应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 11_1147_06

一类四阶非自治微分方程解的有界和一致有界性*

西密尔•通兹

(玉珍翠延大学 教育学院, 65080, 凡城, 土尔其)

(钱伟长推荐)

摘要: 获得了一个四阶非线性微分方程的所有解是有界和一致有界的充分条件•

关 键 词: 四阶微分方程; Liapunov 函数; 有界; 一致有界
中图分类号: 175. 14 文献标识码: A

引 言

自从 Liapunov[1] 提出现在被通称为 Liapunov 第二方法或直接方法的著名的运动稳定性理论以来, 寻求一类三阶和四阶非线性微分方程的所有解有界和一致有界的充分条件问题已经引起人们越来越多的关注• Reissig, Sansone 和 Conti 在文[2] 中对取得的部分成果进行了总结和综述• 而最近在这方面的工作有 Abou_El_Ela 和 Sadek[3], Hara[4] Jin Jun[5], Sadek[6] 以及 Tung[7]、[8]、[9] 等人的文章• 本文的目的是推广和改进 Jin Jun[5] 研究如下方程(组) 所获得的结果:

$$x^{(4)} + a(t, x, \dot x, \ddot x)\dddot x + b\ddot x + c\dot x + dx = p(t, x, \dot x, \ddot x, \dddot x),$$
$$x^{(4)} + \dddot x + b(t, x, \dot x, \ddot x) + c\dot x + dx = p(t, x, \dot x, \ddot x, \dddot x),$$
$$x^{(4)} + \dddot x + b\ddot x + g(t, x, \dot x) + dx = p(t, x, \dot x, \ddot x, \dddot x)•$$

更为确切地说, 本文研究了如下的一个与上不同的四阶微分方程

$$x^{(4)} + \varphi(t, x, \dot x, \ddot x, \dddot x)\dddot x + f(t, x, \dot x, \ddot x) + g(t, x, \dot x) + dx = p(t, x, \dot x, \ddot x, \dddot x) \tag{1}$$

或它的等价形式

$$\begin{aligned} &\dot x = y, \quad \dot y = z, \quad \dot z = u, \\ &\dot u = -\varphi(t, x, y, z, u)u - f(t, x, y, z) - g(t, x, y) - dx + p(t, x, y, z, u), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 d 是常数, 函数 φ, f, g 和 p 只依赖于所显示的各个变量• “•” 表示对时间 t 的导数• 函数 φ, f, g 和 p 对所有变量是连续的• 导函数

$$\frac{\partial \varphi(t, x, y, z, u)}{\partial t} \equiv \varphi_t(t, x, y, z, u), \quad \frac{\partial \varphi(t, x, y, z, u)}{\partial x} \equiv \varphi_x(t, x, y, z, u),$$

* 收稿日期: 2000_11_13; 修订日期: 2001_04_08

$$\frac{\partial\varphi(t,x,y,z,u)}{\partial y}\equiv\varphi_y(t,x,y,z,u),\quad \frac{\partial\varphi(t,x,y,z,u)}{\partial u}\equiv\varphi_u(t,x,y,z,u),$$
$$\frac{\partial g(t,x,y)}{\partial t}\equiv g_t(t,x,y),\quad \frac{\partial g(t,x,y)}{\partial x}\equiv g_x(t,x,y)$$

存在且连续•

首先我们叙述一下证明过程中用到的引理•

考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=H(t,\boldsymbol{x}),\tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $H(t,\boldsymbol{x})$ 在区域 Ω: $I(0\leqslant t<+\infty)\times E_x^n(\|\boldsymbol{x}\|<+\infty)$ 上是连续的•

引理 1 假设存在一个定义在 Ω^*: $I(0\leqslant t<+\infty)\times E_R^n(\|\boldsymbol{x}\|>R)$ 上的正的连续可微函数 $V(t,\boldsymbol{x})$, 当 $\|x\|\to+\infty$ 时, $V(t,\boldsymbol{x})$ 关于 t 一致趋于无穷, 且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial t}+H(t,\boldsymbol{x})\operatorname{grad}V\leqslant G(V,t)•\tag{4}$$

