应用数学和力学, 第 22 卷 第 12 期(2001 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1309_08

一类具有 Lipschitz 条件的非线性映象的迭代过程*

谷 峰

(齐齐哈尔大学 数学系, 黑龙江 齐齐哈尔 161006)

(张石生推荐)

摘要: 使用新的分析技巧, 讨论了 Lipschitz ϕ_强增生算子方程的解和 Lipschitz ϕ_强伪压缩映象不动点的迭代逼近问题。改进和推广了 Chang, Chidume, Deng_Ding, Deng, Tan_Xu 和 Osilike 等人的相关结果。

关 键 词: ϕ_强增生算子; ϕ_强伪压缩映象; Ishikawa 迭代序列; Mann 迭代序列
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言与预备知识

设 X 为实 Banach 空间, X^* 为其共轭空间, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表 X 与 X^* 间的配对, 映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 定义为

$$J(x) = \left\{j \in X^*: \langle x, j\rangle = \|x\|\cdot\|j\|, \|j\| = \|x\|\right\}, \qquad x \in X,$$

称之为正规对偶映象。

定义 1.1 设 X 为实赋范空间, K 是 X 的非空子集。设 $T: K \to X$ 是一映象。

1) 称 T 是增生的, 如果 $\forall x, y \in K$, 都存在 $j(x-y) \in J(x-y)$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant 0。\tag{1}$$

2) 称 T 是强增生的, 如果 $\forall x, y \in K$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant k\cdot\|x-y\|^2\tag{2}$$

对于常数 $k > 0$ 成立。不失一般性, 可设 $k \in (0, 1)$ 并称之为映象 T 的强增生常数。

3) 称 T 是(强) 伪压缩的, 如果 $I - T$(其中 I 为恒等映象) 是(强) 增生的。

4) 称 T 是 ϕ_强增生的, 如果 $\forall x, y \in K$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 和一个严格增加函数 $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(0) = 0$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant \phi(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|,\tag{3}$$

其中 ϕ 称为映象 T 的强增生函数。

5) 称 T 是 ϕ_强伪压缩的, 如果 $I - T$ 是 ϕ_强增生映象。

显然, 每一个强增生算子是 ϕ_强增生的且每个强伪压缩算子也是 ϕ_强伪压缩的, 这里 ϕ:

* 收稿日期: 1999_09_17; 修订日期: 2001_05_31
作者简介: 谷峰(1960—), 男, 黑龙江明水人, 副教授.

$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 定义为 $\phi(s)=ks$(其中 $k\in(0,1)$, $s\geqslant 0$)•

增生映象的概念是由 Browder[1] 和 Kato[2] 在 1967 年独立引入的• 关于增生映象的一个早期的基本结果应归于 Browder[1], 他证明了: 如果 T 是局部 Lipschitz 和增生的, 则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{T}u(t)=0,\quad u(0)=u_0 \tag{4}$$

是可解的•

下面的两个迭代过程分别归于 Ishikawa[3] 和 Mann[4] •

定义 1.2 设 X 是实 Banach 空间, K 是 X 的非空凸子集, 设 $\mathrm{T}:K\to K$ 是一映象• 对任给 $x_0\in K$, 序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\mathrm{T}y_n, \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n\mathrm{T}x_n \qquad n\geqslant 0, \end{cases} \tag{5}$$

称之为映象 T 的 Ishikawa 迭代序列, 其中 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中满足一定条件的两个实数列•

特别地, 如果 $\beta_n=0$, $\forall n\geqslant 0$• 则序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\mathrm{T}x_n \qquad n\geqslant 0, \tag{6}$$

称之为 T 的 Mann 迭代序列•

关于 Ishikawa 迭代序列和 Mann 迭代序列的收敛问题已被许多作者所研究过(见[3~ 5, 6 ~ 13])•

本文中, 我们使用新的分析技巧分别研究了具有 Lipschitz 条件的 ϕ_强增生算子和 ϕ_强伪压缩算子的 Ishikawa、Mann 迭代序列的收敛性问题, 所得结果改进和推广了 Chang[6], Chidume[7, 8], Deng_Ding[9], Deng[10, 11], Tan_Xu[12] 和 Osilike[13] 等人的相关结果•

