

文章编号: 1000-0887(2002) 01-0073-09

# 广义 Phillips 模式非线性不稳定的饱和问题 ( I ) ——基流不稳定时扰动 演变的上界估计\*

张 瑰<sup>1</sup>, 项 杰<sup>2</sup>, 李东辉<sup>3</sup>

( 1. 解放军理工大学 理学院 数理系, 南京 211101; 2. 南京 003 信箱 军事气象研究室, 南京 211101;  
3. 解放军理工大学 气象学院, 南京 211101)

(戴世强推荐)

摘要: 在 Amd' d 第二定理的范围内讨论广义 Phillips 模式非线性不稳定的饱和问题, 对于因模式的物理参数与区域的几何参数不满足稳定判据而导致的不稳定基流, 得到扰动能量与位涡拟能的上界估计

关键词: 广义 Phillips 模式; 非线性不稳定; 饱和问题; 基流  
中图分类号: P433; O351 文献标识码: A

## 引 言

不稳定的饱和问题是流体运动不稳定性理论所包含的内容之一。如果基流不稳定, 那么叠加于基流上的扰动很可能要增长。一般情况下, 这种增长到某一时刻必然要趋于停止, 这就是不稳定的饱和(或平衡)。而饱和问题就是为了研究叠加于不稳定基流之上的扰动的演变信息, 其中包括扰动演变的行为、结构以及扰动能量和位涡拟能的上下界估计等。无论是在理论研究或是在实际应用方面, 研究不稳定的饱和问题都有着非常重要的意义。

Shepherd<sup>[1]</sup> 首先提出一种方法研究非线性不稳定扰动演变的上界问题, 他的基本思想是选择稳定人工基流来估计不稳定基流的扰动的上界。利用这种方法, Shepherd 分别对平行切变流、Phillips 模式、连续层结模式的不稳定的扰动上界估计问题作了比较深入的研究<sup>[2~3]</sup>。曾庆存在研究 Haurwitz 波的非线性不稳定时也研究了 Haurwitz 波不稳定的饱和问题, 得到了扰动能量和位涡拟能的上界估计<sup>[4]</sup>。穆穆研究了两维准地转模式的不稳定的扰动上界估计问题, 对一些重要基流, 他的结果比 Shepherd 更优<sup>[5]</sup>。Paret 和 Vanneste 对三层准地转模式研究了由爆发性共振引起的非线性不稳定的扰动上界估计问题<sup>[6]</sup>。此外, Chot 及 Shepherd 等<sup>[7]</sup>, Mu 和 Shepherd 等还研究了非线性对称不稳定的扰动上界估计问题<sup>[8]</sup>。项杰研究了地球流体力学中经典的 Phillips 模式的非线性不稳定的饱和问题, 作出了基流不稳定时扰动能量及位涡拟能的

\* 收稿日期: 2000\_01\_16; 修订日期: 2001\_10\_29  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40075014)  
作者简介: 张瑰(1973—), 女, 安徽人, 硕士。

## 上界估计

在上述工作的基础上, 本文将研究广义 Phillips 模式的饱和问题, (所谓广义 Phillips 模式, 是指上下边界既可是自由也可是固壁的 Phillips 模式) 给出基流不稳定时扰动能量及位涡拟能的上界估计, 并对所估计的上界作了定性分析。

## 1 数学模型及稳定性判据

为方便, 这里简要回顾广义 Phillips 模式的非线性稳定性判据细节问题参见[9]。考虑层结稳定的两层流体, 上下层密度分别为  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) 上下层平均厚度分别为  $D_1, D_2$ , 流体运动可用下述  $\beta$  平面上无量纲的准地转位涡方程来描述(Pedlosky 1987):

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \partial(\Phi_i, P_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

