

文章编号: 1000-0887(2001) 12-1267-11

# 函数空间多体挠性结构系统动力学、 稳定性与控制的研究<sup>\*</sup>

徐建国<sup>1</sup>, 贾军国<sup>2</sup>

(1. 佛山大学 信息科学与工程系, 广东 佛山 528000; 2. 郑州工业大学 数力系, 郑州 450002)

(钱伟长推荐)

**摘要:** 利用现代数学方法, 在函数空间中研究了一类无穷维系统动力学、稳定性与控制问题。首先提出并建立了具有阻尼、陀螺部件和约束阻尼的多拓扑结构多挠体分布参数系统动力学控制模型; 其次给出并论证了多体挠性结构特征、系统分析结果——可控可观性充要条件、稳定性理论和系统的渐近性质。研究的结果扩充和发展了本领域关于多挠体系统动力学与控制的理论成果, 具有重要的工程意义。

**关键词:** 多挠体系统; 动力学; 稳定性; 控制; 函数空间

**中图分类号:** O317; O313. 7; O231. 4      **文献标识码:** A

## 引 言

随着现代科学和工程技术的发展与需要, 尤其是航天事业已进入实用阶段, 以大型挠性空间结构(LFSS)为研究对象, 以系统的动力学、稳定性和控制为研究内容的科研课题已成为当前国内外十分活跃的前沿研究领域。例如空间站和载人飞船, 其主体是多舱段的大型空间结构, 并带有太阳帆板、天线等可伸展弹性附件, 还要求有交会对接的能力, 这是一种典型的多体复杂大系统。研究这种要求设计阶段即能预知后果且难于作在轨实验的多体复杂系统的动力学、稳定性和控制等基本规律性, 分析和设计精确的控制规律, 对完成载人航天飞行等一系列高科技任务具有十分重要的意义。

由于这种多体挠性空间结构复杂系统具有无穷多个自由度, 本质上是分布参数的连续系统; 就其控制而言, 实质上是对分布参数的实际系统施加控制, 以使控制系统具有期望的运动特性。其中的关键和基本问题包括: 系统运动是否可变和控制规律如何构造等, 即系统的分析和综合; 挠性空间结构系统的可变性取决于系统的挠性结构特征——可控性、可观性和稳定性及系统的渐近特性, 这些正是本文研究的主题。

由于系统的不确定性和控制系统的鲁棒性要求, 因而本文对系统的物理、力学模型的具体随空布局(Configuration)和系统参数的精确性不加考虑, 而仅仅认为系统的模型是由算子方程描述的由多挠性体组成的空间结构。本文首先提出并建立了具有阻尼、陀螺部件和约束阻尼

\* 收稿日期: 1999\_12\_15; 修订日期: 2001\_05\_16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19402014); 广东省自然科学基金资助项目(960528)

作者简介: 徐建国(1964—), 男, 河南潢川人, 副教授, 博士。

的多拓扑结构多挠体分布参数动力学控制模型;其次在统一的函数空间(如 Hilbert 空间)中对系统的发展方程进行分析和研究,通过算子演算并利用算子的谱和半群理论,给出并论证了系统分析结果——可控可观性充要条件、稳定性结论和系统的渐近性质。

关于二阶控制系统(1)(见下文)的研究一直为国内外研究者所关注。与以往的工作<sup>[1~4]</sup>相比,本文的研究是基于分布参数的实际系统而不是离散化后的近似系统(否则,可能产生“控制溢出”和“观测溢出”问题,即 Spillover 问题),同时全面地考虑了阻尼、陀螺部件和约束阻尼对系统的影响,因而这些研究不仅是构造控制规律的基础,而且更符合实际具有一般性,扩充和发展了本领域分布参数系统控制的理论研究成果,具有重要的工程意义。

## 1 动力学控制系统模型的建立及系统重构、谱分析

在本节,我们首先用广义 Hamilton 积分\_变分原理推导出具有阻尼、陀螺部件和约束阻尼的多拓扑结构多挠体动力学分布参数二阶系统控制模型;进而,为系统分析的需要,将系统重新构造,利用非奇异算子变换,将二阶系统化标准的一阶控制系统状态方程的形式,然后对一阶系统的主算子进行谱分析,最后给出系统的解存在唯一的结论和解的表达形式。

由于多体系统的基本元素有三:1)链式拓扑结构多体系统(见图 1(a));2)环式拓扑结构多体系统(见图 1(b))和 3)树状拓扑结构多体系统(见图 1(c)),而任意一种多体系统可由上述三种基本多体元素组合而成。因此在这里我们考虑的多体系统为图 1 所示,而研究的结果适合于任何的多体系统。

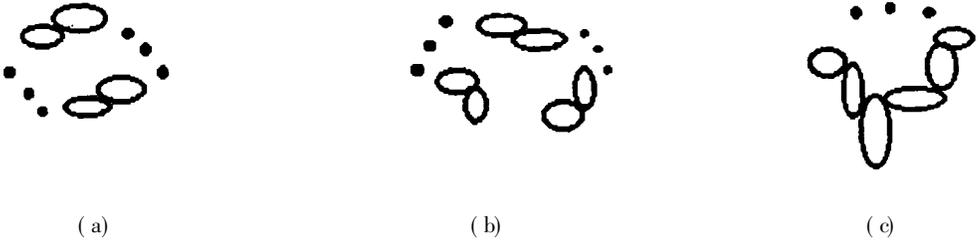


图 1 多拓扑结构多挠体系统

设  $w(r, t)$  是挠性体  $\Omega = \sum_{n=1}^N \Omega_n$  在  $r$  处、 $t$  时刻的响应(位移),其中  $\Omega_n (n = 1, 2, \dots, N)$  为第  $n$  个挠性体。由于系统的动能  $T$  和势能  $V$  分别为:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w^T M \dot{w} + w^T G w) d\Omega, \quad V = \int_{\Omega} w^T K w d\Omega,$$