2 几 个 引 理

下面的引理对于我们主要结果的证明是必要的•

引理 2.1[5] 设 X 是实 Banach 空间, J 是正规对偶映象, 则 $\forall x,y\in X$, 有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle \qquad \forall j(x+y)\in \mathrm{J}(x+y)• \tag{7}$$

引理 2.2[14] X 是一致光滑的 Banach 空间(等价地, X^* 是一致凸 Banach 空间) 当且仅当 J 是单值的且在 X 的任何有界子集上是一致连续的•

引理 2.3[6] 设 $\{a_n\}$ 是一个非负实数列, $\{t_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列且 $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, 如果存在正整数 n_0, 使得

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+t_n\rho_n \qquad \forall n\geqslant n_0, \tag{8}$$

其中 $\rho_n\geqslant 0$, $\forall n\geqslant 0$ 且 $\rho_n\to 0(n\to\infty)$, 则 $a_n\to 0(n\to\infty)$•

3 ϕ_强伪压缩映象 Ishikawa 迭代序列的收敛性

引理 3.1 设 X 是实 Banach 空间, K 是 X 的非空子集• 设 $\mathrm{T}:K\to X$ 是 ϕ_强伪压缩映象, 则 $\forall x,y\in K$, 存在 $j(x-y)\in \mathrm{J}(x-y)$, 使得

$$\langle \mathrm{T}x-\mathrm{T}y,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2-\phi(\|x-y\|)\|x-y\|,$$

其中 ϕ 是 I- T 的强增生函数•

证 因 T 是 ϕ_强伪压缩的, 故存在一个严格增加函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\phi(0)=0$, 使

$\forall x, y \in K$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$, 满足

$$\langle (I-T)x-(I-T)y, j(x-y)\rangle \geqslant \Phi(\|x-y\|)\|x-y\|$$

即
$$\langle x-y, j(x-y)\rangle - \langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle \geqslant \Phi(\|x-y\|)\|x-y\|,$$

于是
$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \|x-y\|^2-\Phi(\|x-y\|)\|x-y\|.$$

引理3.1证毕.

定理3.2 设 X 是一致光滑的实Banach空间, K 是 X 的非空闭凸子集(不必有界), 设 $T: K \to K$ 是Lipschitz Φ_强伪压缩映象, $L \geqslant 1$ 是 T 的Lipschitz常数, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个实数列且满足下列条件:

(i) $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

如果 $F(T) \neq \varnothing$ ($F(T)$ 表 T 的不动点集), 则 $\forall x_0 \in K$, 由下式所定义的Ishikawa迭代序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \qquad n \geqslant 0, \end{cases} \tag{9}$$

强收敛于 T 在 K 中的唯一不动点.

证 取 $q \in F(T)$ 则 $q = Tq$. 如果存在正整数 n_0, 使得 $x_{n_0} = q$, 则有

$$y_{n_0} = (1-\beta_{n_0})x_{n_0} + \beta_{n_0}Tx_{n_0} = (1-\beta_{n_0})q + \beta_{n_0}q = q,$$

$$x_{n_0+1} = (1-\alpha_{n_0})x_{n_0} + \alpha_{n_0}Ty_{n_0} = (1-\alpha_{n_0})q + \alpha_{n_0}q = q.$$

由归纳法我们可以证明: $x_{n_0+i} = q$, $\forall i \geqslant 1$. 这说明 $x_n \to q$ $(n \to \infty)$, 因而, 不失一般性, 可设 $x_n \neq q$, $\forall n \geqslant 0$. 即 $\|x_n - q\| > 0$, $\forall n \geqslant 0$. 由于 X 是一致光滑的, 故由引理2.2知, J是单值的且在 X 的任何有界子集上是一致连续的. 从(9)和引理2.1得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}-q\|^2 &= \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Ty_n-q)\|^2 \leqslant \\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2 + 2\alpha_n\langle Ty_n-q, J(x_{n+1}-q)\rangle = \\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2 + 2\alpha_n\langle Ty_n-q, J(x_n-q)\rangle + \\ &2\alpha_n b_n\|x_n-q\|^2, \end{aligned} \tag{10}$$

