应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1255_07

# 一个集值映射的不动点定理*

阿米塔比·伯纳尔吉[1], 撒克·伯尔旺特·辛琪[2]

(1. 印度拉伯尔国立女子学院 数学系, 拉伯尔 492001; 2. 印度国家 B H S S, 加牙班德, 拉伯尔, 493889)

(钱伟长推荐)

摘要: 得到了从度量空间 $X$ (不必是完备的) 到 $X$ 的非空有界子集族 $\boldsymbol{B}(X)$ 的集值映射的一些不动点, 其结果推广了一些已有的结论·

关 键 词: 不动点; 集值映射; 度量空间
中图分类号: O189.2 文献标识码: A

## 引 言

Nadler[1] 开创了完备度量空间中多值映射不动点定理的研究· 此后, Reich[2], Khan[3], Kaulgud 和 Pai[4], Fisher[5~8], Rhoades 等[9] 和 Rhoadas[10,11], 等建立了一系列集值和多值映值的不动点定理·

Fisher[7] 利用一种全新的证明方法建立了一个新的不动点定理· Imdad[12] 用类似的方法, 部分推广了 Delbosco[13] 关于集值映射的不动点定理·

另一方面, Kiventidis[14] 得到了完备度量空间中自身映射 T 的不动点定理· 之后, Ray[15] 和 Rhoades 等[16] 把这一结果推广到三个映射的情形·

值得注意的是, 以上所有结果都要求映射中至少有一个是连续的并且空间是完备的·

近来, 非线性混合收缩映射, 即包含单值和集值的收缩型映射已经由 Mulkherjee[17], Naimpally, Singh 和 Whitfield[18] 等进行了研究·

本文证明了集值和单值映射的一个不动点定理, 这个定理推广了文献中的早期结果· 我们强调指出, 我们的定理不要求映射的连续性, 也不要求空间 $(X, d)$ 的完备性·

## 1 预备知识

设 $(X, d)$ 为度量空间, $\boldsymbol{B}(X)$ 为 $X$ 的所有非空有界子集组成的集合· 按[6] 和[9], 我们给出一些基本的预备知识· 对 $\boldsymbol{B}(X)$ 中所有的 $A$、$B$ 和 $X$ 中所有的 $x$, 函数 $\delta: \boldsymbol{B}(X) \times \boldsymbol{B}(X) \to [0, \infty)$ 和 $D: X \times \boldsymbol{B}(X) \to [0, \infty)$ 定义如下: $\delta(A, B) = \sup\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$, $D(x, A) = \inf\{d(x, a): a \in A\}$· 如果 $A$ 由一个点 $a$ 组成, 我们记 $\delta(A, B) = \delta(a, B)$· 如果 $B$ 也是由一个点 $b$ 组成, 则 $\delta(A, B) = d(a, b)$· 容易看出, 对 $\boldsymbol{B}(X)$ 中所有的 $A$、$B$、$C$ 和 $X$ 中所有的 $x$ 有 $\delta(A, A) = \mathrm{diam}A$, $D(x, A) \leqslant \delta(x, A)$, $\delta(A, B) = \delta(B, A)$, $\delta(A, B) \leqslant \delta(A,$

* 收稿日期: 1999_12_02
基金项目: 印度高校奖励委员会资助项目

$C)+\delta(C,B)$ 以及由 $\delta(A,B)=0$ 可推出 $A=B=\{a\}$.

如果 $x\in Fx$ 则称集值映射 F 有一个不动点 $x\in X$. $\boldsymbol{B}(X)$ 中的元素列 $\{A_n\}$ 称为是收敛到集合 $A\subseteq X$(即 $A_n\to A$), 如果

(i) 对任一 $a\in A$, 存在序列 $\{a_n\}$ 使得 $a_n\to a$, 其中对一切 $n\geqslant 1$ 有 $a_n\in A_n$;

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$, 存在一个 $N$ 使得对一切 $n\geqslant N$ 有 $A_n\subseteq A_\varepsilon$, 其中 $A_\varepsilon=\{x\in X:\exists\, a\in A$ 使得 $d(a,x)<\varepsilon\}$.