其中  $M$  为质量算子,  $M = \sigma(r) I$ ,  $\sigma(r)$  为挠性体  $\Omega$  的密度分布函数,  $I$  为单位算子;  $G$  为陀螺部件或陀螺分布<sup>[2]</sup>相关的陀螺算子<sup>[3, 4]</sup>(又称角动量储存算子);  $K$  为刚度微分算子。

系统在非有势力下所做的虚功为

$$\delta A = \int_{\Omega} (D \dot{w})^T \delta w d\Omega + \int_{\Omega} (F w)^T \delta w d\Omega,$$

其中  $f_D = D \dot{w}$ ,  $f_{CD} = F w$  分别为阻尼力(如挠性体内部结构阻尼、外部比例阻尼等)和约束阻尼力<sup>[4]</sup>;而  $D$ 、 $F$  分别为阻尼算子和约束阻尼算子。

由广义 Hamilton 积分\_变分原理<sup>[5]</sup>,并考虑到挠性体  $\Omega$  受控制力  $f(r, t)$  的作用,可推得多拓扑结构多挠体动力学分布参数控制系统模型:

$$M \ddot{w}(r, t) + (D + G) \dot{w}(r, t) + (K + F) w(r, t) = f(r, t). \quad (1)$$

系统(1)的边界条件为

$$Lw(r, t) = 0 \quad r \in \partial \Omega, \quad (2)$$

其中  $L$  为适当的微分算子,  $\partial \Omega$  为多挠体  $\Omega$  的边界。

取 Hilbert 状态空间

$$L^2(\Omega) = \left\{ w(r, t) \mid \int_{\Omega} |w(r, t)|^2 d\Omega < \infty, w(r, t) \text{ 满足边界条件(2)} \right\},$$

其上内积和范数控制按通常  $L^2(\Omega)$  内积和范数所定义。

下面给出 Hilbert 空间  $L^2(\Omega)$  上挠性结构系统(1)中算子满足的一些假设条件, 而这些假设均为挠性体系结构特征, 与实际工程背景基本相符, 不失一般性。

设在 Hilbert 空间  $L^2(\Omega)$  中, 质量算子  $M$  为自伴正定算子, 其定义域为全空间  $L^2(\Omega)$ ; 刚度微分算子  $K$  是自伴正定闭稠定算子, 且其具有紧预解算子,  $0 \in \rho(K)$  (算子  $K$  的预解集或称正则集); 阻尼算子  $D$  为伴正定算子, 陀螺算子  $G$  和约束阻尼算子  $F$  均为反自伴算子, 且其定义域  $\text{Dom}(D)$ ,  $\text{Dom}(G)$ ,  $\text{Dom}(F)$  均包含  $\text{Dom}(K^{1/2})$ 。

假设系统(1)的控制器敏感器分别为点控制器和点观测器, 即  $p$  个点控制器分别置于  $c_1, c_2, \dots, c_p$  处,  $q$  个点观测器分别置于  $s_1, s_2, \dots, s_q$  处, 控制力  $f(r, t)$  和输出分量  $y_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) 分别为:

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^p \delta(r - c_k) u_k(t), \quad y_k(t) = \begin{cases} w(s_k, t) & \text{对位移敏感器,} \\ \dot{w}(s_k, t) & \text{对速度敏感器.} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $u_k(t)$  为第  $k$  个输入分量。上述假设给出了挠性结构控制器和观测器的空间配置结构, 与分布式控制器和观测器比较, 其易于实现。

由于算子  $M$  的非奇异性, 令  $u(r, t) = M^{1/2}w(r, t)$ , 代入(1)式, 经整理得

$$\ddot{u}(r, t) + (M^{-1/2}DM^{-1/2} + M^{-1/2}GM^{-1/2})u(r, t) + (M^{-1/2}KM^{-1/2} + M^{-1/2}FM^{-1/2})u(r, t) = M^{-1/2}f(r, t),$$

根据上述算子假设, 这里  $D' = M^{-1/2}DM^{-1/2}$ ,  $G' = M^{-1/2}GM^{-1/2}$ ,  $K' = M^{-1/2}KM^{-1/2}$ ,  $F' = M^{-1/2}FM^{-1/2}$  分别与  $D, G, K, F$  具有相同的算子性质。为方便计, 仍将它们记为原来的算子符号。同样, 将  $f'(r, t) = M^{-1/2}f(r, t)$  仍记为  $f(r, t)$ , 则有

$$\ddot{u}(r, t) + (D + G)u(r, t) + (K + F)u(r, t) = f(r, t). \quad (4)$$

再设  $z_1 = K^{1/2}u$ ,  $z_2 = \dot{u}$ , 新的状态变量记为  $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ ; 进一步, 根据上述状态变量代换, 引进“能量范数”空间, 记作  $H_E = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , 其上“能量内积”和“能量范数”分别定义为

$$\langle x, y \rangle_E = \langle x_1, y_1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle x_2, y_2 \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \|x\|_E = \langle x, x \rangle_E^{1/2}, \quad (5)$$

其中  $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in H_E$ ,  $y = (y_1^T, y_2^T)^T \in H_E$ 。在上述内积之下,  $H_E$  成为一 Hilbert 空间。

下面将在  $H_E$  中考虑问题。

定义输入空间  $U = C^p$ , 输出空间  $Y = C^q$ , 从而挠性结构系统二阶发展方程(1)与下述一阶形式等价, 即受控挠性结构系统的状态方程为