其中
$$b_n = \left\langle \frac{Ty_n-q}{\|x_n-q\|}, J\left(\frac{x_{n+1}-q}{\|x_n-q\|}\right) - J\left(\frac{x_n-q}{\|x_n-q\|}\right)\right\rangle.$$

(Ⅰ) 首先我们考虑(10)式右边第二项. 由引理3.1我们有

$$\langle Tx_n-q, J(x_n-q)\rangle \leqslant \|x_n-q\|^2 - \Phi(\|x_n-q\|)\|x_n-q\|. \tag{11}$$

又因 T 是Lipschitz映象, 故有

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Tx_n\| &\leqslant L\|y_n-x_n\| = L\beta_n\|Tx_n-x_n\| \leqslant \\ &L\beta_n(\|Tx_n-q\| + \|x_n-q\|) \leqslant \\ &L(L+1)\beta_n\|x_n-q\|, \end{aligned} \tag{12}$$

考虑到(11)和(12), 我们有

$$\begin{aligned} \langle Ty_n-q, J(x_n-q)\rangle &= \langle Ty_n-Tx_n, J(x_n-q)\rangle + \langle Tx_n-q, J(x_n-q)\rangle \leqslant \\ &L(L+1)\beta_n\|x_n-q\|^2 + \|x_n-q\|^2 - \\ &\Phi(\|x_n-q\|)\|x_n-q\| = \\ &[L(L+1)\beta_n+1]\|x_n-q\|^2 - \Phi(\|x_n-q\|)\|x_n-q\|. \end{aligned} \tag{13}$$

(Ⅱ) 下面我们考虑(10)式右边第三项. 我们证明 $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 事实上我们有

$$\|y_n - q\| = \|(1-\beta_n)(x_n - q) + \beta_n(Tx_n - q)\| \leqslant$$
$$(1-\beta_n)\|x_n - q\| + \beta_n L\|x_n - q\| \leqslant$$
$$L\|x_n - q\|, \tag{14}$$

这样, 从(14)我们有

$$\frac{\|Ty_n - q\|}{\|x_n - q\|} \leqslant L\frac{\|y_n - q\|}{\|x_n - q\|} \leqslant L^2. \tag{15}$$

由于 $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$, 从(15) 就有

$$\left\|\frac{x_{n+1} - q}{\|x_n - q\|} - \frac{x_n - q}{\|x_n - q\|}\right\| = \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|x_n - q\|} = \frac{\alpha_n\|Ty_n - x_n\|}{\|x_n - q\|} \leqslant$$
$$\frac{\alpha_n}{\|x_n - q\|}(\|Ty_n - q\| + \|x_n - q\|) \leqslant$$
$$\alpha_n(L^2 + 1) \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{16}$$

这意味着

$$J\left(\frac{x_{n+1} - q}{\|x_n - q\|}\right) - J\left(\frac{x_n - q}{\|x_n - q\|}\right) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

而且由(15)可知$\left\{(Ty_n - q)/\|x_n - q\|\right\}_{n\geqslant 0}$是 X 中的有界序列, 所以我们有

$$b_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{17}$$

把(13)代入(10)得

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \left\{(1-\alpha_n)^2 + 2\alpha_n[L(L+1)\beta_n + 1] + 2\alpha_n b_n\right\} \times$$
$$\|x_n - q\|^2 - 2\alpha_n\phi(\|x_n - q\|)\|x_n - q\| =$$
$$(1+\lambda_n\alpha_n)\|x_n - q\|^2 - 2\alpha_n\phi(\|x_n - q\|)\|x_n - q\|, \tag{18}$$

其中 $\lambda_n = \alpha_n + 2\beta_n L(L+1) + 2b_n$. 由条件(i)和(17)知 $\lambda_n \to 0\ (n \to \infty)$.

