应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 01_0106_05

滑 冰 运 动 初 探*

胡 辉

(湘潭工学院 数理系, 湖南湘潭 411201)

(陈予恕推荐)

摘要: 建立了滑冰运动的一种力学模型并应用非完整力学中的 Routh 方程对其求解. 详细分析了滑冰时的两种局部有意义的常见的定常运动, 计算结果与实际观察到的现象是一致的.

关 键 词: 非完整力学; 滑冰; 定常运动
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

冰橇问题是非完整力学的一个经典问题, 它的解答是 C. A. Чаплыгин(1898 年) 和 C. Carathodory(1933 年) 完成的[1]. 文献[2] 对这种解答提出了质疑, 文献[3] 给出了另一种解. 然而这些解答中冰撬模型与实际运动员的滑冰运动相差甚远, 因此本文建立滑冰运动的一种力学模型, 应用非完整力学中的 Routh 方程给出了它的解法并详细讨论了两种有局部意义的常见的定常运动.

1 模型的建立

图 1 是滑冰鞋的示意图, 其底部的刀刃与水平冰面接触部分近似为一直线, 长度大约为 150 mm[4]. 图 2 表示一滑冰者在水平冰面上单足滑行, 将冰刀与滑冰者视为一整体, 其质量为 m, 质心在 G 点. 为简便起见将 1、2、3 轴视为系统的主轴, 其转动惯量分别用 A、B 和 C 表示, 设 K 为刀刃上的最低点, K 在 1 轴上, 由于刀刃近似为一直线, 我们不考虑人体与冰刀绕 3 轴的自转, 于是滑冰者绕质心的转角为 φ、θ(如图 2 所示), 质心 G 的坐标是 (x, y, z), K 点的坐标是 (x_K, y_K, o), G 和 K 之间的距离为 a, 于是

$$\left.\begin{aligned} x_K &= x + a\cos\theta\sin\varphi, \\ y_K &= y - a\cos\theta\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

冰刀所受的非完整约束方程为

$$\dot{x}_K \sin\varphi - \dot{y}_K \cos\varphi = 0, \tag{2}$$

式中字母上的小黑点代表对时间 t 的微分. 将(1) 对时间 t 求导后代入上式得出约束方程的另一种形式:

$$\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi - a\dot{\theta}\sin\theta = 0. \tag{3}$$

* 收稿日期: 1999_05_05; 修订日期: 2001_05_20
作者简介: 胡辉(1957—), 男, 湖南邵阳人, 副教授.

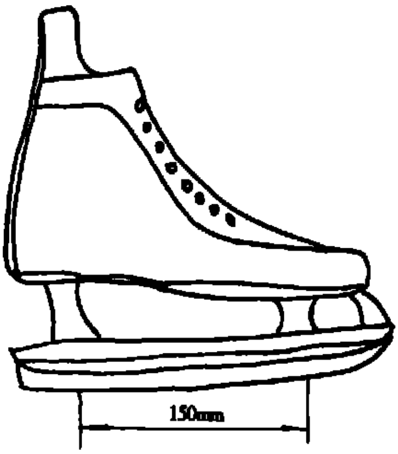

图　1

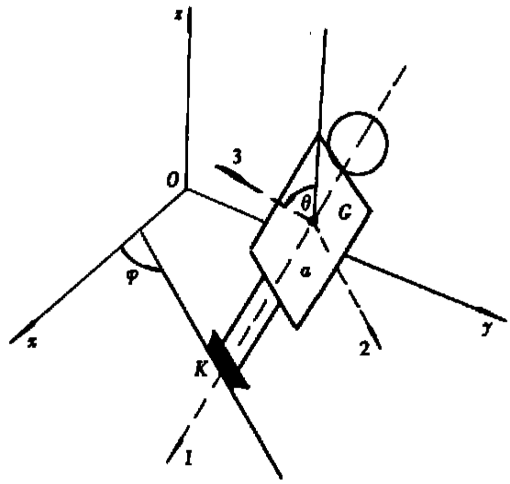

图　2

在坐标示 G123 中, 系统的角速度

$$\omega=\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}\sin\theta\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\cos\theta\end{bmatrix},\tag{4}$$

上面角速度的表达式与滚盘问题中滚盘的角速度相似[5], 区别是(4)中没有自转角 ψ. 系统的动能:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2),$$