## 2 主要结果

定理　设 A 和 B 是 $X$ 到 $\boldsymbol{B}(X)$ 的映射, S 和 T 是 $X$ 自身的映射满足

$$\mathrm{A}(X)\subseteq \mathrm{T}(X),\quad \mathrm{B}(X)\subseteq \mathrm{S}(X). \tag{1}$$

对 $X$ 中所有的 $x$ 和 $y$,

$$\delta(\mathrm{A}x,\mathrm{B}y)\leqslant M(x,y)-w(M(x,y)), \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned}M(x,y)=\Big[\max\Big\{&d^2(\mathrm{S}x,\mathrm{T}y),\ \delta(\mathrm{S}x,\mathrm{A}x)\cdot\delta(\mathrm{T}y,\mathrm{B}y),\\&\frac12 D(\mathrm{S}x,\mathrm{B}y)\cdot D(\mathrm{T}y,\mathrm{A}x),\ \frac12\delta(\mathrm{S}x,\mathrm{A}x)\cdot D(\mathrm{T}y,\mathrm{A}x),\\&\frac12 D(\mathrm{S}x,\mathrm{B}y)\cdot\delta(\mathrm{T}y,\mathrm{B}y)\Big\}\Big]^{1/2}.\end{aligned}$$

这里, $w:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 是正实数集) 是对一切 $r>0$ 满足 $0<w(r)<r$ 的连续函数.

$$\mathrm{S}t\in\mathrm{A}t\Rightarrow \mathrm{AS}t=\mathrm{SA}t, \tag{3a}$$

$$\mathrm{T}t\in\mathrm{B}t\Rightarrow \mathrm{BT}t=\mathrm{TB}t,\qquad \text{对某些 } t\in X, \tag{3b}$$

$$\mathrm{T}(X)\ \text{是完备的}. \tag{4}$$

则A、B、S 和 T 有公共的不动点 $p\in X$. 并且 $p$ 是 A 和 S 及 B 和 T 的满足 $\mathrm{A}p=\mathrm{B}p=\{p\}$ 的唯一公共不动点.

证明　因为 $\mathrm{A}(X)\subseteq\mathrm{T}(X)$, $\mathrm{B}(X)\subseteq\mathrm{S}(X)$, 所以对任意 $x_0\in X$, 可以求得 $x_1,x_2\in X$ 使得 $\mathrm{T}x_1\in\mathrm{A}x_0=Z_0$, $\mathrm{S}x_2\in\mathrm{B}x_1=Z_1$ 等等, 于是我们可以归纳定义如下序列 $\{Z_n\}$:

$$\begin{cases}\mathrm{T}x_{2n+1}\in\mathrm{A}x_{2n}=Z_{2n}\\ \mathrm{S}x_{2n+2}\in\mathrm{B}x_{2n+1}=Z_{2n+1}\end{cases}\qquad (n=0,1,2,\dots). \tag{5}$$

为简单起见, 记

$$\delta_n=\delta(Z_n,Z_{n+1}).$$

根据(2), 我们有

$$\begin{aligned}\delta_{2n}=&\ \delta(Z_{2n},Z_{2n+1})=\delta(\mathrm{A}x_{2n},\mathrm{B}x_{2n+1})\leqslant\\&M(x_{2n},x_{2n+1})-w(M(x_{2n},x_{2n+1}))=\\&\Big[\max\Big\{\delta^2(Z_{2n-1},Z_{2n}),\ \delta(Z_{2n-1},Z_{2n})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n+1}),\\&\frac12\delta(Z_{2n-1},Z_{2n+1})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n}),\\&\frac12\delta(Z_{2n-1},Z_{2n})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n}),\\&\frac12\delta(Z_{2n-1},Z_{2n+1})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n+1})\Big\}\Big]^{1/2}-\end{aligned}$$

$$w\left(\left[\max\left\{\delta^2(Z_{2n-1},Z_{2n}),\ \delta(Z_{2n-1},Z_{2n})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n+1}),\right.\right.\right.$$
$$\frac{1}{2}\delta(Z_{2n-1},Z_{2n+1})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n}),$$
$$\frac{1}{2}\delta(Z_{2n-1},Z_{2n})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n}),$$
$$\left.\left.\left.\frac{1}{2}\delta(Z_{2n-1},Z_{2n+1})\cdot\delta(Z_{2n},Z_{2n+1})\right\}\right]^{1/2}\right).$$