设 $\sigma = \inf\left\{\phi(\|x_n - q\|)/\|x_n - q\| : n \geqslant 0\right\}$, 则 $\sigma \geqslant 0$. 下面我们证明 $x_n \to q\ (n \to \infty)$, 为此我们考虑以下两种情形:

情形1 $\sigma > 0$, 不失一般性, 可设 $\sigma < 1$, 则 $\phi(\|x_n - q\|)/\|x_n - q\| \geqslant \sigma$, $\forall n \geqslant 0$. 于是从(18) 得

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant (1+\lambda_n\alpha_n)\|x_n - q\|^2 - 2\alpha_n\sigma\|x_n - q\|^2 =$$
$$(1+\lambda_n\alpha_n - 2\alpha_n\sigma)\|x_n - q\|^2.$$

由于 $\lambda_n \to 0\ (n \to \infty)$, 所以存在正整数 n_0, 使当 $n \geqslant n_0$ 时 $\lambda_n < \sigma$, 因此有

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant (1-\sigma\alpha_n)\|x_n - q\|^2, \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

设 $a_n = \|x_n - q\|^2$, $t_n = \sigma\alpha_n$, $\rho_n = 0$, 则从引理2.3知 $a_n \to 0\ (n \to \infty)$, 即 $x_n \to q\ (n \to \infty)$.

情形2 $\sigma = 0$, 即$\inf\left\{\phi(\|x_n - q\|)/\|x_n - q\| : n \geqslant 0\right\} = 0$, 这时存在子序列$\left\{x_{n_j}\right\} \subset \left\{x_n\right\}$, 使得

$$\|x_{n_j} - q\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

因 $\lambda_n \to 0$, $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$, 从而对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $n_{j_0} \geqslant n_0$, 使得

$$\|x_{n_{j_0}} - q\| < \varepsilon, \tag{19}$$

并且 $\forall n \geqslant n_{j_0}$, 有

$$\lambda_n < \phi(\varepsilon/2)/2\varepsilon, \quad \alpha_n < 1/2(L^2 + 1). \tag{20}$$

下证对一切 $k \geqslant 0$, 有

$$\|x_{n_{j_0}+k}-q\|\leqslant\varepsilon. \tag{21}$$

事实上,从(9)和(14)我们有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|&\leqslant\|x_n-q\|+\alpha_n\|Ty_n-x_n\|\leqslant\\&\|x_n-q\|+\alpha_n\left\{\|Ty_n-q\|+\|x_n-q\|\right\}\leqslant\\&\|x_n-q\|+\alpha_n\left\{L\|y_n-q\|+\|x_n-q\|\right\}\leqslant\\&\|x_n-q\|+\alpha_n(L^2+1)\|x_n-q\|\end{aligned}$$

即 $$\|x_n-q\|\geqslant\|x_{n+1}-q\|-\alpha_n(L^2+1)\|x_n-q\|. \tag{22}$$

现在我们证明

$$\|x_{n_{j_0}+1}-q\|\leqslant\varepsilon, \tag{23}$$

假设相反, $\|x_{n_{j_0}+1}-q\|>\varepsilon$, 则从(22)、(19)和(20)可得

$$\|x_{n_{j_0}}-q\|\geqslant\|x_{n_{j_0}+1}-q\|-\alpha_{n_{j_0}}(L^2+1)\|x_{n_{j_0}}-q\|>\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{24}$$

由 Φ 的严格增加性质可知 $\Phi(\|x_{n_{j_0}}-q\|)>\Phi(\varepsilon/2)>0$, 由(18)、(19)、(20)和(24)我们有

$$\begin{aligned}\|x_{n_{j_0}+1}-q\|^2&\leqslant(1+\lambda_{n_{j_0}}\alpha_{n_{j_0}})\|x_{n_{j_0}}-q\|^2-2\alpha_{n_{j_0}}\Phi(\|x_{n_{j_0}}-q\|)\|x_{n_{j_0}}-q\|\leqslant\\&(1+\lambda_{n_{j_0}}\alpha_{n_{j_0}})\varepsilon^2-2\alpha_{n_{j_0}}\Phi(\varepsilon/2)\varepsilon/2=\\&\varepsilon^2-\alpha_{n_{j_0}}(\Phi(\varepsilon/2)\varepsilon/2-\lambda_{n_{j_0}}\varepsilon^2)-\alpha_{n_{j_0}}\Phi(\varepsilon/2)\varepsilon/2\leqslant\varepsilon^2.\end{aligned}$$

此与假设矛盾,于是 $\|x_{n_{j_0}+1}-q\|\leqslant\varepsilon$ 成立.

