

文章编号: 1000-0887(2001) 12-1291-08

# 简支 Maxwell 模型粘弹性输流管道 的稳定性分析

赵凤群<sup>1</sup>, 王忠民<sup>1</sup>, 冯振宇<sup>2</sup>, 刘宏昭<sup>3</sup>

(1 西安理工大学 理学院, 西安 710048; 2 长安大学 基础部, 西安 710064;  
3 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

(周显初推荐)

**摘要:** 在弹性输流管道研究的基础上, 采用递推格式的有限差分法, 对简支 Maxwell 模型粘弹性输流管道(回转守恒系统), 探讨了其动力特性和稳定性问题, 具体分析了材料的松弛时间对无量纲流速与前三阶模态的无量纲频率的实部及虚部之间的变化曲线的影响。发现发散临界流速随松弛时间的减小而降低, 随后发生的耦合模态颤振临界流速随松弛时间的减小而增大; 甚至在质量比较大时, 随着松弛时间的减小, 可推迟乃至不发生耦合模态颤振。当无量纲松弛时间达到  $10^3$  量级以上时, 即可将其按弹性管道处理。甚至在  $H$  为  $10^2$  量级时, 按弹性管道处理也不会带来太大的误差。

**关键词:** 粘弹性管道; 稳定性; 松弛时间; 耦合模态颤振

**中图分类号:** O353      **文献标识码:** A

## 前 言

众所周知, 简支输流管道由于出口处的能量损失等于进口处得到的能量, 故被称为回转守恒系统<sup>[1]</sup>。对该系统, 国内外一些学者进行了研究。1974 年, Paidoussis<sup>[2]</sup> 研究了在定常流和振荡流作用下, 简支 Kelvin 模型输流管道的动力稳定性问题, 给出了在较高流速流动下, 回转守恒系统不仅呈现为发散失稳而且也呈现出颤振失稳等重要结论。1989 年, Namachchivaya 和 Tien<sup>[3-5]</sup> 基于考虑自激和参数激励的相互作用, 研究了振荡流作用下两端铰支非线性弹性输流管道的分叉现象。1993 年, 梁波、唐家祥<sup>[6]</sup> 用有限元法分析了两端简支弹性输流管道的动力特性和动力稳定性问题。1998 年, 王世忠<sup>[7]</sup> 等用有限元法分析了流体的流速、压强变化以及固液耦合刚度对弹性简支管道固有频率的影响, 并发现了各阶固有频率都有随流速的提高而降低、再提高、再降低的周而复始现象。1999 年, 冯振宇、赵凤群<sup>[8]</sup> 采用幂级数法计算了 Timoshenko 弹性管道的固有频率和临界流速, 分析了转动惯量对该输流管道稳定性的影响。

本文在上述研究的基础上, 采用递推格式的有限差分法, 对简支 Maxwell 模型粘弹性输流管道的动力特性和稳定性问题进行了探讨, 给出了在不同松弛时间下无量纲流速与前三阶模

收稿日期: 2000\_05\_23; 修订日期: 2001\_08\_03

基金项目: 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(00JK206)

作者简介: 赵凤群(1963), 女, 陕西淳化人, 副教授, 硕士, 应用数学系主任。

态的无量纲频率的实部及虚部之间的变化曲线,发现发散临界流速随松弛时间的减小而降低,随后发生的耦合模态颤振临界流速随松弛时间的减小而增大,甚至在质量比较大时,随着松弛时间的减小,可推迟乃至不发生耦合模态颤振

### 1 粘弹性管道振动方程

简支粘弹性输流管道如图 1 所示,设管道挠度为  $y(x, t)$ , 长度为  $L$ , 通流截面积为  $A$ , 管道材料的弹性模量为  $E$ , 粘性系数为  $t$ , 管道截面积的惯性矩为  $I$ , 流体密度为  $\rho$ , 流速不变且为  $U$ , 压力为  $p(x, t)$ , 单位长度管道的横向流体力为  $F(x, t)$ , 单位面积上的切向流体力为  $q(x, t)$ , 管道截面承受的弯矩为  $M(x, t)$ , 剪力为  $Q(x, t)$ , 轴向力为  $T(x, t)$

