

文章编号: 1000-0887(2001) 11-1135_07

具有单边约束的基本分岔问题的新分岔模式*

吴志强, 陈予恕

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 含约束分岔是非线性动力系统周期解分岔研究中遇到的普遍问题, 然而现有的奇异性理论关于此类问题的结果还很少. 作为探讨和补充, 给出余维数不大于 3 的 10 种基本分岔在约束情况下的转迁集和摄动保持分岔图的计算结果. 可为约束分岔问题的研究提供直接利用的结果.

关键词: 约束分岔; 奇异性; 分岔图

中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

关于不含约束的分岔问题, 奇异性理论在 20 世纪 80 年代末已发展的比较完善. Golubitsky 和 Schaeffer 在其代表性著作^[1]中对此作了全面的总结.

尽管奇异性理论给出了研究分岔问题的系统的方法和思路, 但要用该理论对高余维分岔和多变量分岔问题进行严格的分析, 并不是件容易的事情. 为此, 陈予恕和 Langford^[2]提出了一种实用的奇异性方法, 即直接对分岔问题的有限截断(通常由近似方法得到)进行分析, 通过转迁集的计算可确定出有限次截断方程中的各种可能的分岔模式. 为奇异性理论的应用提供了一种可操作的方法.

在具有实际背景的非线性系统的分岔研究中, 常会遇到这样的问题: 分岔方程中的状态变量的变化往往受到限制(以下简称约束). 比如, 在研究周期解分岔时, 分岔方程的状态变量一般表示周期解的振幅, 因而其取值是非负的^[2]; 在非线性的化学反应系统的平衡态分岔问题时, 反应物浓度也不能取负值^[3].

对工程实际中普遍存在的约束分岔问题, 现有的奇异性理论没有现成的结论和方法可以利用. 本文的目的, 就是通过具体的计算考察约束对分岔问题奇异性分析的影响, 为寻找约束分岔问题奇异性分析方法提供启发. 本文给出的 10 种基本分岔问题的约束转迁集和约束分岔图的结果可供研究人员直接引用.

1 约束分岔问题的计算

本文要讨论的约束分岔问题:

* 收稿日期: 2000_07_18; 修订日期: 2001_03_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316); 博士点基金资助项目(D09901)

作者简介: 吴志强(1968—), 男, 山西文水人, 副教授, 博士.

$$g(x, \lambda; \alpha) = 0, \tag{1}$$

$$x \geq 0, \tag{2}$$

其中 x 为状态变量, λ 为分岔参数, α 为普适开折参数. (2) 是约束条件, 多见于周期解分岔的研究中.

分岔方程(1)的解随分岔参数的变化图, 通常称为分岔图. 相应地, 我们称方程(1)的解在满足约束条件(2)的范围内随分岔参数的变化图为约束分岔图, 以示区别. 显然, 由于约束(2)的限制, 讨论摄动保持的约束分岔的类型时, 需考虑约束分岔图的拓扑等价问题.

奇异性理论指出, 分岔问题(1)的转迁集将开折参数空间划分成若干个区域(简称非约束保持区域), 在各区域内分岔图是拓扑等价的, 并且是摄动保持的. 我们自然会问: 这些转迁集是否仍是相应约束分岔问题的转迁集呢? 一般而言答案是否定的. 否则, 也就没有将约束分岔问题提出来加以研究的必要. 图 1 中给出的简单的例子, 可以对此加以说明.

文献[2]给出了 $g = x^3 + \lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$ 的转迁集和分岔图的结果, 在所标注的区域 5 中, 开折参数取不同值时, 会得到分岔图 A1、A2(图 1), 而区域 2 与 3 中的分岔图分别为 A3、A4. 图 1 中给出与 A1~ A4 分别一一对应约束分岔图 B1~ B4. 可以看出, 尽管 A1 与 A2 是等价的分岔图, 但相应的 B1 与 B2 却不是等价的约束分岔图, 因而在该非约束保持性区域 5 中存在新的约束转迁集; A3 与 A4 不是等价的分岔图、分别位于以某分岔集为边界的两相邻的非约束保持性区域 2 与 3 中, 但与之相应的约束分岔图 B3 与 B4 却是等价的, 因而该分岔集不是约束分岔集.