假设对 $k_0\geqslant0$ 有 $\|x_{n_{j_0}+k_0}-q\|\leqslant\varepsilon$ 成立,与(23)同样的证明方法可证 $\|x_{n_{j_0}+(k_0+1)}-q\|\leqslant\varepsilon$ 成立. 于是(21)对一切 $k\geqslant0$ 成立. 由 ε 的任意性可知 $x_n\to q\ (n\to\infty)$.

(Ⅲ) 最后我们证明 q 是T在 K 中的唯一不动点. 事实上,如果 q_1 也是T在 K 中的一个不动点,则由引理3.1我们有

$$\|q_1-q\|^2=\langle q_1-q,J(q_1-q)\rangle\leqslant\|q_1-q\|^2-\Phi(\|q_1-q\|)\cdot\|q_1-q\|,$$

这意味着 $q_1=q$. 定理3.2证毕.

在定理3.2中,如果 $\beta_n=0$, $\forall n\geqslant0$, 则我们得到Mann迭代过程的如下结果:

推论3.3 设 X 是一致光滑的实Banach空间, K 是 X 的非空闭凸集(不必有界). 设T: $K\to K$ 是Lipschitz Φ_强伪压缩映象, $L\geqslant1$ 是T的Lipschitz常数, $\{\alpha_n\}$ 是[0,1]中的实数列且满足下列条件:

(i) $\alpha_n\to0\ (n\to\infty)$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$.

如果 $F(T)\neq\emptyset$, 则 $\forall x_0\in K$, 由下式定义的Mann迭代序列 $\{x_n\}$

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n\qquad n\geqslant0$$

强收敛于T在 K 中的唯一不动点.

注1 1) 因为强伪压缩映象是 Φ_强伪压缩映象的特殊情形,所以定理3.2改进和推广了Chang[6, 定理3.2], Chidume[7, 定理2], Chidume[8, 定理4], Deng_Ding[9, 定理1], Deng[10, 定理2], Deng[11, 定理4]和Tan_Xu[12, 定理4.2]等人的结果;

2) 众所周知,每个 q_一致光滑的Banach空间 $(1<q<\infty)$ 都是一致光滑的,于是定理3.2也改进和推广了Osilike[13, 推论5]的结果.

4 ϕ_强增生映象 Ishikawa 迭代序列的收敛性

引理 4.1 设 X 是实 Banach 空间, $T: X \to X$ 是具有强增生函数 ϕ 的 ϕ_强增生映象. 对任给 $f \in X$, 定义映象 $S: X \to X$ 为 $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$. 则 $\forall x, y \in X$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$, 使得

$$\langle Sx - Sy, j(x-y)\rangle \leqslant \|x-y\|^2 - \phi(\|x-y\|)\|x-y\|.$$

证 因 T 是 ϕ_强增生的, 故 $\forall x, y \in X$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant \phi(\|x-y\|)\|x-y\|.$$

于是有

$$\begin{aligned}\langle Sx - Sy, j(x-y)\rangle &= \langle f - Tx + x - (f - Ty + y), j(x-y)\rangle = \\ &\langle x-y, j(x-y)\rangle - \langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \\ &\|x-y\|^2 - \phi(\|x-y\|)\|x-y\|.\end{aligned}$$

引理 4.1 证毕.

定理 4.2 设 X 是一致光滑的实 Banach 空间, $T: X \to X$ 是 Lipschitz ϕ_强增生映象, $L > 0$ 是 T 的 Lipschitz 常数, 对任给的 $f \in X$, 定义映象 $S: X \to X$ 为 $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$. 设 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的两个实数列且满足下列条件:

(i) $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

如果 $S(T) \neq \varnothing$ ($S(T)$ 表方程 $f = Tx$ 的解集), 则 $\forall x_0 \in X$, 由下式定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n \qquad n \geqslant 0 \end{cases} \tag{25}$$

强收敛于方程 $f = Tx$ 的唯一解.