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad (6)$$

$$y = Cz, \quad (7)$$

其中  $u(t) \in L^2([0, T]: U)$ ,  $y(t) \in L^2([0, T]: Y)$ ,  $z \in H_E$ ; 并且  $A = A_1 + A_2$ ;  $D(A) \rightarrow H_E$ ,  $B: U \rightarrow W \times W$ ,  $C: D(C) \rightarrow Y$ , 这里  $W = H^{-(n/2)-\varepsilon}(\Omega)$  是 Sobolev 空间<sup>[6]</sup>,  $n$  为  $\Omega$  的维数,  $\varepsilon >$

0, 而

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & K^{1/2} \\ -K^{1/2} & -D-G \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -FK^{-1/2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \delta(r - c_1) & \dots & \delta(r - c_p) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_q \end{bmatrix},$$

$$C_k z = \begin{cases} K^{1/2} M^{1/2} w(s_k, t) & \text{对位移传感器} \\ M^{1/2} w(s_k, t) & \text{对速度传感器} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, q$$

引理 1.1 算子  $A = A_1 + A_2$  具有紧预解算子。

证明 首先证明  $A_1$  具有紧预解算子。为此对  $A_1$  作如下分解

$$A_1 = A_{11} + A_{12}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & K^{1/2} \\ -K^{1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D-G \end{bmatrix}.$$

根据算子假设, 存在  $\lambda_0 > 0$ , 使得  $(\lambda_0 I - K)^{-1}$  为紧算子, 可见  $\lambda_0 \in \rho(A_{11})$ , 且  $R(\lambda_0, A_{11}) = (\lambda_0 I - A_{11})^{-1}$  是紧算子; 由预解方程容易得到  $R(\lambda_0, A_1) = R(\lambda_0, A_{11})[I + A_{12}R(\lambda_0, A_{11})]$ ; 由于  $\text{Dom}(D + G) \supset \text{Dom}(K^{1/2})$ , 所以  $A_{12}R(\lambda_0, A_{11})$  是有界算子, 故  $R(\lambda_0, A_1)$  是紧算子, 即  $A_1$  具有紧预解算子。

类似上面的证明, 同理可知  $A = A_1 + A_2$  具有紧预解算子。这是因为  $\text{Dom}(F) \supset \text{Dom}(K^{1/2})$ ,  $K^{-1/2}$  是紧算子, 所以  $FK^{-1/2}$  是紧算子, 从而  $A_2$  是紧算子, 当然是有界的; 这样对  $A = A_1 + A_2$  而言, 算子  $A$  是算子  $A_1$  的一个有界扰动, 由于  $A_1$  具有紧预解算子, 那么  $A$  同样具有紧预解算子, 类似的证明可参见文献[7]的附录 A.1。证毕。

下面进行系统的模态谱分析。考虑系统(6)及其共轭系统的本征值问题

$$A \varphi_k(r) = \lambda_k \varphi_k(r) \quad \varphi_k(r) \in H_E, \quad A^* \psi_k(r) = \mu_k \psi_k(r) \quad \psi_k(r) \in H_E \quad (8)$$

为简单计, 总假设特征值重数为 1, 否则可类似讨论。

引理 1.2 对本征值问题(8), 则有

- 1) ①  $A$  的本征值集合  $\{\lambda_k\}$  可作排列:  $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$ ; ② 本征向量集合  $\{\varphi_k(r)\}$  构成 Hilbert 空间  $H_E$  上一完全正交基。
- 2) ① 共轭本征值集合  $\{\mu_k\} = \{\lambda_k\}$ ; ② 若经排列使得  $\lambda_k = \mu_k$ , 则本征向量具有下述正交关系:  $\langle \varphi_i(r), \varphi_j(r) \rangle_E = \delta_{ij}, \langle \varphi_i(r), A \varphi_j(r) \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$ 。

证明 本引理的证明可利用引理 1.1 的结论并根据 Riesz-Schauder 关于紧算子的谱理论<sup>[8]</sup>, 容易获证。

根据算子  $A$  的结构和状态 Hilbert 空间  $H_E$  的内积的定义(5) 及算子  $D$  的正定性, 不难验证  $\text{Re} \langle A_1 x, x \rangle_E = -\langle Dx_2, x_2 \rangle_{L^2(\Omega)}$ , 其中  $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in H_E$ ; 可知  $A_1$  是  $H_E$  上的耗散算子, 再由本文关于算子定义域的假设知  $A_1$  的稠定性是显然的, 由于  $A_1$  具有紧预解算子, 故存在  $\lambda_0 > 0$ , 使得算子  $\lambda_0 I - A_1$  的值域是全空间  $H_E$ , 根据算子半群理论<sup>[9]</sup> 中的 Lumer-Phillips 定理知,  $A_1$  生成压缩强连续半群; 再由  $A_2$  的有界性知,  $A = A_1 + A_2$  是  $H_E$  上一强连续半群  $T(t) (t \geq 0)$  的无穷小生成元, 结合引理 1.2, 将得到

定理 1.1 挠性空间结构系统(6) 存在唯一解

$$z(r, t) = T(t)z(r, 0) + \int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (9)$$

且上述解中  $A$  生成的半群算子  $T(t)$  可按系统的本征函数展开唯一描述:

$$T(t)h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \phi_k(r), h \rangle_E \phi_k(r) \quad t \geq 0, h \in H_E \quad (10)$$

证明 由引理 1.2 知, 算子  $A$  的本征值共轭成对出现, 进而可如下排列,  $\dots, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ , 其中  $\lambda_k = \bar{\lambda}_k, k = 1, 2, \dots$  根据本征函数  $\{\phi_k(r)\}_{k=-\infty}^{\infty}$  的完全性, 将状态方程(6)的解  $z(r, t)$  按本征函数展开:  $z(r, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \phi_k(r)$ , 并将其代入原状态方程(6)中可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k(t) \phi_k(r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \lambda_k \phi_k(r) + Bu$$

上式两边分别同共轭本征向量  $\phi_k(r)$  作内积, 并利用正交性得

$$\dot{a}_k(t) = \lambda_k a_k(t) + \langle \phi_k(r), Bu \rangle_E, \quad a_k(0) = \langle \phi_k(r), z(r, 0) \rangle_E$$

解上常微分方程有:

$$a_k(t) = e^{\lambda_k t} a_k(0) + \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \langle \phi_k(r), Bu \rangle_E d\tau$$

并将其代入  $z(r, t)$  按本征函数展开式得

$$z(r, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \phi_k(r), z(r, 0) \rangle_E \phi_k(r) + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k(t-\tau)} \langle \phi_k(r), Bu(\tau) \rangle_E \phi_k(r) d\tau$$

与解的形式(9)比较, 得解算子半群  $T(t)$  具有(10)式. 证毕.