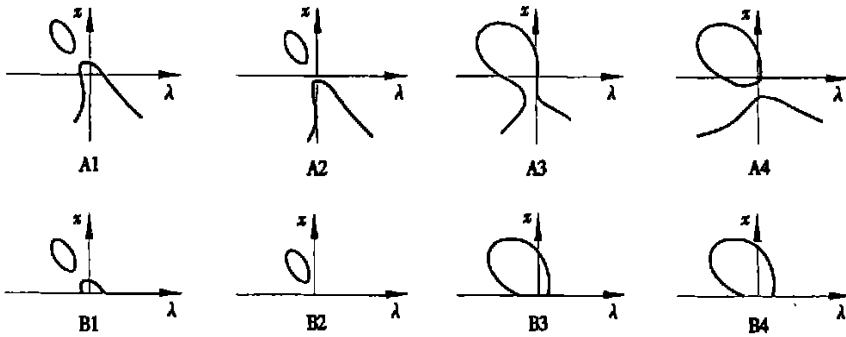


图 1 分岔图(A1~ A4)与相应的约束分岔图(B1~ B4)之比较

由此可见, 与分岔问题(1)的奇异性分析结果的基础上, 计算相应约束分岔问题的约束转迁集和约束分岔图, 需要完成两方面的工作: (一) 找出同一非约束保持性区域内, 非保持约束分岔图对应的开折参数集合, 即新增约束转迁集; (二) 若两相邻的不同保持区域中, 约束分岔图拓扑等价, 则该转迁集是多余的, 应将它们去掉. 由于分岔图的演化连续地依赖于开折参数的变化, 因此利用上述办法可完全确定出约束分岔问题的约束转迁集.

下面图 2~ 图 11 中给出 10 种基本分岔的约束转迁集(b)和约束分岔图(c)的计算结果. 图中分别用 B 、 H 、 D 表示分岔集、滞后集、双极限点集, 它们可能就是相应非约束分岔问题的分岔集、滞后集、双极限点集, 也可能是其一部分; 而 BI 、 HI 、 DI 表示因有约束新增的转迁集. 为便于比较, 同时还给出相应分岔问题(1)的转迁集(a)^[1]. 图中细实线代表坐标轴, 转迁集和分岔解枝用粗实线表示.

1) 简单分岔 $g = x^2 - \lambda^2 + \alpha$ (图 2)

转迁集为:

$$H = DL = \phi \quad (\phi \text{ 表示空集}), \tag{3}$$

$$B: \alpha = 0 \tag{4}$$

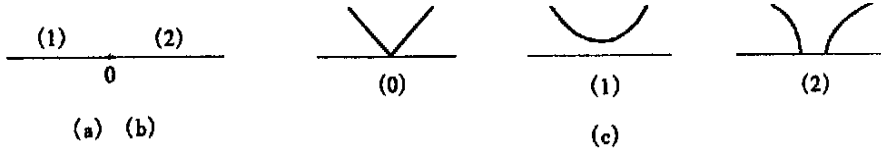


图2 简单分岔的转迁集与分岔图

(a)、(b)、(c)分别表示非约束转迁集、约束转迁集、约束分岔图; 以下各图同

2) 孤立点分岔 $g = x^2 + \lambda^2 + \alpha$ (图3)

转迁集为:

$$H = DL = \phi \quad (\phi \text{ 表示空集}), \tag{5}$$

$$B: \alpha = 0 \tag{6}$$

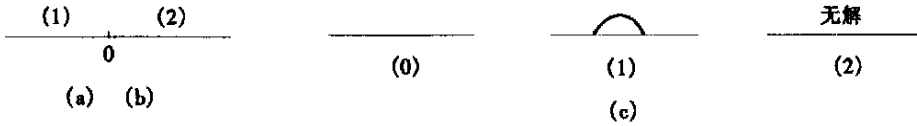


图3 孤立点分岔的转迁集与分岔图

3) 滞后点分岔(hysteresis) $g = x^3 - \lambda + \alpha x$ (图4)

转迁集为:

$$B = DL = \phi \quad (\phi \text{ 表示空集}), \tag{7}$$

$$H: \alpha = 0 \tag{8}$$

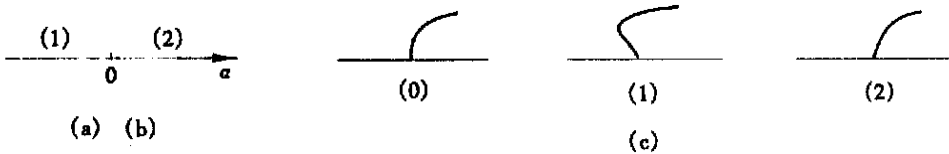


图4 滞后点分岔的转迁集与分岔图

4) 非对称尖点分岔(asymmetry cusp) $g = x^2 - \lambda^3 + \alpha + \beta \lambda$ (图5)