若方程(4) 在 $t(\geqslant 0)$ 上没有无界的正解, 那么方程(3) 的所有解都是有界的•

特别地, 若 $G(V,t)=k(t)L(V)$, 这里 $k(t)$ 关于 t 是连续的, $\int^{+\infty}k(t)\mathrm{d}t$ 是收敛的, $V\geqslant 0$ 时 $L(V)$ 是正的连续函数, $\int^{+\infty}\frac{1}{L(V)}\mathrm{d}V=+\infty$ 那么方程(4) 对所有的 t 没有无界的正解(参看 Lasalle 和 Lefschetz[10])•

下面的引理 2 是很有名的(参看 Yoshizawa[11])•

引理 2 假设存在一个定义在 Ω^*: $I(0\leqslant t<+\infty)\times E_R^n(\|\boldsymbol{x}\|>R)$ 上的正的连续可微函数 $V(t,x)$, 满足以下条件:

i) $a(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant b(\|\boldsymbol{x}\|)$, 这里 $a(r)\in CI$(一族连续的增函数), $a(r)\to\infty$ 当 $r\to\infty$ 且 $b(r)\in CI$;

ii) $\dot{V}_{(3)}(t,\boldsymbol{x})\leqslant 0$,

那么方程(3) 的所有解都是一致有界的•

1 结论与证明

现在我们来考察(2) 解的有界性与一致有界性•

定理 1 除了关于函数 φ, f, g, h 和 p 的基本假设之外, 假定存在正的常数 a, b, c, d, A, D 和 δ 使得以下条件被满足:

i) $bc\varphi(t,x,y,z,u)-d\varphi^2(t,x,y,z,u)-c^2\geqslant\delta$ (对所有 t,x,y,z 和 u)

ii) $\varphi_t(t,x,y,z,0)+y\varphi_x(t,x,y,z,0)+z\varphi_y(t,x,y,z,0)-z\varphi_u(t,x,y,z,0)\leqslant 0$, (对所有 t,x,y 和 z)

iii) $g(t,x,0)=0$, $0\leqslant\frac{g(t,x,y)}{y}-c\leqslant\frac{\delta\sqrt{D}}{a\sqrt{A}}$, 和

$\frac{1}{y}\int_0^y g_x(t,x,\eta)\mathrm{d}\eta\leqslant\left(\frac{3b^2\delta D}{4a^2A}\right)$, (对所有 t,x, 和 $y\neq 0$ 及 $yg_t(t,x,y)\leqslant 0$ 对所有 t, x 和 y);

iv) $0\leqslant\frac{f(t,x,y,z)}{z}-b\leqslant\min\left\{\frac{\delta}{2b^2},\frac{b^2c^2\delta D}{8a^2d^2A}\right\}$ (对所有 t,x,y 和 $z\neq 0$);

v) 函数 $p(t, x, y, z, u)$ 满足 $|p(t, x, y, z, u)| \leqslant P(t)(x^2+y^2+z^2+u^2)^{1/2}$, 这里 $P(t)$ 是一个连续的非负函数并且 $\int_0^\infty P(t)\mathrm{d}t < +\infty$.

则(2)的所有解是有界的.

定理 2 假定以下条件被满足:

i) 定理 1 中条件成立;

ii) $\dfrac{rP(t)V}{\varepsilon} - \left(\dfrac{\delta}{c}\right)u^2 \leqslant 0$, 这里 ε 和 r 是证明过程中待定的正的常数.

则(2)的所有解是一致有界的.

2 Liapunov 函数 $V(t, x, y, z, u)$

定理的证明取决于一个可微的 Liapunov 标量函数 $V(t, x, y, z, u)$. 这个函数以及它的对时间的导数满足一些基本的不等式. 函数 $V(t, x, y, z, u)$ 是如下定义的:

$$2V = (2b)[bu + cz + 2dy]^2 + (b^2)[bz + cy + 2dx]^2 + (b^2 - 4d)[bz + cy]^2 +$$
$$(2d)\lceil(b^2 - 4d)b + 2c^2\rfloor y^2 + 4(bc)\int_0^z [b\varphi(t, x, y, \zeta, 0) - c]\zeta\mathrm{d}\zeta +$$
$$(4b^2c)\int_0^y [g(t, x, \eta) - c\eta]\mathrm{d}\eta. \tag{5}$$