## 2 系统的可控性、可观性和稳定性

有了上面的准备工作, 下面即可深入研究系统的动力学特性.

考虑挠性结构系统状态方程(6)、(7), 可以看出, 控制算子  $B$  和观测算子  $C$  均为无界算子, 按常规技巧<sup>[10]</sup>, 将状态空间扩大到  $W = Z = H^{-(n/2)-\varepsilon}(\Omega)$ , 缩小到  $\underline{W} = \underline{Z} = H^{-(n/2)+\varepsilon}(\Omega)$ , 此时可视算子  $B$  和  $C$  为有界算子一样讨论可控性和可观性.

由于无穷维分布参数系统精确可控性是指系统可达集等于全空间, 对于一般的系统, 精确可控是不可能的. 因此, 在这里, 我们研究系统的近似可控性; 类似地, 研究系统近似可观性.

定义 2.1 挠性结构系统(6)在  $[0, T]$  上近似可控, 是指若对任意  $z_d \in H_E$  和  $\delta > 0$ , 存在  $u(t) \in L^2([0, T]; U)$ , 使得  $\|z(r, T) - z_d\|_E < \delta$ .

引理 2.1<sup>[10]</sup> 系统(6)在  $[0, T]$  上近似可控的充要条件: 对任意  $t \in [0, T]$ , 若  $B^* T^*(t)g = 0$ , 则  $g = 0$ . 这里  $B^*$ ,  $T^*(t)$  分别为控制算子  $B$  和半群算子  $T(t)$  的共轭算子.

设系统(6)的本征解为  $\{\lambda_k, \phi_k(r)\}$  以及其共轭系统的本征解为  $\{\mu_k, \phi_k(r)\}$ , 且  $\lambda_k = \mu_k$ , 并令  $\phi_k(r) = (\eta_k(r), \zeta_k(r))^T, \phi_k(r) = (\eta_k^*(r), \zeta_k^*(r))^T; U_k = (\eta_k(s_1), \eta_k(s_2), \dots, \eta_k(s_q))^T, V_k = (\zeta_k^*(c_1), \zeta_k^*(c_2), \dots, \zeta_k^*(c_p))^T$ , 则

定理 2.1 系统(6)在  $[0, T]$  上近似可控的充要条件为

$$E_k = (\phi_k^T(c_1), \phi_k^T(c_2), \dots, \phi_k^T(c_p))^T \neq 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (11)$$

证明 首先证对  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, V_k \neq 0$  当且仅当  $E_k \neq 0$ . 这是简单的, 因为经过计算可知算子  $A$  的共轭算子

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -K^{-1/2} + K^{-1/2}F \\ K^{1/2} & -D + G \end{bmatrix},$$

对共轭本征值问题  $A^* \phi_k(r) = \mu_k \phi_k(r)$  展开, 容易证明  $V_k \neq 0$  当且仅当  $E_k \neq 0$ .

以下计算算子  $B^* T^*(t)$  的表达式. 根据控制算子  $B$  的形式, 易知其共轭算子  $B^*: W \times W \rightarrow U, B^* f = \int_{\Omega} B^T f(r) d\Omega = (f_2^T(c_1), f_2^T(c_2), \dots, f_2^T(c_p))^T$ , 其中  $f(r) = (f_1^T(r), f_2^T(r))^T$ , 故  $B^* \phi_k(r) = (\zeta_k^*(c_1), \zeta_k^*(c_2), \dots, \zeta_k^*(c_p))^T = V_k$ . 再由算子半群  $T(t)$  的表达式(10) 并根据共轭算子的定义不难求得共轭半群算子  $T^*(t)g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \varphi_k(r), g \rangle_E \phi_k(r)$ , 其中  $g \in H_E$ . 由此便得到

$$B^* T^*(t)g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \varphi_k(r), g \rangle_E V_k. \tag{12}$$

下面即可证明可控的充要条件.

必要性证明: 若系统近似可控, 而假设对某正整数  $k_0$ , 使得  $E_{k_0} = 0$ , 则有  $V_{k_0} = 0$ . 此时在(12) 式中令  $g = \phi_{k_0}(r)$ , 得  $B^* T^*(t)g = e^{\lambda_{k_0} t} V_{k_0} = 0$ ; 从而由引理 2.1 知,  $g = \phi_{k_0}(r) = 0$ , 此与  $\phi_{k_0}(r)$  为相应于本征值  $\mu_{k_0}$  的本征函数矛盾, 故有  $E_k \neq 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

充分性证明: 用反证法. 假设系统不是近似可控的, 依定义, 存在  $g \neq 0$ , 使得

$$B^* T^*(t)g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \varphi_k(r), g \rangle_E V_k = 0$$

