-x^*\|: n\geqslant 1\}+\sup\{\|y_n-x^*\|: n\geqslant 1\}•$$

显然 $M<+\infty$• 由引理 1, 有

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\|x_n-x^*\|^2+M^2\alpha_n^2+2e_n\alpha_n+4M^2\beta_n\alpha_n-2\alpha_n\phi(\|y_n-x^*\|)\|y_n-x^*\|,\tag{6}$$

其中 $e_n=\langle Ty_n-Tx^*, j(x_{n+1}-x^*)-j(y_n-x^*)\rangle$•

注意到当 $n\to+\infty$ 时,

$$(x_{n+1}-x^*)-(y_n-x^*)=x_{n+1}-y_n=\beta_n x_n-\alpha_n x_n+\alpha_n Ty_n-\beta_n Tx_n\to 0,$$

且 E 为一致光滑 Banach 空间, 则 J 在 E 的任何有界集上是一致连续的, 于是有

$$\|j(x_{n+1}-x^*)-j(y_n-x^*)\|\to 0,$$

故 $\lim_{n\to\infty}e_n=0$• 令 $\lambda_n=M^2\alpha_n+2e_n+4M^2\beta_n$• 显然 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$• 由(6)知

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\|x_n-x^*\|^2+\lambda_n\alpha_n-2\alpha_n\phi(\|y_n-x^*\|)\|y_n-x^*\|\leqslant\tag{7}$$

$$\|x_n-x^*\|^2+\alpha_n[\lambda_n-\phi(\|y_n-x^*\|)\|y_n-x^*\|]-\alpha_n\phi(\|y_n-x^*\|)\|y_n-x^*\|•\tag{8}$$

下面我们分两步来证明:

第一步• 证明 $\inf\{\|y_n-x^*\|: n\geqslant 1\}=0$•

(反证法) 假设存在某个常数 $\delta>0$ 使得 $\inf\{\|y_n-x^*\|: n\geqslant 1\}=\delta>0$• 即 $\forall n\geqslant 1$, $\|y_n-x^*\|\geqslant\delta>0$• 由 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$ 知, 存在某个自然数 N_1, 使得当自然数 $n\geqslant N_1$ 时, 有 $\lambda_n-\phi(\|y_n-x^*\|)\|y_n-x^*\|\leqslant 0$, 从而由(8)式, $\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\|x_n-x^*\|^2-\alpha_n\phi(\|y_n-x^*\|)\|y_n-x^*\|$, 于是

$$\phi(\delta)\delta\sum_{n=N_1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=N_1}^{\infty}[\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2]<+\infty,$$

此与条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 矛盾•

第二步• 由数学归纳法证明 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=0$•

由著名的 Weierstrass_Bolzano 定理, 我们从第一步结果知: 序列 $\{y_n-x^*\}$ 存在一个子序列 $\{y_{n_j}-x^*\}$ 使得 $\lim_{j\to\infty}\|y_{n_j}-x^*\|=0$• 注意到 $\lim_{j\to\infty}\|y_{n_j}-x_{n_j}\|=0$, 所以 $\lim_{j\to\infty}\|x_{n_j}-x^*\|=0$• 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists j_0$, 当 $j\geqslant j_0$ 时, $\|x_{n_j}-x^*\|<\varepsilon$• 再注意到 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$,

于是存在某个自然数 $N_0 \geqslant n_{j_0}, j \geqslant j_0$, 使得当 $n \geqslant N_0$ 时, 有

$$0 \leqslant \alpha_n < \varepsilon/8M, \quad 0 \leqslant \beta_n < \varepsilon/8M, \quad 0 \leqslant \lambda_n < \phi\left(\varepsilon/2\right) \varepsilon.$$

下面用数学归纳法证明:

当 $j \geqslant j_0$ 时, 对于任意的自然数 $m \geqslant 1$, 必有 $\|x_{n_j+m} - x^*\| < \varepsilon$.

(反证法) 假设当 $m = 1$ 时, $\|x_{n_j+1} - x^*\| \geqslant \varepsilon$. 由

$$\|x_{n_j} - x^*\| \geqslant \|x_{n_j+1} - x^*\| - \alpha_{n_j}\|Ty_{n_j} - x_{n_j}\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{8M}2M = \frac{3\varepsilon}{4} > 0,$$

$$\|y_{n_j} - x^*\| \geqslant \|x_{n_j} - x^*\| - \beta_{n_j}\|Tx_{n_j} - x_{n_j}\| > \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8M}2M = \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

于是

$$\varepsilon^2 \leqslant \|x_{n_j+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_{n_j} - x^*\|^2 + \lambda_{n_j}\alpha_{n_j} - 2\alpha_{n_j}\phi(\|y_{n_j} - x^*\|)\|y_{n_j} - x^*\| <$$
$$\varepsilon^2 + \alpha_{n_j}\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon - 2\alpha_{n_j}\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon^2,$$

矛盾.

假设当 $m = k$ 时有 $\|x_{n_j+k} - x^*\| \leqslant \varepsilon$ 成立.

同理, 我们将证明当 $m = k + 1$ 时必有 $\|x_{n_j+k+1} - x^*\| < \varepsilon$ 成立.