3 定理 1 的证明

由 i) 我们得到: 对所有的 t, x, y 和 z 有

$$b^2 - 4d > 0, \quad b\varphi(t, x, y, z, 0) - c > 0.$$

既然由 i) 有 $\varphi(t, x, y, z, 0) < \left(\dfrac{bc}{d}\right)$ 那么就有

$$0 \leqslant \int_0^z [b\varphi(t, x, y, \zeta, 0) - c]\zeta\mathrm{d}\zeta \leqslant \left[\frac{c(b^2 - d)}{2d}\right]z^2. \tag{6}$$

由 iii), 我们有

$$0 \leqslant \int_0^y [g(t, x, \eta) - c\eta]\mathrm{d}\eta = \int_0^y \left[\frac{g(t, x, \eta)}{\eta} - c\right]\eta\mathrm{d}\eta \leqslant \left(\frac{\delta\sqrt{D}}{2a\sqrt{A}}\right)y^2. \tag{7}$$

然后, 将估计式(6), (7) 代入(5) 式, 我们得到

$$2V \geqslant (2b)[bu + cz + 2dy]^2 + (b^2)[bz + cy + 2dx]^2 + (b^2 - 4d)[bz + cy]^2 +$$
$$(2d)\lceil(b^2 - 4d)b + 2c^2\rfloor y^2. \tag{8}$$

从(8) 知, 存在正的常数 $D_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 得

$$V(t, x, y, z, u) \geqslant D_1x^2 + D_2y^2 + D_3z^2 + D_4u^2 \geqslant$$
$$\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2 + u^2),$$

这里 $\varepsilon = \min\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

设 (x, y, z, u) 是(2) 的任一解, 则 V 对 t 沿着这一解路径的全导数是

$$\dot{V} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t, x, y, z, u) = \frac{\partial V}{\partial x}y + \frac{\partial V}{\partial y}z + \frac{\partial V}{\partial z}u + \frac{\partial V}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial V}{\partial t} =$$
$$-(2b^2d)[2g(t, x, y)y - cy^2] - (2b^2)[b\varphi(t, x, y, z, u) - c]u^2 -$$
$$(4b^2d)\varphi(t, x, y, z, u)yu - (2b^3)[g(t, x, y)u - cyu] +$$

$$(2b^2c)\int_0^y g_t(t,x,\eta)\,d\eta + (2b^2c)y\int_0^y g_x(t,x,\eta)\,d\eta -$$
$$(2b^3)[f(t,x,y,z)u - bzu] - (2b^2c)[f(t,x,y,z)z - bz^2] -$$
$$(4b^2d)[f(t,x,y,z)y - byz] - (2b^2c)[\varphi(t,x,y,z,u) -$$
$$\varphi(t,x,y,z,0)]zu + (2b^2c)\int_0^z[\varphi_t(t,x,y,\zeta,0)]\zeta\,d\zeta +$$
$$(2b^2c)y\int_0^z[\varphi_x(t,x,y,\zeta,0)]\zeta\,d\zeta + (2b^2c)z\int_0^z[\varphi_y(t,x,y,\zeta,0)]\zeta\,d\zeta +$$
$$(2b^2)[2dy + cz + bu]p(t,x,y,z,u)\cdot \tag{9}$$

现在我们考虑(9)式中的项

$$(2b^2c)[\varphi(t,x,y,z,u) - \varphi(t,x,y,z,0)]zu\cdot$$

应用微分中值定理, 我们有

$$(2b^2c)[\varphi(t,x,y,z,u) - \varphi(t,x,y,z,0)]zu =$$
$$(2b^2c)\left[\frac{\varphi(t,x,y,z,u) - \varphi(t,x,y,z,0)}{u}\right]zu^2 =$$
$$(2b^2c)zu^2\varphi_u(t,x,y,z,\theta u) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)\cdot \tag{10}$$