由于 $z=a\sin\theta$ 并引用(4)式, 上式可化为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}(ma^2\cos^2\theta+B)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\dot{\varphi}^2,\tag{5}$$

系统势能

$$V=mga\sin\theta.\tag{6}$$

将(5)、(6)代入非完整力学中的 Routh 方程[1]并注意到约束方程(3)即得

$$\left.\begin{aligned}&m\ddot{x}=\lambda\sin\varphi,\\ &m\ddot{y}=-\lambda\cos\varphi,\\ &(ma^2\cos^2\theta+B)\ddot{\theta}=ma^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2-\\ &\qquad(C-A)\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-\\ &\qquad mga\cos\theta-\lambda a\sin\theta,\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\dot{\varphi}]=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

方程(3)与(7)组成了描述滑冰运动的微分方程组.

2　方程的解

积分(7)的第 4 式即得

$$\dot{\varphi}=C_1(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)^{-1},\tag{8}$$

式中积分常数

$C_1=(A\sin^2\theta_0+C\cos^2\theta_0)\dot{\varphi}_0$(下标"0"表示 $t=0$ 时该量之值)•

由(7)的前两式易知:

$$\lambda=m(\ddot{x}\sin\varphi-\ddot{y}\cos\varphi),\tag{9}$$

$$\ddot{x}\cos\varphi+\ddot{y}\sin\varphi=0\text{•}\tag{10}$$

将(3)对 t 求导后,(9)可改写为

$$\lambda=ma(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)-m\dot{\varphi}(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)\text{•}\tag{11}$$

(3)乘以 $(-\dot{\varphi})$ 后与(10)相加有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)=-a\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\text{•}\tag{12}$$

将(8)代入,得

$$\mathrm{d}(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)=-\frac{C_1a\sin\theta\mathrm{d}\theta}{A\sin^2\theta+C\cos^2\theta},\tag{13}$$

积分后有

$$\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=\frac{C_1a}{\sqrt{A(C-A)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C-A}{A}}\cos\theta\right)+C_2,\tag{14}$$

积分常数

$$C_2=\dot{x}_0\cos\varphi_0+\dot{y}_0\sin\varphi_0-\frac{C_1a}{\sqrt{A(C-A)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C-A}{A}}\cos\theta_0\right),$$

将上式代入(11)有

$$\lambda=ma(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)-m\dot{\varphi}\left[\frac{C_1a}{\sqrt{A(C-A)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C-A}{A}}\cos\theta\right)+C_2\right]\text{•}\tag{15}$$

把上式代入(7)的第3式,再将(8)代入整后即得

$$(ma^2+B)\ddot{\theta}=-\frac{C_1^2(C-A)\sin\theta\cos\theta}{(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)^2}-mga\cos\theta+\frac{maC_1\sin\theta}{A\sin^2\theta+C\cos^2\theta}\left[\frac{C_1a}{\sqrt{A(C-A)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C-A}{A}}\cos\theta\right)+C_2\right],\tag{16}$$

积分上式,得

$$(a^2+B)\dot{\theta}^2=C_3-C_1^2(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)^{-1}-2mga\sin\theta-\frac{2maC_1C_2}{\sqrt{A(C-A)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{C-A}{A}}\cos\theta\right)-\frac{ma^2C_1^2}{A(C-A)}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{C-A}{A}}\cos\theta\right)\right]^2,\tag{17}$$

式中 C_3 为积分常数,可由初始条件确定其值• 将上式的右端除以 (ma^2+B) 并用 $f(\theta)$ 表示之,上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{f(\theta)},\tag{18}$$

分离变量后积分有

$$t=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\pm\mathrm{d}\theta}{\sqrt{f(\theta)}},\tag{19}$$

从这一积分求得 $\theta(t)$,代入(8)积分后可得 $\varphi(t)$,于是由(15)得出 $\lambda(t)$,再将 $\lambda(t)$、$\varphi(t)$ 之值代入(7)的前两式,即可解得 $x(t)$、$y(t)$• 下面分析两种常见的定常运动•

1) $\ddot{\theta}=\dot{\theta}=0,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$

从(7)的第3式可知,这时有 $\lambda=0$, 而由(11)知这等价于

$$\dot{\varphi}(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)=0. \tag{20}$$

要上式成立可有两种情况:

a) $\dot{\varphi}=0$ 即 $\varphi=\varphi_0=$ 常数. 可见滑冰者要保持与地面垂直,他只能作匀速直线运动,这显然与实际滑冰运动是一致的. 这种运动长期稳定性的获得可能需要通过动动员的技巧来实现.

b) $\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=0$, 由于 $\dot{\theta}=0$, 因此此式与(3)联立解得 $\dot{x}=\dot{y}=0$, 即滑冰者在原地旋转,这是花样滑冰运动员经常表演的一种动作.