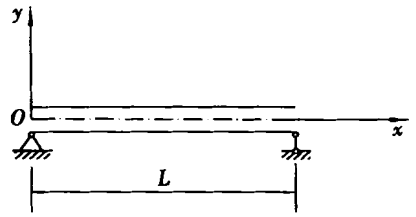
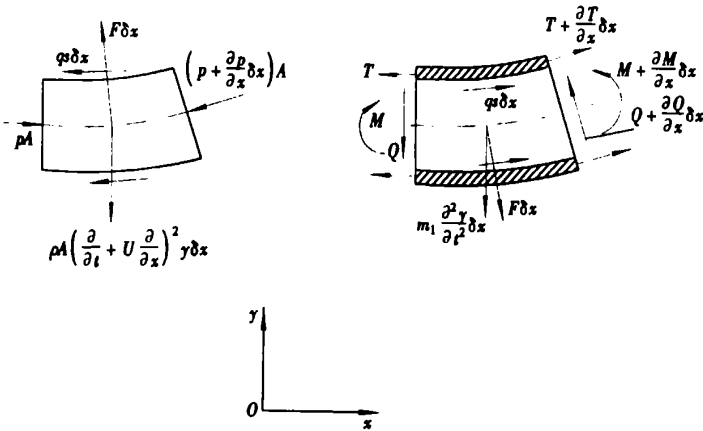


图 1 粘弹性输送流体管道

从管道上截取  $x$  的微元段,并分别取其中的流体微元与管道微元为研究对象,并令  $m_1$  为单位长度空管质量,  $s$  为管道微元内壁周长,则其受力图如图 2 所示

由动静法列出平衡方程,略去其中的二阶小量,并考虑到在管道出口处  $T = 0$ , 且将管内压力作为管内流体压力的原点,并令  $m = m_1 + \rho A$ , 则得

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + AU^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2AU \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = 0 \tag{1}$$



(a) 流体微元

(b) 管道微元

图 2 流体微元与管道微元受力图

对于 Maxwell 模型粘弹性管道,其挠度的微分关系式为<sup>[9]</sup>

$$I \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = \left[ 1 + \frac{t}{E} \frac{\partial}{\partial t} \right] M \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,得出 Maxwell 模型粘弹性输流管道的固-液耦合振动的微分方程为

$$I \frac{\partial^5 y}{\partial t^4 \partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + AU^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2AU \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + \frac{t}{E} \left[ m \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + AU^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + 2AU \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \right] = 0 \tag{3}$$

设下列无量纲量为

$$\left. \begin{aligned} &= x/L, \quad w = y/L, \quad = A/m, \\ &= \frac{t}{L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{0.5}, \quad u = UL \left( \frac{A}{EI} \right)^{0.5}, \quad H = \frac{1}{L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{0.5} \frac{1}{E} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式,得

$$\begin{aligned} &H \frac{^5w}{4} + Hu^2 \frac{^3w}{2} + u^2 \frac{^2w}{2} + 2^{0.5}u \frac{^2w}{2} + \\ &2^{0.5}Hu \frac{^3w}{2} + H \frac{^3w}{3} + \frac{^2w}{2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

设  $w(, ) = W( )e^j$ , (6)

将(6)式代入(5)式,得 Maxwell 模型粘弹性输流管道的无量纲振动方程为

$$\begin{aligned} &jH \frac{d^4W}{d^4} + (jH + 1)u^2 \frac{d^2W}{d^2} + 2(j - H^2)^{0.5}u \frac{dW}{d} - \\ &(jH^3 + ^2)W = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

对于图 1 所示的简支粘弹性输流管道,其边界条件为

$$= 0: W = 0, \quad d^2W/d^2 = 0; \quad = 1: W = 0, \quad d^2W/d^2 = 0 \quad (8)$$

## 2 有限差分法求解

对(7)式采用有限差分法求解 将输流管道分成  $k$  段,且取各段中点为差分点,则有限差分方程为

$$\begin{aligned} &jH k^4 (W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2}) + (jH + 1)u^2 k^2 (W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1}) + \\ &(j - H^2)u^{0.5}k(W_{i-1} - W_{i+1}) - (jH^3 + ^2)W_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (9)$$

将上式整理成如下形式

$$W_{i+2} = f_1^i W_{i-2} + f_2^i W_{i-1} + f_3^i W_i + f_4^i W_{i+1}, \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} &f_1^i = -1, \quad f_2^i = 4 - \frac{(jH + 1)u^2}{jH k^2} + \frac{(j - H^2)^{0.5}u}{jH k^3}, \\ &f_3^i = -6 + \frac{2(jH + 1)u^2}{jH k^2} + \frac{jH^3 + ^2}{jH k^4}, \quad f_4^i = 4 - \frac{(jH + 1)u^2}{jH k^2} - \frac{(j - H^2)^{0.5}u}{jH k^3} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