证 取 $q \in S(T)$, 则 $f = Tq$, 从而 $q = Sq$. 如果存在正整数 n_0, 使得 $x_{n_0} = q$, 则与定理 3.2 同样方法可证 $x_{n_0+i} = q$, $\forall i \geqslant 1$. 故 $x_n \to q\ (n \to \infty)$. 因此, 不失一般性, 我们可设 $x_n \neq q$, $\forall n \geqslant 0$, 即 $\|x_n - q\| > 0$, $\forall n \geqslant 0$. 由于 X 是一致光滑的, 从引理 2.2 可知 J 是单值的且在 X 的任何有界子集上是一致连续的. 从 (25) 和引理 2.1 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 &\leqslant (1-\alpha_n)^2\|x_n - q\|^2 + 2\alpha_n\langle Sy_n - q, J(x_{n+1} - q)\rangle = \\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n - q\|^2 + 2\alpha_n\langle Sy_n - q, J(x_n - q)\rangle + \\ &2\alpha_n d_n\|x_n - q\|^2,\end{aligned} \tag{26}$$

其中

$$d_n = \left\langle \frac{Sy_n - q}{\|x_n - q\|}, J\left(\frac{x_{n+1} - q}{\|x_n - q\|}\right) - J\left(\frac{x_n - q}{\|x_n - q\|}\right)\right\rangle.$$

(Ⅰ) 首先我们考虑 (26) 式右边第二项, 我们有

$$\langle Sy_n - q, J(x_n - q)\rangle = \langle Sy_n - Sx_n, J(x_n - q)\rangle + \langle Sx_n - q, J(x_n - q)\rangle. \tag{27}$$

由引理 4.1 有

$$\langle Sx_n - q, J(x_n - q)\rangle \leqslant \|x_n - q\|^2 - \phi(\|x_n - q\|)\|x_n - q\|, \tag{28}$$

而且还有

$$\|Sy_n - Sx_n\| \leqslant (1+L)\|y_n - x_n\|, \tag{29}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\langle Sy_n - Sx_n, J(x_n - q)\rangle &\leqslant (1+L)\|y_n - x_n\|\|x_n - q\| = \\ &(1+L)\beta_n\|Sx_n - x_n\|\|x_n - q\| \leqslant \\ &(1+L)\beta_n\{\|Sx_n - q\| + \|x_n - q\|\}\|x_n - q\| \leqslant \\ &(1+L)(2+L)\beta_n\|x_n - q\|^2.\end{aligned} \tag{30}$$

把(28)和(30)代入(27)得

$$\begin{aligned}\langle Sy_n - q, J(x_n - q)\rangle &\leqslant \{(1+L)(2+L)\beta_n + 1\}\|x_n - q\|^2 - \\ &\Phi(\|x_n - q\|)\|x_n - q\|.\end{aligned} \tag{31}$$

(Ⅱ) 下面证明 $d_n \to 0\ (n \to \infty)$. 事实上, 与(14)～(16)相同的证明方法可得

$$\|y_n - q\| \leqslant (1+L)\|x_n - q\|, \tag{32}$$

$$\frac{\|Sy_n - q\|}{\|x_n - q\|} \leqslant \frac{(1+L)\|y_n - q\|}{\|x_n - q\|} \leqslant (1+L)^2, \tag{33}$$

$$\left\|\frac{x_{n+1} - q}{\|x_n - q\|} - \frac{x_n - q}{\|x_n - q\|}\right\| \leqslant \alpha_n[(1+L)^2 + 1] \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{34}$$

由J的一致连续性, 从(33)和(34)可知 $d_n \to 0\ (n \to \infty)$. 把(31)代入(26)得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 &\leqslant \{(1-\alpha_n)^2 + 2\alpha_n[(1+L)(2+L)\beta_n + 1] + 2\alpha_n d_n\} \times \\ &\|x_n - q\|^2 - 2\alpha_n\Phi(\|x_n - q\|)\|x_n - q\| = \\ &(1+\delta_n\alpha_n)\|x_n - q\|^2 - 2\alpha_n\Phi(\|x_n - q\|)\|x_n - q\|,\end{aligned}$$

其中 $\delta_n = \alpha_n + 2\beta_n(1+L)(2+L) + 2d_n$, 由条件(ⅰ)和 $d_n \to 0\ (n \to \infty)$ 可知 $\delta_n \to 0\ (n \to \infty)$.