如果对任意 $n$ 有 $\delta_{2n}>\delta_{2n-1}$, 则

$$\delta_{2n}\leqslant\delta_{2n}-w(\delta_{2n})<\delta_{2n},$$

这是矛盾的, 因此

$$\delta_{2n}\leqslant\delta_{2n-1}-w(\delta_{2n-1}).$$

类似地, 我们有

$$\delta_{2n+1}\leqslant\delta_{2n}-w(\delta_{2n}),$$

所以, 对每个 $n$ 有

$$\delta_{n+1}\leqslant\delta_n-w(\delta_n).$$

由此得到

$$\sum_{i=0}^{n}w(\delta_i)\leqslant\delta_0-\delta_{n-1}\leqslant\delta_0,$$

从而级数收敛并且 $\lim\limits_{n\to\infty}w(\delta_n)=0$.

因为$\{\delta_n\}$是非负下降数列, 所以它是收敛的. 记这个极限为 $d$. 假设 $d>0$, 则因为 $w$ 是连续的, 我们将有$\lim\limits_{n\to\infty}w(\delta_n)=w(d)=0$, 这是矛盾的. 因此 $d=0$.

令 $z_n$ 是集合$Z_n$ 的任一点, $n=0,1,2,\ldots$. 现在我们希望证明$\{z_n\}$是Cauchy 序列. 假设它不是Cauchy 序列, 则对任意正数 $\varepsilon$和任意正整数$k$, 存在两个正整数 $2m_k$ 和 $2n_k$ 使得 $2m_k>2n_k>k$ 同时 $\varepsilon<d(z_{2m_k},z_{2n_k})\leqslant\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k})$. 令$2m_k$ 是满足$2m_k>2n_k>k$, $\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k})>\varepsilon$和 $\delta(Z_{2m_k-2},Z_{2n_k})\leqslant\varepsilon$的最小的偶数, 则

$$\varepsilon<\delta(Z_{2n_k},Z_{2m_k})\leqslant\delta(Z_{2n_k},Z_{2m_k-2})+\delta_{2m_k-2}+\delta_{2m_k-1}\leqslant$$
$$\varepsilon+[\delta_{2m_k-2}+\delta_{2m_k-1}].$$

上式中令 $k\to\infty$, 我们得到

$$\lim_{k\to\infty}\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k})=\varepsilon \tag{6}$$

利用三角不等式, 我们有

$$|\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k+1})-\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k})|\leqslant\delta_{2n_k},$$
$$|\delta(Z_{2m_k+1},Z_{2n_k+1})-\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k+1})|\leqslant\delta_{2m_k},$$

和
$$|\delta(Z_{2m_k+1},Z_{2n_k+2})-\delta(Z_{2m_k+1},Z_{2n_k+1})|\leqslant\delta_{2n_k+1}.$$

由(6)和上面的不等式, 我们有

$$\varepsilon=\lim_{k\to\infty}\delta(Z_{2m_k},Z_{2n_k+1})=\lim_{k\to\infty}\delta(Z_{2m_k+1},Z_{2n_k+1})=$$
$$\lim_{k\to\infty}\delta(Z_{2m_k+1},Z_{2n_k+2}).$$