由条件 ii), iii) 和(10)

$$\dot{V} \leqslant -(2b^2cd)y^2 - (2b^2)[b\varphi(t,x,y,z,u) - c]u^2 - (4b^2d)\varphi(t,x,y,z,u)yu -$$
$$(2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y} - c\right]yu - (2b^3)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]zu -$$
$$(2b^2c)\left[\frac{f(t-x,y,z)}{z} - b\right]z^2 - (4b^2d)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]yz +$$
$$(2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x(t,x,\eta)\,d\eta\right] + (2b^2)[2dy + cz + bu]p(t,x,y,z,u)\cdot \tag{11}$$

应用条件 iv), 通过类似的估计, 我们得到

$$(2b^2c)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]z^2 + (2b^3)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]zu +$$
$$(4b^2d)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]yz =$$
$$(b^2)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]\left[\sqrt{c}z + \frac{b}{\sqrt{c}}u\right]^2 +$$
$$(b^2)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]\left[\sqrt{c}z + \frac{2d}{\sqrt{c}}y\right]^2 -$$
$$\left(\frac{b^4}{c}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]u^2 - \left(\frac{4b^2d^2}{c}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]y^2 \geqslant$$
$$-\left(\frac{b^4}{c}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]u^2 - \left(\frac{4b^2d^2}{c}\right)\left[\frac{f(t,x,y,z)}{z} - b\right]y^2 \geqslant$$
$$-\left(\frac{b^4}{c}\right)\left(\frac{\delta}{2b^2}\right)u^2 - \left(\frac{4b^2d^2}{c}\right)\left(\frac{\delta b^2c^2D}{8a^2d^2A}\right)y^2 =$$
$$-\left(\frac{\delta b^2}{2c}\right)u^2 - \left(\frac{\delta b^4cD}{2a^2A}\right)y^2\cdot \tag{12}$$

考察表达式

$$\left(\frac{\delta b^2}{c}\right)u^2 + (2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y} - c\right]yu - (2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x(t,x,\eta)\,d\eta\right]\cdot$$

由 iii) 我们可得

$$\left(\frac{\delta b^2}{c}\right)u^2+(2b^3)\left[\frac{g(t,x,y)}{y}-c\right]yu-(2b^2c)y^2\left[\frac{1}{y}\int_0^y g_x(t,x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\geqslant$$

$$\left(\frac{\delta b^2}{c}\right)u^2-\left[\frac{(2b^3\delta)\sqrt{D}}{a\sqrt{A}}\right]|yu|+\left(\frac{3b^4c\delta D}{2a^2A}\right)y^2=$$

$$\left(\frac{\delta b^2}{c}\right)\left[u+\frac{(bc)\sqrt{D}}{a\sqrt{A}}y\right]^2+\left(\frac{b^4c\delta D}{2a^2A}\right)y^2\geqslant\left(\frac{b^4c\delta D}{2a^2A}\right)y^2,$$

或

$$=\left(\frac{\delta b^2}{c}\right)\left[u-\frac{(bc)\sqrt{D}}{a\sqrt{A}}y\right]^2+\left(\frac{b^4c\delta D}{2a^2A}\right)y^2\geqslant\left(\frac{b^4c\delta D}{2a^2A}\right)y^2. \tag{13}$$

进一步有

$$(b^2cd)y^2+(b^2)[b\varphi(t,x,y,z,u)-c]u^2+(2b^2d)yu\varphi(t,x,y,z,u)=$$

$$\left(\frac{b^2d}{c}\right)[cy+\varphi(t,x,y,z,u)u]^2+\left(\frac{b^2}{c}\right)[bc\varphi(t,x,y,z,u)-$$

$$d\varphi^2(t,x,y,z,u)-c^2]\geqslant\left(\frac{b^2\delta}{c}\right)u^2. \tag{14}$$