对于共轭算子半群  $T^*(t)$ , 其无穷小生成元为  $A^*$ , 依半群理论中 Hille-Yosida 定理<sup>[9]</sup> 知, 存在  $\mu_0 > 0$ , 使得当  $\text{Re} \mu > \mu_0$  时,  $\mu \in \rho(A^*)$  (共轭算子  $A^*$  的正则集); 由算子半群的逆表达式知, 对任意  $\text{Re} \mu > \mu_0$  都有

$$R(\mu, A^*)g = (\mu I - A^*)^{-1}g = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} T^*(t)g dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_k(r), g \rangle_E}{-\mu - \lambda_k} \phi_k(r).$$

上预解表示式对任意  $\mu \neq \lambda_k$  都是连续成立的, 且除去一阶极点  $\mu = \lambda_k$  外, 其定义了一个解析函数; 而

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} B^* T^*(t)g dt = B^* R(\mu, A^*)g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_k(r), g \rangle_E}{-\mu - \lambda_k} B^* \phi_k(r).$$

令  $\Gamma_i$  是以  $\lambda_i$  为中心、半径为  $\varepsilon$  的小圆  $\{\mu \mid |\mu - \lambda_i| \leq \varepsilon\}$ , 以使得  $|\lambda_i - \lambda_j| > \varepsilon (j \neq i)$ , 即  $\lambda_j (j \neq i)$  点均落在  $\Gamma_i$  圆外. 根据解析函数连续性, 由 Cauchy 积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \varphi_k(r), g \rangle_E}{-\mu - \lambda_k} V_k d\mu = \langle \varphi_i(r), g \rangle_E V_i = 0,$$

由于  $E_i \neq 0$  亦即  $V_i \neq 0$ , 故必有  $\langle \varphi_i(r), g \rangle_E = 0$ ; 同理对任意  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \langle \varphi_k(r), g \rangle_E = 0$ . 根据本征向量集  $\{\varphi_k(r)\}$  是 Hilbert 空间  $H_E$  中的完全正交基知  $g = 0$ , 此与  $g \neq 0$  矛盾, 故系统(6) 必是近似可控的. 定理到此证毕.

可控性和可观性是两个对偶命题, 下面讨论系统(6)、(7)的近似可观性.

定义 2.2 系统(6)、(7)在  $[0, T]$  上近似可观是指对任意  $t \in [0, T]$ , 若  $CT(t)z_0 = 0$ , 则  $z_0 = 0$ 。

定理 2.2 系统(6)、(7)在  $[0, T]$  上近似可观的充要条件是

$$P_k = (\Phi_k^T(s_1), \Phi_k^T(s_2), \dots, \Phi_k^T(s_q))^T \neq 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (13)$$

证明 首先类似上一定理的证明易知,  $P_k \neq 0$  当且仅当  $U_k = (\eta_k(s_1), \eta_k(s_2), \dots, \eta_k(s_q))^T \neq 0$  以下计算  $CT(t)h, h \in H_E$ 。

根据输出算子  $C$  的定义及其表达式得其分量算子

$$C_l \Phi_k(r) = \begin{cases} \eta_k(s_l) & \text{对位移敏感器} \\ \lambda_k \eta_k(s_l) & \text{对速度敏感器} \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, q,$$

从而  $C \Phi_k(r) = J_k (\eta_k(s_1), \eta_k(s_2), \dots, \eta_k(s_q))^T = J_k U_k$  这里

$$J_k = \begin{bmatrix} \alpha_{k1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{kq} \end{bmatrix}, \quad \alpha_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{第 } l \text{ 个敏感器为位移敏感器,} \\ \lambda_k & \text{第 } l \text{ 个敏感器为速度敏感器.} \end{cases}$$

可见矩阵  $J_k$  是非奇异的, 结合半群算子  $T(t)$  的表达式得

$$CT(t)h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \Phi_k(r), h \rangle_E J_k U_k \quad (14)$$

正像定理 2.1 利用(12)式进行可控性充要条件证明一样, 这里同样利用上述(14)式可类似证明可观性的充要条件是  $P_k \neq 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots$  定理获证。

定理 2.1 和定理 2.2 互为对偶命题, 它们分别揭示了系统近似可控、近似可观的充要条件。由(11)、(13)式知, 若点控制器和点观测器的配置点  $c_1, c_2, \dots, c_p$  和  $s_1, s_2, \dots, s_q$  分别与挠性空间结构系统(6)的模态零点及其共轭系统的模态零点至少有一个不重合时, 那么系统就分别是近似可控、近似可观的。可控性和可观性是挠性系统的基本结构特征, 如果系统没有近似可控、近似可观性, 那么对挠性空间结构实施控制就无从谈起。

稳定性亦是挠性结构系统的一个最基本的结构特性, 下面对其加以研究。考虑不受外力作用的挠性结构系统。

$$M \ddot{w}(r, t) + (D + G) \dot{w}(r, t) + (K + F) w(r, t) = 0 \quad (15)$$

上述二阶发展方程描述的系统与下述一阶发展方程描述的系统等价

$$\dot{z} = Az = A_1 z + A_2 z, \quad (16)$$

其中  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & K^{1/2} \\ -K^{1/2} & -(D + G) \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -FK^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}.$

定义 2.3 系统(15)或(16)是渐近稳定的(相应于受控系统(1)或(6)是开环渐近稳定的)是指对任意  $z_0 \in H_E, \|T(t)z_0\|_E \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ; 而指数渐近稳定性是指存在常数  $M_0 > 0, \beta_0 > 0$ , 使得  $\|T(t)\|_E \leq M_0 e^{-\beta_0 t}, t \geq 0$ 。

先讨论无约束阻尼系统的稳定性。此时, 约束阻尼算子  $F = 0$  即  $A_2 = 0$  的情形, 算子半群  $T(t)$  的无穷小生成元为  $A = A_1$ 。