令复频率  $= p + jq$ ,代入(11)式并将实部与虚部分开,得

$$\left. \begin{aligned} &f_1^i = -1, \\ &f_2^i = \left[ 4 - \frac{u^2}{k^2} + \frac{qu^2}{H(p^2 + q^2)k^2} + \frac{^{0.5}u}{Hk^3} - \frac{q^{0.5}u}{k^3} \right] + j \left[ \frac{pu^2}{H(p^2 + q^2)k^2} + \frac{^{0.5}pu}{k^3} \right], \\ &f_3^i = \left[ -6 + \frac{2u^2}{k^2} - \frac{2qu^2}{H(p^2 + q^2)k^2} + \frac{p^2 - q^2}{k^4} + \frac{q}{Hk^4} \right] + j \left[ \frac{2pq}{k^4} - \frac{2pu^2}{H(p^2 + q^2)k^2} - \frac{p}{Hk^4} \right], \\ &f_4^i = \left[ 4 - \frac{u^2}{k^2} + \frac{qu^2}{H(p^2 + q^2)k^2} - \frac{^{0.5}u}{Hk^3} + \frac{^{0.5}qu}{k^3} \right] + j \left[ \frac{pu^2}{H(p^2 + q^2)k^2} - \frac{^{0.5}pu}{k^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由(10)式可得递推公式

$$\left\{ \begin{matrix} i+1 \end{matrix} \right\} = [F_i] \left\{ \begin{matrix} i \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

其中

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} W_{i-2} \\ W_{i-1} \\ W_i \\ W_{i+1} \end{bmatrix}, [F_i] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_1^i & f_2^i & f_3^i & f_4^i \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$[F_i]$  是一复矩阵

边界条件(8)的差分格式为

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{matrix} k+1 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} W_{k-1} \\ W_k \\ -W_k \\ -W_{k-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

由递推公式(13)式有

$$\begin{bmatrix} W_{k-1} \\ W_k \\ -W_k \\ -W_{k-1} \end{bmatrix} = [F_k][F_{k-1}] \dots [F_1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

根据复矩阵乘法,记

$$[F_k][F_{k-1}] \dots [F_1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + jb_{11} & a_{12} + jb_{12} \\ a_{21} + jb_{21} & a_{22} + jb_{22} \\ a_{31} + jb_{31} & a_{32} + jb_{32} \\ a_{41} + jb_{41} & a_{42} + jb_{42} \end{bmatrix} \quad (17)$$

由(16)式及(17)式得

$$\begin{cases} [(a_{11} + a_{41}) + j(b_{11} + b_{41})]W_1 + [(a_{12} + a_{42}) + j(b_{12} + b_{42})]W_2 = 0, \\ [(a_{21} + a_{31}) + j(b_{21} + b_{31})]W_1 + [(a_{22} + a_{32}) + j(b_{22} + b_{32})]W_2 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

因  $W_1$  与  $W_2$  不同时为零,故有

$$\begin{aligned} & [(a_{11} + a_{41}) + j(b_{11} + b_{41})][(a_{22} + a_{32}) + j(b_{22} + b_{32})] - \\ & [(a_{12} + a_{42}) + j(b_{12} + b_{42})][(a_{21} + a_{31}) + j(b_{21} + b_{31})] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

将(19)式中的实、虚部分开,即得简支 Maxwell 模型粘弹性输流管道的复特征方程组为

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{41})(a_{22} + a_{32}) - (b_{11} + b_{41})(b_{22} + b_{32}) - \\ (a_{12} + a_{42})(a_{21} + a_{31}) + (b_{12} + b_{42})(b_{21} + b_{31}) = 0, \\ (a_{11} + a_{41})(b_{22} + b_{32}) + (b_{11} + b_{41})(a_{22} + a_{32}) - \\ (a_{12} + a_{42})(b_{21} + b_{31}) - (b_{12} + b_{42})(a_{21} + a_{31}) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