根据(2), 我们有

$$\delta(Z_{2m_k+1},Z_{2n_k+2})=\delta(Ax_{2m_k+1},Bx_{2n_k+2})\leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&M(x_{2m_k+1}, x_{2n_k+2}) - w(M(x_{2m_k+1}, x_{2n_k+2})) = \\
&\Big[\max\Big\{\delta^2(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+1}),\ \delta(Z_{2m_k+1}, Z_{2m_k+1})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2n_k+2}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2m_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2m_k+1})\cdot\delta(Z_{2m_k+1}, Z_{2n_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2n_k+2})\Big\}\Big]^{1/2} - \\
&w\Big(\Big[\max\Big\{\delta^2(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+1}),\ \delta(Z_{2m_k+1}, Z_{2m_k+1})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2n_k+2}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2m_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2m_k+1})\cdot\delta(Z_{2m_k+1}, Z_{2n_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2n_k+2})\Big\}\Big]^{1/2}\Big) = \\
&\Big[\max\Big\{\delta^2(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+1}),\ \delta(Z_{2m_k}\cdot\delta_{2n_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2m_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2m_k+1})\cdot\delta(Z_{2m_k+1}, Z_{2n_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta_{2n_k+1}\Big\}\Big]^{1/2} - \\
&w\Big(\Big[\max\Big\{\delta^2(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+1}),\ \delta_{2m_k}\cdot\delta_{2n_k+1}, \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta(Z_{2n_k+1}, Z_{2m_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2m_k+1})\cdot\delta(Z_{2m_k+1}, Z_{2n_k+1}), \\
&\tfrac{1}{2}\delta(Z_{2m_k}, Z_{2n_k+2})\cdot\delta_{2n_k+1}\Big\}\Big]^{1/2}\Big)\cdot
\end{aligned}
$$

令 $k \to \infty$, 我们得到

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon - w(\varepsilon),$$

由此有 $w(\varepsilon) \leqslant 0$, 这是矛盾的• 所以$\{z_n\}$是一个Cauchy 序列• 于是$\{z_{2n}\}$也是Cauchy 序列并且它属于$T(X)$• 因为$T(X)$是完备的, 所以$\{z_{2n}\}$收敛到点$p = Tv$, 其中$v \in X$• 因此 $z_n \to v$• 利用三角不等式对 $n \in \mathbf{N}$有

$$\delta(p, Bv) \leqslant \delta(p, Ax_{2n}) + \delta(Ax_{2n}, Bv)\cdot$$

利用(2), 我们得到

$$\delta(p, Bv) \leqslant \delta(p, Ax_{2n}) + [M(x_{2n}, v) - w(M(x_{2n}, v))]\cdot \tag{7}$$

因为$\{z_{2n}\}$及它的任一子序列都收敛于$p$, 所以由(7) 和$\{z_n\}$的定义得到

$$\delta(p, Bv) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(p, Bv), \text{即}\{p\} = Bv = \{Tv\}\cdot$$

但是 $B(X) \subseteq S(X)$，所以存在 $u \in X$ 使得 $\{Su\} = Bv = \{Tv\}$。利用(2)，我们得到

$$\delta(Au, Bv) \leqslant M(u, v) - w(M(u, v)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(Au, Bv),$$

因此 $Au = Bv$。于是

$$\{p\} = Bv = \{Tv\} = \{Su\} = Au. \tag{8}$$

由(3a)和(8)，我们有

$$Ap = ASu = SAu = \{Sp\}.$$

现在，我们有

$$\delta(Ap, Bv) \leqslant M(p, v) - w(M(p, v)) \leqslant \delta(Ap, p),$$

因此 $Ap = \{p\}$。

类似地，由(3b)得到 $\{p\} = Bp = \{Tp\}$。因此，$p$ 是 A、B、S 和 T 满足 $\{p\} = Ap = Bp$ 的一个公共不动点。由(2)容易推出这个不动点是唯一的。

如果在定理 1 中取 $S = T$，则得到下面推论：

**推论 1** 设 A 和 B 是 $X$ 到 $\boldsymbol{B}(X)$ 的映射，T 是 $X$ 到自身中的映射满足

$$A(X) \subseteq T(X) \text{ 且 } B(X) \subseteq T(X), \tag{9}$$

对 $X$ 中的所有 $x, y$ 有

$$\delta(Ax, By) \leqslant M(x, y) - w(M(x, y)), \tag{10}$$

其中

$$M(x, y) = \Big[\max\Big\{d^2(Tx, Ty),\ \delta(Tx, Ax)\cdot\delta(Ty, By),\ \frac{1}{2}D(Tx, By)\cdot D(Ty, Ax),\ \frac{1}{2}\delta(Tx, Ax)\cdot D(Ty, Ax),\ \frac{1}{2}D(Tx, By)\cdot\delta(Ty, By)\Big\}\Big]^{1/2}.$$