由于算子  $K^{-1}$  的紧性, 从而  $K^{-1/2}$  是紧算子; 又因为  $D$  的自伴性和  $G$  反自伴性及  $\text{Dom}(D), \text{Dom}(G)$  均包含  $\text{Dom}(K^{1/2})$ , 易知  $DK^{-1/2}, iGK^{-1/2}$  均为有界算子, 即  $(D + G)K^{-1/2} \in B(L^2(\Omega))$ , 不妨令  $\rho = \|(D + G)K^{-1/2}\|_E$ ; 又依阻尼算子的正定性知存在常数  $\alpha > 0$ , 使得当  $z \in \text{Dom}(D), \langle Dz, z \rangle \geq \alpha \langle z, z \rangle$ , 取正常数  $\mu$ , 满足  $\mu < \min\{\alpha, 4\alpha/(\rho + \alpha\lambda_0^{-1/2})^2 + 4J^{-1}\}$ , 则  $\xi_0 =$

$\frac{1}{2}(\alpha - \mu)^{-1/2} \mu^{1/2}(\rho + \mu \lambda_0^{-1/2}) < 1$ ; 这里  $\lambda_0 = \inf\{\lambda, \lambda \in \sigma(K)\}$ ,  $\sigma(K)$  为算子  $K$  的谱集, 同时  $\alpha = \inf\{\lambda, \lambda \in \sigma(D)\}$ . 构造有界线性算子  $P$  及其逆算子  $P^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\mu K^{-1/2} & I \end{bmatrix} \in B(H_E), \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mu K^{-1/2} & I \end{bmatrix} \in B(H_E).$$

令  $A_P = P^{-1}A_1P$ , 经计算可得

$$\lambda I - A_P = \begin{bmatrix} (\mu + \lambda)I & -K^{1/2} \\ [K^{1/2} + \mu[\mu I - (D + G)]K^{-1/2}] & \lambda I + (D + G) - \mu I \end{bmatrix},$$

取  $\lambda = \tau + i\omega$ ,  $\tau > 0$ , 及  $\eta_0$  使得  $0 < \eta_0 < 1 - \xi_0$ , 则对任意  $z = (z_1^T, z_2^T)^T \in H_E, z_1 \in L^2(\Omega), z_2 \in \text{Dom}(K^{1/2})$ , 经计算不难知道, 存在  $\mu_0 = \min\{\eta_0 \mu, \eta_0(\alpha - \mu)\} > 0$ , 使得下述估计式成立 (参考文献 [11] 中的证明)

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle (\lambda I - A_P)z, z \rangle_E &= (\tau + \mu) \|z_1\|^2 + \mu \text{Re}\langle [\mu I - (D + G)]K^{-1/2} z_1, z_2 \rangle + \\ &\quad \tau \|z_2\|^2 + \text{Re}\langle (D + G)z_2, z_2 \rangle \geq \\ &= (\tau + \eta_0 \mu) \|z_1\|^2 + [\tau + \eta_0(\alpha - \mu)] \|z_2\|^2 \geq (\tau + \mu_0) \|z\|_E^2. \end{aligned}$$

根据上不等式知  $\|(\lambda I - A_P)^{-1}\|_E \leq 1/(\text{Re } \lambda + \mu_0)$ ; 由算子半群 Hille-Yosida 定理知, 算子  $A_P$  生成的半群  $e^{tA_P}$  满足  $\|e^{tA_P}\|_E \leq e^{-\mu_0 t}$ . 由半群性质可作推导:  $T(t) = e^{tA_1} = e^{tPA_P P^{-1}} = P e^{tA_P} P^{-1}$ , 故  $\|T(t)\|_E \leq \|P\|_E \|e^{tA_P}\|_E \|P^{-1}\|_E \leq M_0 e^{-\mu_0 t}$ , 由此可得下述稳定性定理.

**定理 2.3** 不含约束阻尼的挠性结构系统 (15) 或 (16) (此时  $F = 0$  即  $A_2 = 0$ ) 是指数渐近稳定的, 相应于 (1) 或 (6) 的受控系统具有开环指数渐近稳定性.

继而, 我们再考虑含约束阻尼的系统稳定性. 此时约束阻尼算子  $F \neq 0$  即  $A_2 \neq 0$ , 同样由于  $\text{Dom}(F) \supset \text{Dom}(K^{1/2})$ , 由  $F$  的反自伴性和  $K^{-1/2}$  的紧性知算子  $FK^{-1/2}$  和  $A_2$  是紧算子.

**引理 2.2** 对任意给定  $\delta > 0$ , 存在常数  $\beta_0 > 0$ , 使得算子  $A = A_1 + A_2$  在半平面  $\text{Re } \lambda \geq -\beta_0 + \delta$  内的谱点仅由有限个孤立本征值构成.

**证明** 现记  $A_1$  生成的半群为  $S(t)$ ,  $A = A_1 + A_2$  生成的半群为  $T(t)$ . 由于  $A_2$  为紧算子, 根据算子半群扰动理论 [12] 知

$$T(t) = S(t) + S_0(t) \quad t \geq 0, \tag{17}$$

这里当  $t > 0$  时,  $S_0(t)$  也是紧算子.

根据定理 2.3,  $\|S(t)\| \leq M_0 e^{-\mu_0 t}$ ; 由 Hille-Yosida 定理知当  $\text{Re } \lambda > -\mu_0$  时,  $\lambda \in \rho(A_1)$ . 应用半群算子  $S(t)$  与生成元  $A_1$  间的谱映象理论 [12] 得, 对给定的  $t_0 > 0$ , 存在  $\beta_0, 0 < \beta_0 < 1$ , 使得半群  $S(t)$  当  $t \geq t_0$  时的谱集合包含在圆  $|\lambda| \leq \beta_0$  内, 由第一节系统的谱分析易知, 算子  $A_1$  的谱集  $\sigma(A_1)$  是由可数个孤立本征值构成, 由 (11) 得知,  $A = A_1 + A_2$  生成的半群  $T(t)$  的谱  $\sigma(T(t))$  位于圆  $\{\lambda \mid |\lambda| \leq e^{-\mu_0 t} \delta\}$  外部分仅有有限个孤立本征值; 再利用谱映象理论知, 本引理结构成立, 证毕.