### 3 计算结果的分析与讨论

(1) 从方程(7)可以看到,当  $H \rightarrow 0$  时,该式退化为弹性输流管道的固-液耦合振动方程,这个特性与 Maxwell 粘弹性材料的本构关系是完全一致的

(2) 图 3(a)、3(b)给出了在  $\beta = 0.1, H = 1000$  时简支 Maxwell 模型粘弹性输流管道的无量纲流速与一、二、三阶模态的无量纲频率的实部及虚部之间的函数关系。当  $u = 0$  时,  $\omega$  为实数,随着流速的增加,  $\omega$  的实部随之减小,而虚部为零。当流速增加到  $u = 1$  时,第一阶模态频率

完全消失, 这对应于管道运动的发散。当越过了  $u =$  的临界点后, 第一阶模态频率完全变为虚数。如果流动速度进一步增加, 管道运动会在  $u = 2$  处以第二阶模态形式发散, 并且当流速再稍高一点时, 第一、二阶模态合成, 且频率变为共轭复数, 这表明管道发生了耦合模态颤振。上述情况与弹性输流管道几乎完全一样。

(3) 图4(a)和图4(b)给出了  $\nu = 0.1, H = 10$  时 Maxwell 模型粘弹性输流管道的无量纲流速与一、二、三阶模态的无量纲频率的实部及虚部之间的函数关系。结果表明, 每阶模态都有两个不同的复频率解。以第一阶模态为例, 当  $u = 0$  时,  $\omega$  为实数, 且随着流速的增加,  $\omega$  的实部随之减小, 而虚部为零。在  $u = 2$  之前都是此种情形。这说明, 在  $u = 2$  之前, 两个复频率解是相同的。从  $u = 2$  开始,  $\omega$  的实部的两个解明显不同, 其中一个解与弹性管道一样, 而另一个解从  $u = 2$  处则变为零, 直到  $u =$  时两个实部解又变为相同, 且均为零。与弹性管道相同的实部解相对应的虚部解为图4(b)中的上半平面的一支, 而与另一个实部解相对应的虚部解为图4(b)中的下半平面的一支, 并且这两个虚部解都是在  $u = 2$  时开始不等于零。正是图4(b)中下半平面的这一支的解说明, 管道在  $u = 2$  时开始发散。这说明, 当  $H$  较小时, Maxwell 模型简支粘弹性输流管道的发散临界流速小于简支弹性输流管道的发散临界流速, 且  $H$  越小, 发散临界流速越小, 这种现象从图5(a)和图5(b)(即  $\nu = 0.1, H = 100$ ) 及图6(a)和图6(b)(即  $\nu = 0.1, H = 1$ ) 看得非常清楚, 前者的发散临界流速为  $u = 3$ , 后者的发散临界流速为  $u = 1$ 。从曲线上看,  $\omega$  的虚部与  $u$  的曲线是一个横放的“桃子”形,  $H$  越小, “桃子”的尖越长,  $H$  越大, “桃子”的尖越短, 甚至完全消失而几乎与弹性管道相同。一阶模态上的这种情况在二阶模态及更高阶模态上有同样的表现。例如, 弹性管道在  $u = 2$  处以二阶模态形式发散, 而在  $\nu = 0.1, H = 10$  时, 二阶发散临界流速为  $u = 5.5$ 。