(反证法) 假设 $\|x_{n_j+k+1} - x^*\| \geqslant \varepsilon$. 那么

$$\|x_{n_j+k} - x^*\| \geqslant \|x_{n_j+k+1} - x^*\| - \alpha_{n_j+k}\|Ty_{n_j+k} - x_{n_j+k}\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{8M}2M = \frac{3\varepsilon}{4} > 0,$$

于是

$$\|y_{n_j+k} - x^*\| \geqslant \|x_{n_j+k} - x^*\| - \beta_{n_j+k}\|Tx_{n_j+k} - x_{n_j+k}\| > \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8M}2M = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

因此

$$\varepsilon^2 \leqslant \|x_{n_j+k+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_{n_j+k} - x^*\|^2 + \alpha_{n_j+k}\lambda_{n_j+k} -$$
$$\alpha_{n_j+k}\phi(\|y_{n_j+k} - x^*\|)\|y_{n_j+k} - x^*\| <$$
$$\varepsilon^2 + \alpha_{n_j+k}\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2} - \alpha_{n_j+k}\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon^2,$$

产生矛盾. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| = 0$. 证毕.

注 1　本文的定理将文献[5]定理 1 对参数 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 的要求扩展到非常普遍的情形. (文献[5] 中参数要求为:

$$0 \leqslant \alpha_n, \quad \beta_n < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n b(\alpha_n) < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n) = +\infty,$$

其中函数 $b: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是由 Reich[6] 提出的非减连续函数并满足 $\lim\limits_{n\to\infty} b(t) = 0$, $b(ct) \leqslant cb(t)$, $\forall c \geqslant 1, t > 0$.) 很明显, 条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n b(\alpha_n) < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n) = +\infty$$

要比条件

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = +\infty$$

强得多, 且在某些意义上讲, 原条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n b(\alpha_n) < +\infty$ 与所在 Banach 空间的几何性质有关, 而本文条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ 很弱, 与所在空间的几何性质无关. 同时本文将文献[1]、[2]、[7] 定理推广到更一般的 Φ_强伪压缩算子类, 并且取消了两个限制条件: "K 为有界子集", "$0 \leqslant \alpha_n < \beta_n$". 进一步地, 本文取消了文献[4, 定理 2.2] 的两

个限制条件:“ T 的一致连续性” 和“$\{x_n\}$ 的有界性”•

注2 进一步地, 对于含有误差项的 Ishikawa 不动点迭代序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n + u_n,\ n \geqslant 1;\qquad y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n + v_n,\ n \geqslant 1,$

其中 $\|u_n\| = o(\alpha_n)$, $\|v_n\| \to 0(n \to \infty)$, 我们可以利用同样的方法证明含有误差项的 Ishikawa 不动点迭代序列也强收敛于 Φ_强伪压缩算子T 的唯一不动点• 这个结果将文献[1]、[2]、[8]、[7] 推广到更一般的 Φ_强伪压缩算子类, 同时将文献[5] 定理 1 对参数$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 的要求扩展为一般的情形•

注3 对于任意 Banach 空间中 Φ_强伪压缩算子 Ishikawa 迭代序列的强收敛性, 还有待进一步的深入研究• 在以后的研究中, 我们将设法把文献[3]的好结果推广到更一般的情形•

致谢 作者感谢审稿人对本文提出的宝贵建议•

[参 考 文 献]

[1] ZHOU Hai_yun, Jia Y T. Approximation of fixed points of strongly pseudocontractive maps without Lipschitz assumption[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**(6): 1705—1709.

[2] ZHOU Hai_yun. A remark of Ishikawa iteration[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**(8): 631—633.

[3] DING Xie_ping. Iterative process with errors to nonlinear Φ_strongly accretive operator equations in arbitrary Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 1997, **33**(8): 75—82.

[4] 周海云, Banach 空间中含强增生算子的非线性方程的迭代解[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(3): 269—276.

[5] HUANG Zhen_yu. Approximating fixed points of Φ_hemicontractive mappings by the Ishikawa iteration process with errors in uniformly smooth Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 1998, **36**(2): 13—21.

[6] Reich S. An iterstive procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1978, **2**(1): 85—92.

[7] DIND Xie_ping. Iterative process with errors to locally strictly psendocontractive maps in Banach spaces[J]. Comput Math Appl, 1996, **32**(10): 91—97.

[8] 薛志群, 周海云. 值域有界的一类非线性算子不动点的带误差迭代逼近[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(1): 93—98.

Ishikawa Iterative Process in Uniformly Smooth Banach Spaces

HUANG Zhen_yu

(Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P R China)

Abstract: Let E be a uniformly smooth Banach space, K be a nonempty closed convex subset of E, and suppose: $T: K \to K$ is a continuous Φ_strongly pseudocontractive operator with a bounded range. Using a new analytical method, under general cases, the Ishikawa iterative process $\{x_n\}$ converges strongly to the unique fixed point x^* of the operator T were proved. The paper generalizes and extends a lot of recent corresponding results.

Key words: Ishikawa iterative process; Φ_stongly pseudocontractive operators; uniformly smooth Banach spaces