由引理 1.2 知算子  $A = A_1 + A_2$  的本征值共轭成对出现, 不妨假设算子  $A$  在半平面  $\text{Re } \lambda \geq 0$  上的本征值为  $\xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n$ ; 再设  $\Gamma_j$  是以  $\xi_j$  为圆心的小圆, 圆内不含  $A$  的其它谱点, 即取  $\varepsilon_j$  足够小使得  $|\xi_i - \xi_j| > \varepsilon_j, i, j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m, i \neq j$ . 则算子

$$Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (\lambda I - A_1 - A_2)^{-1} d\lambda \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m)$$

是相应于  $\xi_j$  的根子空间  $\Pi_j$  的投影算子. 根据文献 [12] 知

$$T(t)Q_j z = e^{\xi_j t} \sum_k f_k(z) p_k(t) \varphi_k(r),$$

其中  $k$  是特征值  $\xi_j$  的重数,  $f_k(\cdot)$  为有界线性泛函,  $p_k(t)$  为  $t$  的多项式,  $\varphi_k(r)$  是  $\Omega$  中本征向量空间的基. 由于本文假设本征值重数为 1 (否则可类似讨论), 故

$$T(t)Q_j z = e^{\xi_j t} f_j(z) p_j(t) \varphi_j(r) \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m).$$

参考文献 [13], 不难证明:

定理 2.4 含约束阻尼的挠性结构系统 (15) 或 (16) 及相应受控系统 (1) 或 (6) 的开环系统具有下述渐近特征:

$$\|z(r, t) - \sum_{j=-m}^m e^{\xi_j t} f_j(z_0) p_j(t) \varphi_j(r)\|_E \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty, \quad (18)$$

其中  $z(r, t)$  是系统的解,  $z_0$  为初值.

定理 2.3 说明, 挠性结构系统的 (指数) 渐近稳定性取决于系统是否有阻尼; 只要系统有阻尼, 则在适当条件下 (主要地,  $D$  是正定的), 系统是指指数渐近稳定的.

而定理 2.4 则揭示了, 若挠性结构系统具有约束阻尼, 那么挠性结构分布参数系统除有限个模态 (本征) 运动不稳定外, 其余模态 (本征) 运动都是指数渐近稳定的 (见 (18) 式); 约束阻尼对系统的稳定性有着重要影响; 当耦合控制器后, 适当配置极点, 可使整个系统 (指数) 渐近稳定.

### 3 例题分析

本节将应用第 1、2 节推得的结论, 研究具有结构阻尼悬臂梁振动的可控性、可观性和稳定性.

设悬臂梁是均匀、具有“渐近频率阻尼”<sup>[14]</sup> 的 Euler-Bernoulli 梁模型, 其纵向弹性振动方程为

$$\rho_a \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} - 2\xi \sqrt{EI\rho_a} \frac{\partial^3 w(r, t)}{\partial r^2 \partial t} + EI \frac{\partial^4 w(r, t)}{\partial r^4} = F(r, t), \quad (19)$$

其中  $\xi$  为阻尼系数, 其它参数意义如常,  $F(r, t)$  为控制力. 其边界条件为

$$\begin{cases} w(0, t) = w'(0, t) = 0, \\ -EIw'''(l, t) + 2\xi \sqrt{\rho_a EI} w''(l, t) = 0 \quad Elw''(l, t) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

为简单起见, 令  $\gamma = \rho_a/EI$ ,  $\alpha = -\xi \sqrt{\rho_a/EI}$ , 则  $\alpha = -\xi \sqrt{\gamma}$ . 定义如下算子:

$$Mw = \gamma w, \quad Dw = 2\alpha \partial^2 w / \partial r^2, \quad Kw = \partial^4 w / \partial r^4, \quad (21)$$

且<sup>[14]</sup>  $\text{Dom}(D) = \text{Dom}(K^{1/2}) = \{w \mid w \in H^2(0, l), w(0) = w'(0) = 0, w'(l) = 0\}$ ,  $\text{Dom}(K) = \{w \mid w \in H^4(0, l), w(0) = w'(0) = 0, w''(l) = w'''(l) = 0\}$ , 这里  $H^m(0, l)$  ( $m > 0$ ) 为  $(0, l)$  上的  $m$  阶 Sobolev 空间. 据此, 容易证明  $K$  是自伴正定算子, 且其逆  $K^{-1}$  是紧算子;  $D = 2\alpha K^{1/2}$ , 易验证存在常数  $\nu > 0$ , 使得  $\langle Dw, w \rangle \geq \nu \langle w, w \rangle$ , 即  $D$  亦是正定算子.