转迁集为:

$$H = DL = \phi \quad (\phi \text{ 表示空集}), \tag{9}$$

$$B: \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{3}\right)^3 \tag{10}$$

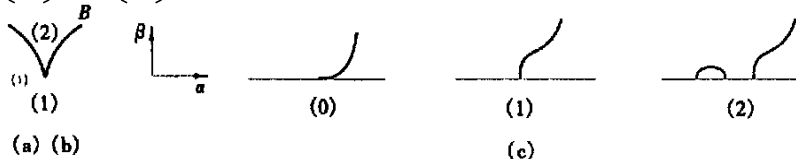


图5 非对称尖点分岔的转迁集和约束分岔图

5) 树枝分岔(pitchfork) $h = x^3 - \lambda + \alpha + \beta x^2$ (图6)

转迁集为:

$$DL = \phi \quad (\phi \text{ 表示空集}), \tag{11}$$

$$B: \alpha = \left[\frac{\beta}{3} \right]^3, \quad \alpha < 0, \tag{12}$$

$$H: \alpha = 0 \tag{13}$$

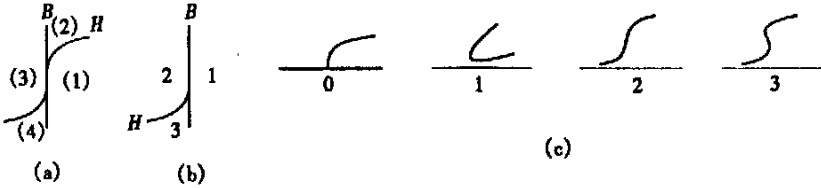


图6 树枝分岔的转迁集和约束分岔图

6) 四次折叠分岔(quartic fold) $g = x^4 - \lambda + \alpha + \beta x^2$ (图7)

转迁集为:

$$B = DL = \phi, \quad H: 27\alpha^2 + 8\beta^3 = 0, \quad \alpha > 0,$$

$$HI: \alpha = 0, \quad DI: 27\alpha^2 + 4\beta^4 = 0, \quad \alpha > 0$$

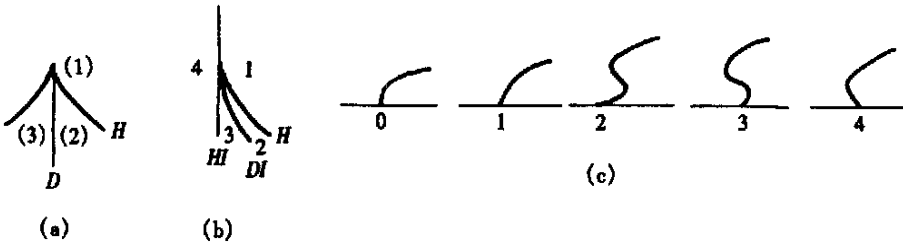


图7 四次折迭点分岔的转迁集和约束分岔图

7) $g = x^2 + \lambda^4 + \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2$ (图8)

转迁集为:

$$H = DL = \phi,$$

$$B: \beta^2 = -\frac{2}{27}(\gamma^3 - 36\alpha\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 + 12\alpha)^3}).$$

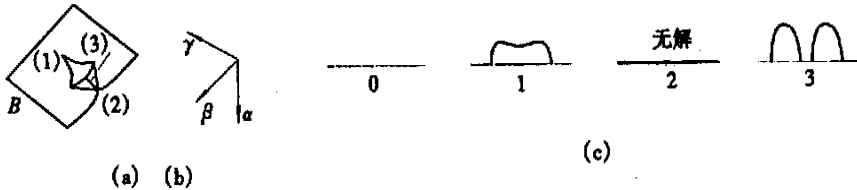


图8 四次孤立点分岔的转迁集和约束分岔图

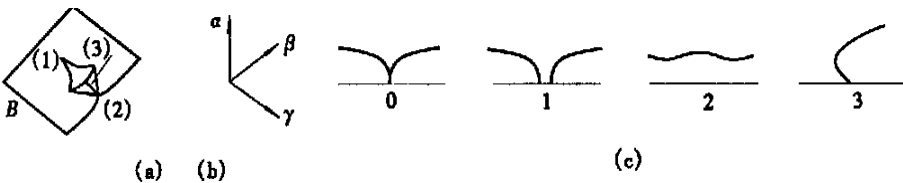


图9 四次跨临界点分岔的转迁集和约束分岔图

7) $g = x^2 - \lambda^4 + \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2$ (图9)

转迁集为:

$$H = DL = \phi,$$

$$B: \beta^2 = \frac{2}{27}(\gamma^3 + 36\alpha\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 - 12\alpha)^3}).$$