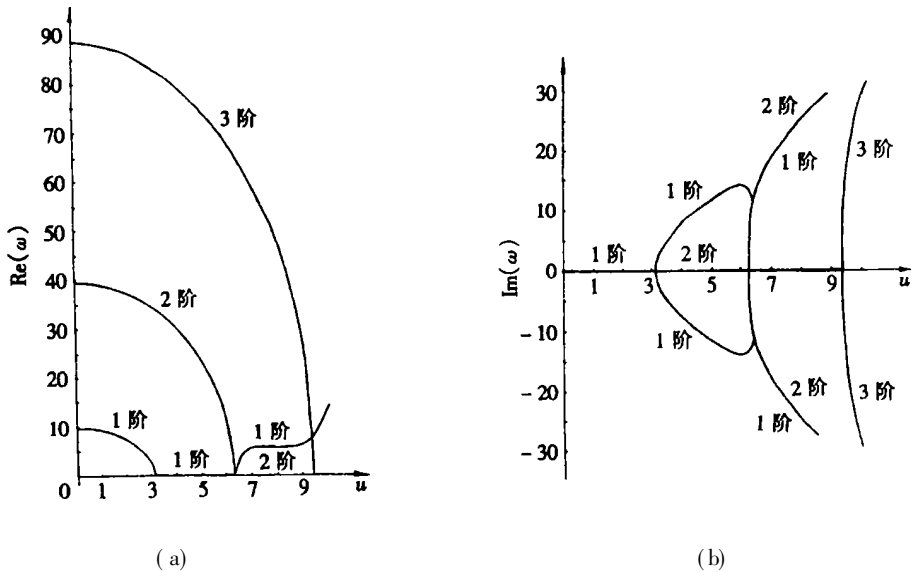


图3 前三阶模态无量纲复频率的实部和虚部与无量纲流速的变化曲线( $\nu = 0.1, H = 1000$ )

(4) 图4、图5表明, 当  $H$  不太小时, 尽管发散临界流速减小了, 但与弹性输流管道相比, 发生耦合模态颤振的临界流速几乎没有变化。但图6的结果表明, 当  $H$  进一步减小, 则发生耦合模态颤振的临界流速将大于弹性输流管道的同一流速。就图6而言, 在  $\nu = 0.1, H = 1$  时, 耦合模态颤振的临界流速为  $u = 8.1$ 。计算结果表明, 随着  $H$  的进一步减小, 颤振的临界

流速还会进一步增大

(5) 计算结果表明, 质量比不影响发散临界流速的大小 图 7 给出了  $\mu = 0.5, H = 10$  的计算结果, 它的发散临界流速与图 4 中的结果完全相同 但是, 它会使得耦合模态颤振的临界流速变大, 甚至会消除耦合模态颤振 例如, 图 4 表明,  $\mu = 0.1, H = 10$  时, 颤振临界流速  $u = 2$ ; 而图 7 表明,  $\mu = 0.5, H = 10$  时, 该颤振临界流速为  $u = 7$ , 当  $H$  进一步减小, 例如  $\mu = 0.5, H = 1$  时, 则不发生一、二阶耦合模态颤振(文中未给出曲线图)

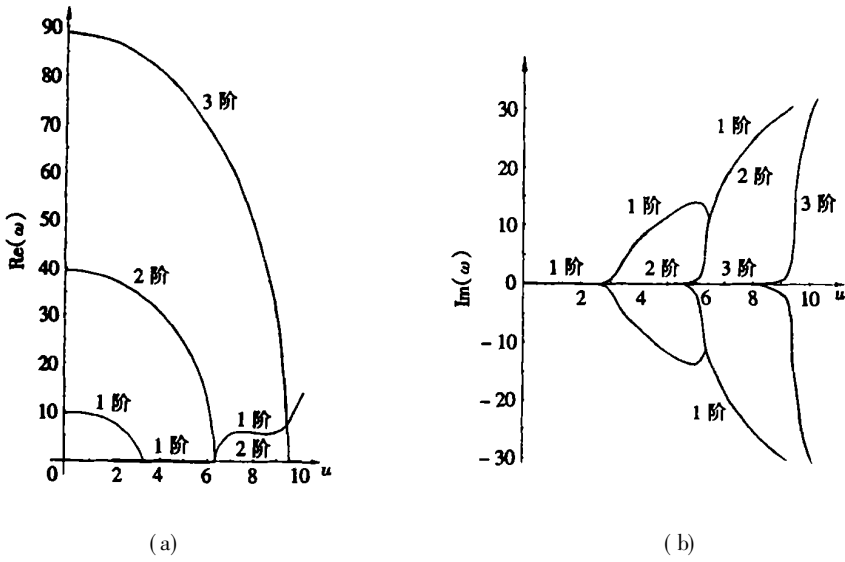


图 4 前三阶模态无量纲复频率的实部和虚部与无量纲流速的变化曲线( $\mu = 0.1, H = 10$ )