设悬臂梁采取点控制、点观测器模式, 则其状态方程可写为

$$z' = Az + Bu, \quad y = Cz, \quad (22)$$

这里方程 (22) 的意义与 (6)、(7) 相同, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma} D & -\frac{1}{\gamma} K \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 1. 系统的解

可以解出系统的模态解即算子  $A$  的本征值和本征向量分别为:

$$\lambda_{\pm i} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \Lambda_i^{1/2} / \sqrt{V}, \quad \varphi_{\pm i}(r) = (\lambda_{\pm i} \zeta_i(r), \zeta_i(r))^T \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} \Lambda_i = (\beta_i/l)^4, \cosh \beta_i \cos \beta_i + 1 = 0, \\ \zeta_i(r) = \left\{ \cosh(\beta_i r/l) - \cos(\beta_i r/l) - d_i [\sinh(\beta_i r/l) - \sin(\beta_i r/l)] \right\} / \sqrt{l}, \\ d_i = (\cosh \beta_i + \cos \beta_i) / (\sinh \beta_i + \sin \beta_i). \end{cases} \quad (24)$$

而共轭(伴随)系统本征解即算子  $A^*$  的本征值和本征向量分别为

$$\mu_{\pm i} = \lambda_{\pm i}, \quad \psi_{\pm i}(r) = (\lambda_{\pm i} \zeta_i(r), \Lambda_i^{1/2} \zeta_i(r))^T \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (25)$$

由  $K^{-1}$  的紧性, 故  $\{\zeta_i(r)\}_{i=1}^{\infty}$  构成  $L^2(0, l)$  中的完全正交基, 从而  $\{\varphi_{\pm i}(r)\}_{i=1}^{\infty}$  和  $\{\psi_{\pm i}(r)\}_{i=1}^{\infty}$  均构成状态空间上的完全正交基. 由定理 1.1 知, 系统存在唯一解, 且具有解的形式(9)、(10).

## 2. 可控性和可观性

考虑到系统的特征值重数为 1, 故由定理 2.1 和定理 2.2 知, 若

$$(\zeta_i(c_1), \zeta_i(c_2), \dots, \zeta_i(c_p))^T \neq 0, \quad (\zeta_i(s_1), \zeta_i(s_2), \dots, \zeta_i(s_q))^T \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (26)$$

则系统(22)是近似可控和近似可观的; 其中  $\zeta_i(r)$  见(24)式.

## 3. 稳定性

由于阻尼算子  $D$  的正定性, 由定理 2.3 知, 相应于受控系统(19)、(22)是开环指数渐近稳定的.

## 4 结 论

本文重点研究了多拓扑结构多挠体分布参数系统的可控性、可观性和稳定性等挠性结构特征. 研究表明, 对于具有阻尼、陀螺部件和约束阻尼的挠性体系统,

1) 系统具有唯一解的重要条件是刚度微分算子( $K$ )的预解算子  $(\lambda I - K)^{-1}$  具有紧性. 而工程实际中遇到的大多数微分算子, 如挠性梁、板、膜等的主算子都是这种类型的算子<sup>[15]</sup>.

2) 系统具有近似可控性、近似可观性的充要条件归结为点控制器、点观测量的配置结构. 只要配置点与挠性系统及其共轭系统的模态零点不重合, 那么系统就是近似可控、近似可观的.

3) 约束阻尼对系统的稳定性有着重要影响. 不含约束阻尼的系统的(指数)渐近稳定性取决于系统存在阻尼, 且在适当条件下(主要地, 阻尼是正定的), 系统是指数渐近稳定的; 具有约束阻尼的系统除有限个模态本征运动不稳定外, 其余模态本征运动都是(指数)渐近稳定的.

## [参 考 文 献]

- [1] Hughes P C, Skelton R E. Controllability and observability of linear matrix second order system[J]. ASME J Appl Mech, 1980, 47(2): 415—420.
- [2] Damaren C T, D'Eleuterio G M T. Controllability and observability of gyroelastic vehicles[J]. J Guidance Control Dynam, 1991, 14(5): 886—894.

- [3] Yong B, Mote C D J. Controllability and observability of distributed gyroscopic system[J]. ASME J Dynam Sys Meas Contr, 1991, **113**(1): 11—16.
- [4] 王照林. 运动稳定性及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
- [5] Goodstein H. Classical Mechanics [M]. 2nd ed. Reading, MA: Addison Wesley, 1980.
- [6] Curtain R, Prichard A. Infinite Dimensional System Theory [M]. New York: Springer\_Verlag, 1978.
- [7] Chen G, Fulling S A, Narcowich F J, et al. Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping[J]. SIAM J Appl Math, 1991, **51**(1): 266—301.
- [8] Taylor A E. Introduction to Functional Analysis [M]. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [9] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. Berlin: Springer\_Verlag, 1983.
- [10] Banks S P. State Space and Frequency Methods in the Control of Distributed Parameter Systems [M]. London: Peter Peregrints Ltd, 1983.
- [11] Huang F L. Some problems for linear elastic systems with damping[J]. Acta Math Sci, 1990, **10**(3): 319—326.
- [12] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators [M]. 2nd ed. Berlin: Springer\_Verlag, 1980.
- [13] YU Jing\_yuan, ZHU Guang\_tian. Asymptotic property of flying posture of long and thin flyer[J]. Science in China, Series A, 1984, **27**(9): 990—1002.
- [14] Balakrishann A V. Damping operators on continuum models of flexible structure: Explicit models for proportional damping in beam bending with end\_bodies[J]. Appl Math Optimiz, 1990, **21**(3): 315—334.
- [15] 钱学森, 宋建. 工程控制论[M]. 上册. 北京: 科学出版社, 1980.
- [16] 关肇直. 泛函分析讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1958.

## Study on Dynamics, Stability and Control of Multi\_Body Flexible Structure System in Functional Space

XU Jian\_guo<sup>1</sup>, JIA Jun\_guo<sup>2</sup>

(1. Department of Information Science and Engineering, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, P R China;

2. Department of Mathematics and Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, P R China)

**Abstract:** The dynamics, stability and control problem of a kind of infinite dimensional system are studied in the functional space with the method of modern mathematics. First, the dynamical control model of the distributed paramater system with multi\_body flexible and multi\_topological structure was established which has damping, gyroscopic parts and constrained damping. Secondly, the necessary and sufficient condition of controllability and observability, the stability theory and asymptotic property of the system were obtained. These results expand the theory of the field about the dynmaics and control of the system with multi\_body flexible structure, and have important engineering significance.

**Key words:** multi\_flexible\_body system; dynamics; stability; control; functional space