设 $\sigma = \inf\{\Phi(\|x_n - q\|)/\|x_n - q\|: n \geqslant 0\}$, 则用与定理3.2中同样的方法可证 $x_n \to q\ (n \to \infty)$.

另外, 易证 q 是方程 $f = Tx$ 的唯一解. 定理4.2证毕.

推论4.3 设 X 是一致光滑的实Banach空间, $T: X \to X$ 是Lipschitz ϕ_强增生映象, $L > 0$ 是 T 的Lipschitz常数. 对任给的 $f \in X$, 定义映象 $S: X \to X$ 为 $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$. 设 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实数列且满足下列条件:

(ⅰ) $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$;

(ⅱ) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

如果 $S(T) \neq \text{ƒ}$, 则 $\forall x_0 \in X$, 由下式定义的Mann迭代序列 $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Sx_n, \qquad n \geqslant 0$$

强收敛于方程 $f = Tx$ 的唯一解.

证 在定理4.2中取 $\beta_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$ 即得推论4.3.

注2 因强增生映象是 ϕ_强增生映象的特殊情况($\phi(s) = ks\ (k \in (0, 1), s \geqslant 0)$), 所以定理4.2改进和推广了Chang的[6, 定理5.2], Chidume的[8, 定理2], Deng_Ding的[9, 定理2], Deng的[10, 定理1], Tan_Xu的[12, 定理4.1]和Osilike的[13, 定理1].

致谢 作者对张石生教授的指导帮助表示真诚的感谢!

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**(6): 875—882.

[2] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan, 1967, **19**(18): 508—520.

[3] Ishikawa S. Fixed point and interation of a nonexpansive mapping in Banach space[J]. Proc Amer Math Soc, 1976, **59**(1): 65—71.

[4] Mann W R. Mean value methods in iteration[J]. Proc Amer Math Soc, 1953, **4**: 506—510.

[5] Chang S S. On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**(1): 94—111.

[6] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(1): 149—165.

[7] Chidume C E. Approximation of fixed points of strongly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, **120**(2): 545—551.

[8] Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations with strongly accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1995, **192**(2): 502—518.

[9] Deng L, Ding X P. Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo_contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1995, **24**(7): 981—987.

[10] Deng L. On Chidume's open questions[J]. J Math Anal Appl, 1993, **174**(2): 441—449.

[11] Deng L. An iterative process for nonlinear Lipschitzian and strongly accretive mappings in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces[J]. Acta Appl Math, 1993, **32**: 183—196.

[12] Tan K K, Xu H K. Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**(1): 9—21.

[13] Osilike M O. Iterative solution of nonlinear equations of the ϕ_ strongly accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, **200**(2): 259—271.

[14] Xu Z B, Roach G F. Characteristic inequalities in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1991, **157**: 189—210.

Iterative Process for Certain Nonlinear Mappings With Lipschitz Condition

GU Feng

(Department of Mathematics, Qiqihar University, Qiqihar, Heilongjiang 161006, P R China)

Abstract: Using the new analysis techniques, the problem of iterative approximation of solutions of the equation for Lipschitz ϕ_strongly accretive operators and of fixed points for Lipschitz ϕ_ strongly pseudo_contractive mappings are discussed. The main results of this paper improve and extend the corresponding results obtained by Chang, Chidume, Deng, Ding, Tan_Xu and Osilike.

Key words: ϕ_ strongly accretive operator; ϕ_ strongly pseudo_contractive mapping; Ishikawa iterative sequence; Mann iterative sequence