这里 $w: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 是正实数集合) 是对所有 $r > 0$ 满足 $0 < w(r) < r$ 的连续函数。

对任意 $t \in X$，

$$Tt \in At \Rightarrow ATt = TAt, \tag{11a}$$

$$Tt \in Bt \Rightarrow BTt = TBt; \tag{11b}$$

$$T(X) \text{ 是完备的}, \tag{12}$$

则 A、B 和 T 有一个公共的不动点 $p \in X$。并且，$p$ 是 A、B 和 T 的唯一公共不动点，满足条件 $Ap = Bp = \{p\}$。

如果在定理 1 中取 $A = B$，则得到下述推论：

**推论 2** 设 A 是 $X$ 到 $\boldsymbol{B}(X)$ 的映射，S 和 T 是 $X$ 到 $X$ 中的自身映射，满足

$$A(X) \subseteq T(X) \cap S(X), \tag{13}$$

对 $X$ 中的一切 $x$ 和 $y$ 有

$$\delta(Ax, Ay) \leqslant M(x, y) - w(M(x, y)), \tag{14}$$

其中

$$M(x, y) = \Big[\max\Big\{d^2(Sx, Ty),\ \delta(Sx, Ax)\cdot\delta(Ty, Ay),\ \frac{1}{2}D(Sx, Ay)\cdot D(Ty, Ax),\ \frac{1}{2}\delta(Sx, Ax)\cdot D(Ty, Ax),$$

$$\frac{1}{2}D(\mathrm{S}x, \mathrm{A}y)\cdot\delta(\mathrm{T}y, \mathrm{A}y)\Big\}\Big]^{1/2}\cdot$$

这里 $w: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 是正实数集合) 是对所有 $r > 0$ 满足 $0 < w(r) < r$ 的连续函数·

对某些 $t \in X$,

$$\mathrm{S}t \in \mathrm{A}t \Rightarrow \mathrm{AS}t = \mathrm{SA}t, \tag{15a}$$

$$\mathrm{T}t \in \mathrm{A}t \Rightarrow \mathrm{AT}t = \mathrm{TA}t; \tag{15b}$$

$$\mathrm{T}(X) \text{ 是完备的}, \tag{16}$$

则A、S和T有一个公共的不动点 $p \in X$· 并且 $p$ 是A、S和T的唯一公共不动点, 满足条件 $\mathrm{A}p = \{p\}$·

如果在定理1中取A= B和S= T, 则得到如下推论:

推论3 设A是 $X$ 到 $\boldsymbol{B}(X)$ 的映射, T是 $X$ 自身的映射满足

$$\mathrm{A}(X) \subseteq \mathrm{T}(X), \tag{17}$$

对 $X$ 中的一切 $x$ 和 $y$, 有

$$\delta(\mathrm{A}x, \mathrm{A}y) \leqslant M(x, y) - w(M(x, y)), \tag{18}$$

其中

$$M(x, y) = \Big[\max\Big\{d^2(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y),\ \delta(\mathrm{T}x, \mathrm{A}x)\cdot\delta(\mathrm{T}y, \mathrm{A}y),$$
$$\frac{1}{2}D(\mathrm{T}x, \mathrm{A}y)\cdot D(\mathrm{T}y, \mathrm{A}x),\ \frac{1}{2}\delta(\mathrm{T}x, \mathrm{A}x)\cdot D(\mathrm{T}y, \mathrm{A}x),$$
$$\frac{1}{2}D(\mathrm{T}x, \mathrm{A}y)\cdot\delta(\mathrm{T}y, \mathrm{A}y)\Big\}\Big]^{1/2}\cdot$$

这里 $w: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 是正实数集) 是对一切 $r > 0$ 满足 $0 < w(r) < r$ 的连续函数·

对某些 $t \in X$,

$$\mathrm{T}t \in \mathrm{A}t \Rightarrow \mathrm{AT}t = \mathrm{TA}t, \tag{19}$$

$$\mathrm{T}(X) \text{ 是完备的}, \tag{20}$$

则A和T有一个公共的不动点 $p \in X$· 并且 $p$ 是A和T的唯一公共不动点, 满足条件 $\mathrm{A}p = \{p\}$·

注1 我们的定理只要求 $\mathrm{T}(x)$ 是完备的, 而无须整个空间 $X$ 是完备的· 此外, 我们也没有对定理中涉及的任一函数(A, B, S或T) 强加连续性条件·