将估计式(12)~(14)代入(11)式,考虑到 $|p(t,x,y,z,u)|\leqslant P(t)(x^2+y^2+z^2+u^2)^{1/2}$ 我们得到

$$\dot{V}\leqslant-\left(\frac{b^2\delta}{c}\right)u^2+(2b^2)[2dy+cz+bu]p(t,x,y,z,u)\leqslant-\left(\frac{b^2\delta}{c}\right)u^2+$$

$$(2b^2)[b^2+c^2+4d^2]^{1/2}[y^2+z^2+u^2]^{1/2}[x^2+y^2+z^2+u^2]^{1/2}P(t)\leqslant$$

$$(b^2)\left[-\left(\frac{\delta}{c}\right)u^2+rP(t)(x^2+y^2+z^2+u^2)\right]\leqslant$$

$$(b^2)\left[-\left(\frac{\delta}{c}\right)u^2+\frac{rP(t)V}{\varepsilon}\right]\leqslant\frac{b^2rP(t)V}{\varepsilon}=G(V,t),$$

这里 $r=2[b^2+c^2+4d^2]^{1/2}$.

显然,函数 V 满足引理 1 的全部条件, 因此(2) 的所有解都是有界的. 证毕.

4 定理 2 的证明

利用类似于定理 1 的证明过程中的方法, 可以证明由(5)定义的函数满足引理 2 的全部条件. 因此(2)的所有解都是一致有界的. 这就证明了定理 2.

注记 我们的结果包括了[5]和[9]中的一结结论. 另外,我们给定的条件远弱于[5, 定理 1, 定理 2]的条件.

[参 考 文 献]

[1] Liapunov A M. Stability of Motion[M]. London: Academic Press, 1966.

[2] Reissig R, Sansone G, Conti R. Nonlinear Differential Equations of Higher Order[M]. Noordhoff International Publishing, 1974.

[3] Abou_El_Ela A M A, Sadek A I. On the asymptotic behaviour of solutions of some differential equations of the fourth order[J]. Ann Differential Equations, 1992, **8**(1): 1—12.

[4] Hara T. On the asymptotic behavior of the solutions of some third and fourth order non_autonomous differential equations[J]. Publ RIMS Kyoto Univ, 1974, **9**: 649—673.

[5] JIN Jun. On the uniform boundedness of the solution of the non_linear differential equation of the fourth order[J]. Ann Differential Equations, 1988, **4**(2): 159－171.
[6] Saded A I. On the asymptotic behaviour of solutions of certain fourth order ordinary differential equations[J]. Math Japon, 1997, **45**(3): 527－540.
[7] Tunç C. On the asymptotic behaviour of solutions of some differential equations of the fourth order [J]. Studia Univ Babes_Bolyai Math, 1994, **39**(2): 87－96.
[8] Tunç C. On the asymptotic behaviour of solutions of certain fourth order non_autonomous differential equations[J]. Studia Univ Babes_Bolyai Math, 1996, **41**(3): 95－105.
[9] Tunç C. On the uniform boundedness of solutions of some non_autonomous differential equations of the fourth order[J]. Appl Math Mech (English Ed), 1999, **20**(6): 622－628.
[10] Lasalle J, Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method With Applications [M]. New York: Academic Press, 1961.
[11] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method [Z]. The Mathematical Society of Japan, 1966.
[12] Ezeilo J O C. On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order[J]. J Math Anal Appl, 1962, **5**: 136－146.
[13] LU Ting_he, SHEN Jia_qi, JIN Jun. Construction and applications of Liapunov's functions for differential equations of fourth order[J]. Journal of Shanghai Teachers University, 1982, **11**(2).
[14] QIN Yuan_xun, WANG Lian, WANG Mu_qin. Theory and Application of Motion Stability [M]. Beijing: Science Press, 1981.
[15] SHEN Jia_qi, LU Ting_he, JIN Jun. The construction of Liapunov's function of certain fourth order differential equations[J]. Journal of Shanghai Teachers University, 1983, **12**(2).
[16] Yoshizawa T. Liapunov's function and boundedness of solutions[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1959, (2).

Boundedness and Uniform Boundedness Results for Certain Non_Autonomous Differential Equations of Fourth Order

Cemil Tunç
(Yüzüncü Yil University, Education Faculty, 65080, Van, Turkey)

Abstract: Sufficient conditions have been obtained so that all solutions of a different fourth order differential equation are bounded and uniformly bounded.

Key words: differential equation of fourth order; Liapunov function; boundedness; uniform boundedness