2) $\theta=\theta_0=\text{const}\neq 0, \dfrac{\pi}{2}$.

将(15)代入(7)的第3式并考虑到 C_2 之值可得

$$\dot{\varphi}^2-\frac{maV_0}{(C-A)\cos\theta_0}\dot{\varphi}+\frac{mga}{(C-A)\sin\theta_0}=0, \tag{21}$$

式中 $V_0=\dot{x}_0\cos\varphi_0+\dot{y}\sin\varphi_0$. 解上式有

$$\dot{\varphi}_{1,2}=\frac{maV_0}{2(C-A)\cos\theta_0}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4g(C-A)\cos^2\theta_0}{maV_0^2\sin\theta_0}}\right],$$

当 $\theta_0\to\dfrac{\pi}{2}$ 即 $\cos\theta_0\to 0$ 时应有 $\dot{\varphi}\to 0$, 因此上式根号前应取减号,所以

$$\dot{\varphi}=\omega_0=\frac{maV_0}{2(C-A)\cos\theta_0}\left[1-\sqrt{1-\frac{4g(C-A)\cos^2\theta_0}{maV_0^2\sin\theta_0}}\right], \tag{22}$$

使 $\dot{\varphi}$ 有解的条件是:

$$4g(C-A)\cos^2\theta_0\leqslant maV_0^2\sin\theta_0, \tag{23}$$

如果 θ_0 太小使上式不能成立,这时滑冰者会倾倒. (22)式给出了滑冰者动角速度 $\dot{\varphi}$ 与 θ_0 及质心初速度 V_0 之间的关系,可见要作曲线运动,滑冰者要向冰道内侧倾斜. 积分(22)有 $\varphi=\omega_0t+\varphi_0$, 由(15)式得 $\lambda=-m\omega_0V_0=\lambda_0=$ 常值,将 φ 与 λ 之值代入(7)的前二式即可解出

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\frac{V_0}{\omega_0}[\sin(\omega_0t+\varphi_0)-\sin\varphi_0],\\ y&=y_0+\frac{V_0}{\omega_0}[\cos\varphi_0-\cos(\omega_0t+\varphi_0)],\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

此时系统质心作圆周运动.

由以上分析可见,本文提出的滑冰模型是合理的,它反映了滑冰运动的本质特征. 当然实际的滑冰运动是较为复杂的,例如由于滑冰者四肢的运动,图2中的1、2、3轴可能不是系统的主轴,则计算更为复杂,另外,对于本文中两种定常运动稳定性及长期稳定性的分析,我们将另文给出.

[参　考　文　献]

[1] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

[2] 郭仲衡, 高普云. 再关于非完整力学一答《争议》[J]. 力学学报, 1992, **24**(2): 253—257.

[3] 郭仲衡. 关于冰橇问题[A]. 见: 黄克智, 徐秉业编. 固体力学及其工程应用[C]. 北京: 清华大学出版社, 1993, 113—115.

[4] Colbeck S C, Najarian L, Smith H B. Sliding temperatures of ice skates[J]. Am J Phys, 1997, **65**(6):

488—492.
[5] 陈滨. 分析动力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987, 249—251, 270—274.

Preliminary Analysis of Skating Motion

HU Hui
(Department of Mathematics and Physics, Xiangtan Polytechnic University,
Xiangtan, Hunan 411201, P R China)

Abstract: A mechanical model of skating motion was founded, and its solution was obtained by using the Routh's equations in nonholonomic dynamics. The two kinds of common, local meaning and scleronomic motions were discussed in detail. The computational results turn out in good agreement with observations.

Key words: nonholonomic dynamics; skating; scleronomic motion