注2 对于它们的重合点处可交换[条件(3)] 的映射对, 已证明了本文的结果· 条件(3) 本质上是一种比相容性更弱的条件, 并且可以用[19] 中的命题2.2和[20] 中的例2.5来验证·

注3 我们的定理扩充、推广和改进了 Rhoades_Tiwari_Singh[16]、Ray[15]、Kiventidis[14]和 Liu[21] 的某些结果·

注4 根据以前推广到 $A_i$ 和 $B_i$, $i \in \mathbf{N}$ 的推论, 对无限序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 和 $\{B_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, 我们的定理仍然成立·

## [参 考 文 献]


[1] Nadler S D Jr. Multivalued contraction mapping[J]. Pacific J Math, 1969, **30**: 457—488.

[2] Reich S. Some results concerning contraction mappings[J]. Canad Math Bull, 1971, **14**: 121—124.

[3] Khan M S. A theorem on fixed point[J]. Math Semin Notes, 1976, **4**: 227—228.

[4] Kaulgud N N, Pai D V. Fixed point theorems for set valued mappings[J]. Nieuw Arch Wisk, 1975, **23**: 49—66.

[5] Fisher B. Set valued mappings on bounded metric spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 1980, **11**:

8—12.

[6] Fisher B. Common fixed point theorems for mappings and set valued mappings[J]. Rostock Math Kollor, 1981, **18**: 69—77.

[7] Fisher B. Set valued mappings on metric spaces[J]. Fund Math, 1981, **112**: 141—145.

[8] Fisher B. Common fixed points for mappings and set valued mappings in metric spaces[J]. Kyung-pook Math J, 1985, **25**: 35—42.

[9] Rhoades B E, Watson B. Fixed points for set valued mappings on metric spaces[J]. Math Japon, 1990, **35**(4): 735—743.

[10] Rhoades B E. Fixed point theorems for set valued mappings[J]. Math Semin Notes, 1982, **10**.

[11] Rhoades B E. Common fixed points of compatible set valued mappings[J]. Publ Math Debrecen, 1996, **48**(3_4): 237—240.

[12] Imdad M. On a fixed point theorem of Delbosco[J]. Aligarh Bull Math, 1990_91, **13**: 31—37.

[13] Delbosco D. A unified approach for all contractive mapping[J]. Jnanabha, 1986, **16**: 1—11.

[14] Kiventidis T. On fixed points in Hausdroff spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 1985, **16**(12): 1420—1424.

[15] Ray B K. On common fixed points in metric spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 1988, **19**(10): 960—962.

[16] Rhoades B E, Tiwari K, Singh G N. A common fixed point theorem for compatible mappings[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, **26**(5): 403—409.

[17] Mukherjee R N. On fixed points of single valued and set valued mappings[J]. J Indian Acad Math, 1982, **4**: 101—103.

[18] Naimpally S N, Singh S L, Whitefield T H M. Coincidence theorems for hybrid contraction[J]. Nachr, 1986, **127**: 177—180.

[19] Jungck G. Compatible mappings and common fixed points[J]. Internat J Math Math Sci, 1986, **9**(4): 771—779.

[20] Jungck G. Common fixed points of commuting and compatible maps on compacta[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, **103**: 977—983.

[21] Liu Z Q. A note on unigue common fixed point[J]. Bull Calcutta Math Soc, 1993, **85**: 469—472.

# A Fixed Point Theorem for Set_Valued Mappings

Amitabh Banerjee[1], Thakur Balwant Singh[2]

(1. Department of Mathematics, Govt D B Girls P G College, Raipur (M P), 492001, India;
2. Govt B H S S, Gariaband, Dist Raipur (M P), 493889, India)

**Abstract:** Fixed points for set_valued mappings from a metric space $X$ (not necessarily complete) into $\boldsymbol{B}(X)$, the collection of nonempty bounded subsets of $X$ are obtained. The result generalizes some known results.

**Key words:** fixed point; set_valued mappings; metric space