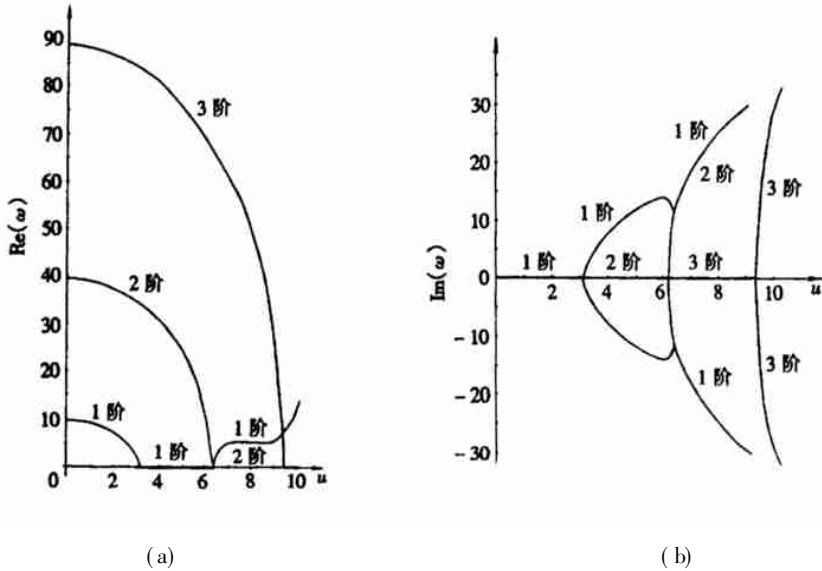


图 5 前三阶模态无量纲复频率的实部和虚部与无量纲流速的变化曲线( $\mu = 0.1, H = 100$ )

## 4 结 论

(1) 对于简支 Maxwell 模型粘弹性输流管道, 当无量纲松弛时间  $H$  趋于无穷大时, 其静力

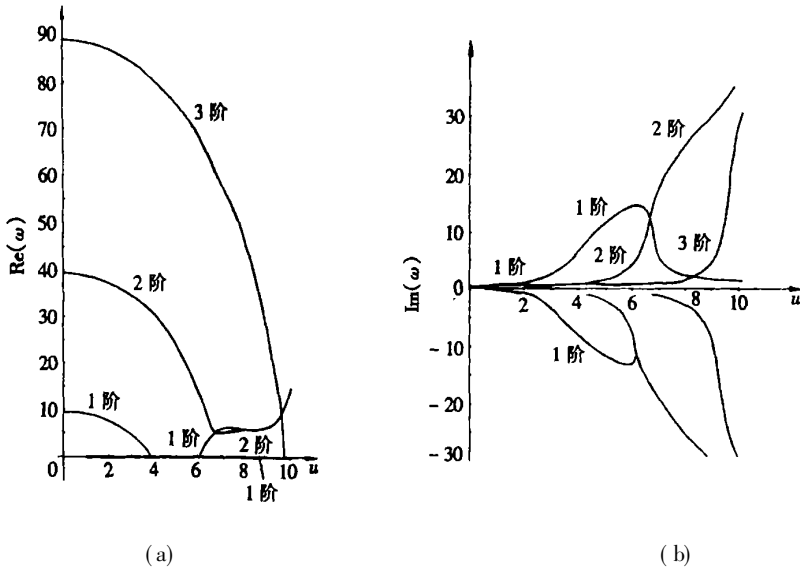


图 6 前三阶模态无量纲复频率的实部和虚部与无量纲流速的变化曲线(  $\nu = 0.1, H = 1.0$  )

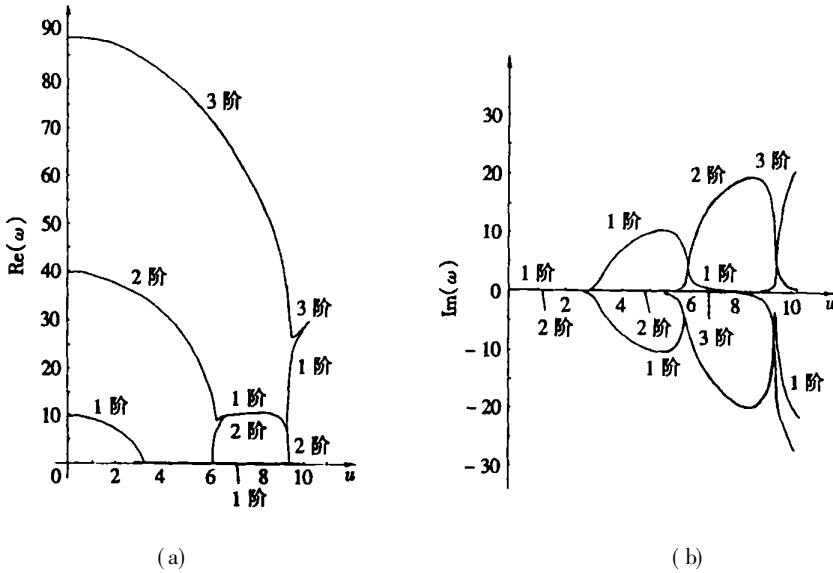


图 7 前三阶模态无量纲复频率的实部和虚部与无量纲流速的变化曲线(  $\nu = 0.5, H = 10$  )