8) 翼形尖点分岔(winged cusp) $g = x^3 + \lambda^2 + \alpha + \beta\lambda + \gamma x^2$ (图 10)

转迁集为:

$$B: 432\alpha^2 - \alpha\gamma^2(\gamma^4 - 72\beta) - \beta_2(\gamma_4 - 64\beta) = 0, \quad \frac{35\alpha + \gamma^2\beta}{\gamma^4 - 48\beta} \geq 0,$$

$$BI: \alpha = 0,$$

$$H: \alpha\gamma^2 + \beta^2 = 0, \quad \alpha \leq 0.$$

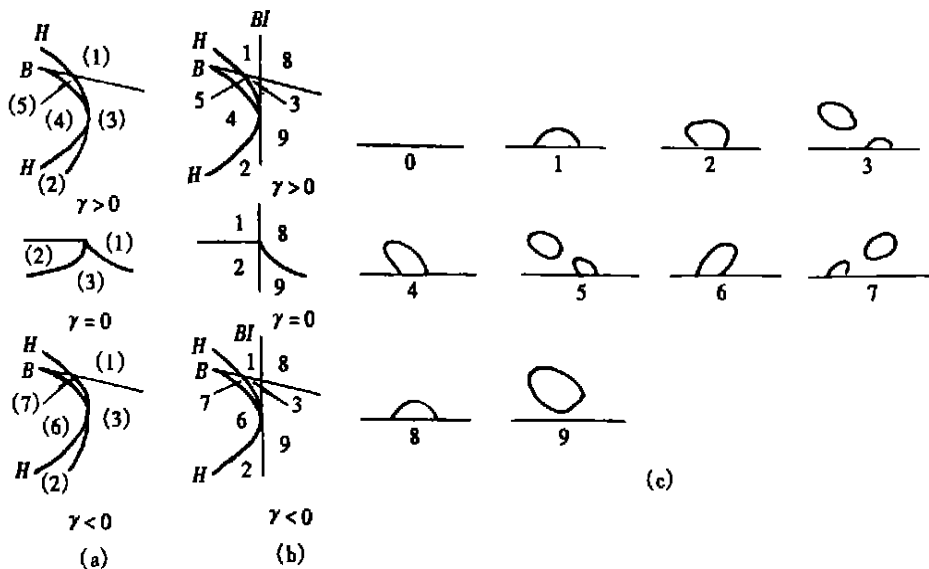


图 10 翼形尖点分岔的转迁集和分岔图

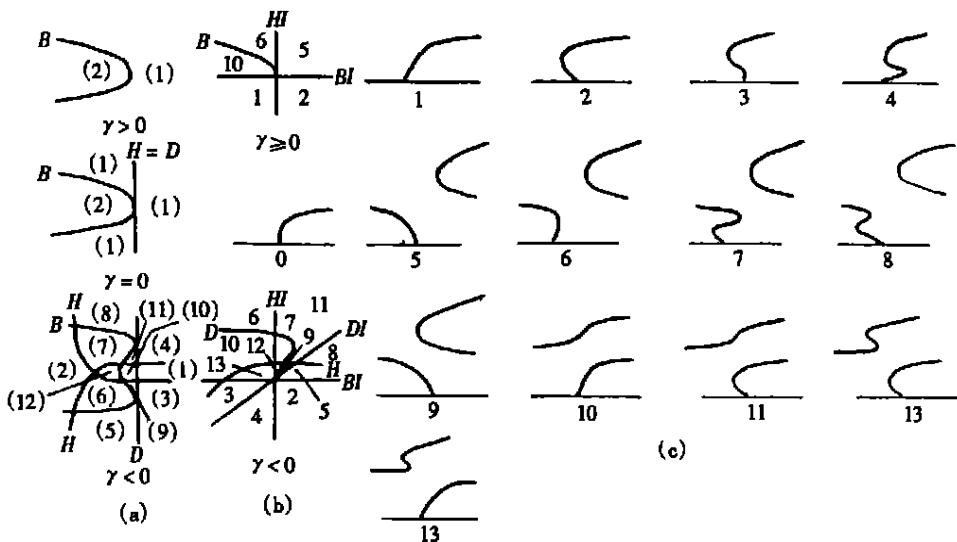


图 11 转迁集与约束分岔图

9) $g = x^4 - \lambda + \alpha + \beta\lambda + \gamma x^2$ (图 11)