特性和动力特性与弹性输流管道完全相同。实际上,当  $H$  达到  $10^3$  量级时即可将其按弹性管道处理。甚至在  $H$  为  $10^2$  量级时,按弹性管道处理也不会带来太大的误差。

(2) 在  $H$  小于  $10^2$  量级时,  $H$  对于 Maxwell 模型粘弹性输流管道的静力特性和动力特性有明显影响,即  $H$  越小,发散临界流速越小,耦合模态颤振临界流速越大。

(3) 由于发散是静力失稳,所以质量比  $\nu$  对发散临界流速没有影响,但对动力失稳有显著影响。质量比较大时,随着  $H$  的减小,可推迟甚至不发生耦合模态颤振。

(4) 无论是从物理上还是从数学上讲,对于弹性输流管道,其每阶模态都对应于一对共轭复频率解。但对 Maxwell 模型粘弹性输流管道来说,其每阶模态对应的是两个不相同的复频率。

解 正因为如此,才会使 Maxwell 模型粘弹性输流管道在  $H$  较小时与弹性输流管道在静力特性和动力特性上有着明显差异

### [参 考 文 献]

- [1] Chen S S. 圆柱结构的流动诱发振动[M]. 冯振宇、张希农译. 北京:石油工业出版社,1993,108-109.
- [2] Paidoussis M P, Issid N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, 33(3): 267-294.
- [3] Namachchivaya N S, Tien W M. Non-linear dynamics of supported pipe conveying pulsating fluid. Subharmonic resonance[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1989, 24(3): 185-196.
- [4] Namachchivaya N S, Tien W M. Non-linear dynamics of supported pipe conveying pulsating fluid. Combination resonance[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1989, 24(3): 197-208.
- [5] Namachchivaya N S, Tien W M. Bifurcation behavior of nonlinear pipes conveying pulsating flow[J]. Journal of Fluids and Structures, 1989, 3(5): 609-629.
- [6] 梁波,唐家祥. 输液管道动力特性与动力稳定性的有限元分析[J]. 固体力学学报, 1993, 14(2): 167-170.
- [7] 王世忠,刘玉兰,黄文虎. 输送流体管道的固液耦合动力学研究[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(11): 987-993.
- [8] 冯振宇,赵凤群. 固液耦合 Timoshenko 管道的稳定性分析[J]. 应用力学学报, 1999, 16(3): 47-52.
- [9] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1990,80.

## Stability Analysis of Maxwell Viscoelastic Pipes Conveying Fluid With Both Ends Simply Supported

ZHAO Feng\_qun<sup>1</sup>, WANG Zhong\_min<sup>1</sup>, FENG Zhen\_yu<sup>2</sup>, LIU Hong\_zhao<sup>3</sup>

(1 School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P R China;

2 Department of Basic Courses, Chang'an University, Xi'an 710064, P R China;

3 School of Mechanical and Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P R China)

**Abstract:** On the basis of some studies of elastic pipe conveying fluid, the dynamic behavior and stability of Maxwell viscoelastic pipes conveying fluid with both ends simply supported, which are gyroscopic conservative system, were investigated by using the finite difference method and the corresponding recurrence formula. The effect of relaxation time of viscoelastic materials on the variation curve between dimensionless flow velocity and the real part and imaginary part of dimensionless complex frequencies in the first three order modes were analyzed concretely. It is found that critical flow velocities of divergence instability of Maxwell viscoelastic pipes conveying fluid with both ends simply supported decrease with the decrease of the relaxation time, while after the onset of divergence instability (buckling) critical flow velocities of coupled\_mode flutter increase with the decrease of the relaxation time. Particularly, in the case of greater mass ratio, with the decrease of relaxation time, the onset of coupled\_mode flutter delays, and even does not take place. When the relaxation time is greater than  $10^3$ , stability behavior of viscoelastic pipes conveying fluid is almost similar to the elastic pipes conveying fluid.

**Key words:** viscoelastic pipe conveying fluid; stability; relaxation time; coupled\_mode flutter