转迁集为:

$$B: \alpha + \sqrt{\beta^2 + \beta^4} = 0, \quad \beta \geq 0,$$

$$BI: \beta = 0,$$

$$H: \alpha = -\frac{\gamma}{12} \left[\gamma + \frac{8\sqrt{-6\gamma\beta}}{3} \right],$$

$$HI: \alpha = 0,$$

$$DI: \alpha + \frac{2}{3}\sqrt{\beta} \sqrt{-\frac{\gamma}{3}} = 0.$$

10) $g = x^5 - \lambda + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$ (图 12)

转迁集为:

$$B = \phi,$$

$$H: \begin{cases} \alpha = 15x^4 + 3\gamma x^2, \\ \beta = -10x^3 - 2\gamma x, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

$$HI: \alpha = 0,$$

$$DL: \begin{cases} \alpha = -7\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta - 4\xi\eta^3, \\ \beta = 8\xi^2\eta + 8\xi\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3, \\ \xi \neq \eta, \quad \xi, \eta \geq 0, \end{cases}$$

$$DLI: \begin{cases} \alpha = \sqrt{\xi^2 + 3\xi^4}, \\ \beta = -(4\xi\gamma + 4\xi^2), \\ \xi > 0 \end{cases}$$

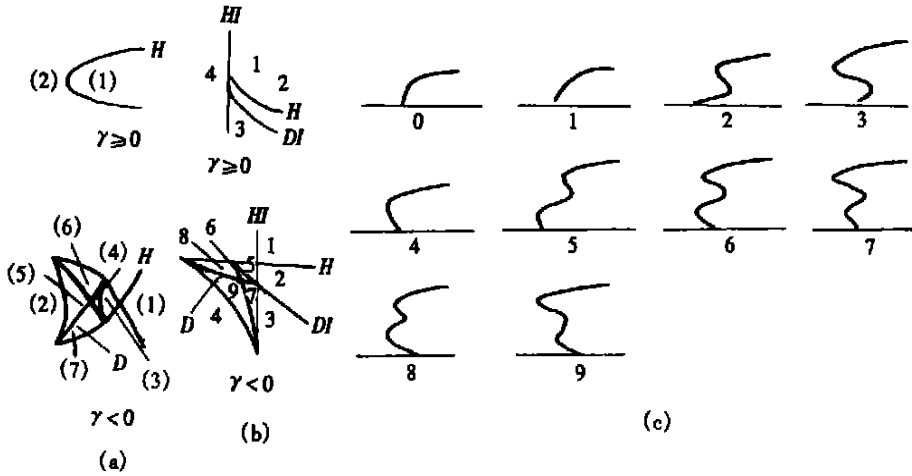


图 12 转迁集与约束分岔图
(为清晰起见, 图中用 DI 表示 DLI)

2 小 结

约束分岔是非线性动力学系统周期解分岔研究中遇到的普遍问题, 而现有的奇异性理论中还很少有这方面的结果, 因此, 对约束分岔的研究, 既是对奇异性理论的补充, 在应用方面也有重要的参考价值。

本文有关述约束分岔问题的转迁集和约束分岔图的计算结果, 表明:

•对对称约束分岔问题 ($g(-x) = g(x)$, 如 1)、2)、4)、 T^+ 、 T), 约束转迁集与相应分岔问题(1) 的转迁集相同•

•对非对称的约束分岔问题, 约束分岔问题的约束转迁集中, 一部分是相应非约束分岔问题的转迁集, 另一部分则是新增转迁集•

由此可知, 约束分岔问题的主要对象重点应该是不具有对称性的约束分岔, 其约束转迁集计算的关键是确定新增转迁集• 这也是我们进一步工作研究的重点•

[参 考 文 献]

- [1] Martin Golubitsky, David G. Schaeffer, Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. Vol. I, 1984; Vol. II, 1988, U S A: Springer-Verlag.
- [2] 陈予恕, Langford W F. 非线性马休方程的亚谱分岔解[J]. 力学学报, 1988, 20(6): 522—632.
- [3] 李如生, 万荣. 非平衡非线性化学[J]. 化学学报, 1996, 8(1): 17—29.

New Bifurcation Patterns in Elementary Bifurcation Problems With Single-Side Constraint

WU Zhi-qiang, CHEN Yu-shu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: Bifurcations with constraints are open problems appeared in research on periodic bifurcations of nonlinear dynamical systems, but the present singularity theory doesn't contain any analytical methods and results about it. As the complement to singularity theory and the first step to study on constrained bifurcations, here are given the transition sets and persistent perturbed bifurcation diagrams of 10 elementary bifurcation of codimension no more than three.

Key words: constraint; singularity theory; bifurcation