其中  $t$  为时间变量,  $\Phi$  是第  $i$  层的流函数,  $P_i$  为第  $i$  层的准地转位涡

$$P_1 = \Delta \Phi_1 + F_1(\Phi_2 - \Phi_1(1 + \alpha)) + \beta y, \quad (2a)$$

$$P_2 = \Delta \Phi_2 - F_2(\Phi_2 - \Phi_1) + \beta y. \quad (2b)$$

$\partial(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$  是二维 Jacobian 行列式,  $x, y$  分别为纬向和经向坐标,  $\Delta$  是二维 Laplace 算子,  $F_i = f_0^2 L^2 / (g[(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0] D_i)$  是旋转弗罗德数,  $f_0$  是柯氏参数的尺度,  $L$  为长度尺度,  $\beta$  为常数,  $g$  是重力加速度。参数  $\alpha = g_0^{-1} / g_1^{-1}$  为上自由表面系数, 其中  $g_1$  是第 1 层与第 2 层之间浮力跃度, 并且  $\alpha = 0$  表示上边界是固壁,  $\alpha > 0$  表示上边界是自由表面。在这里我们考虑上边界是自由表面的情形。

流体流动的水平区域  $\Omega$  为纬向周期通道:  $-\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ 。

边界条件:

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right|_{y=0,1} = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right|_{y=0,1} dx = 0. \quad (3b)$$

初始条件:

$$\Phi_i |_{t=0} = \Phi_{i0}. \quad (4)$$

考虑系统 (1) ~ (4) 的定常解(基流):  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$ , 其中

$$Q_1(y) = \Delta \Psi_1 + F_1(\Psi_2 - \Psi_1(1 + \alpha)) + \beta y, \quad (5a)$$

$$Q_2(y) = \Delta \Psi_2 - F_2(\Psi_2 - \Psi_1) + \beta y. \quad (5b)$$

假设存在常数  $\gamma$  及连续可微函数  $\Psi_i^y(\cdot)$ , 使得

$$\Psi_i(y) + \gamma y = \Psi_i^y(Q_i) \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

叠加在基流上的扰动定义为:  $(\phi_i(x, y, t), q_i(x, y, t))$ :

$$\Phi = \Psi_i + \phi_i, \quad P_i = Q_i + q_i, \quad (7)$$

这里

$$q_1 = \Delta \phi_1 + F_1(\phi_2 - \phi_1(1 + \alpha)), \quad q_2 = \Delta \phi_2 - F_2(\phi_2 - \phi_1). \quad (8)$$

相应于 Amol'd 第二定理的条件, 假设存在正常数  $C_{1i}, C_{2i}$ , 使得

$$0 < C_{1i} \leq \frac{d \Psi_i^y(Q_i)}{d Q_i} \leq C_{2i} < +\infty. \quad (9)$$

利用系统的能量、广义位涡以及纬向动量守恒, 可得

$$\frac{d}{dt}(E(t) + A(t)) = 0,$$

其中

$$E(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ d_1 | \dots \phi_1^2 | + d_2 | \dots \phi_2^2 | + d_1 F_1 (\phi_2 - \phi_1)^2 + \alpha d_1 F_1 \phi_1^2 \right\} d\Omega, \quad (10)$$

$$A(t) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 [G_i(Q_i + q_i) - G_i(Q_i) - G_i'(Q_i) q_i] d\Omega, \quad (11)$$

$$G_i(\eta) = \int_0^1 \Psi_i^y(\tau) d\tau \quad (12)$$

对扰动进行如下分解:

$$q_i = q_i' + q_i^*, \quad q_i^* = \frac{\int_{\Omega} q_i^0 d\Omega}{|\Omega|}, \quad (13)$$

则存在唯一的  $\phi_i', \phi_i^*$  与  $q_i', q_i^*$  相对应, 并且扰动的分解可导致能量与位涡拟能的分解<sup>[5]</sup>:

$$E(t) \leq [(E'(t))^{1/2} + (E^*)^{1/2}]^2, \quad (14a)$$

$$Z(t) = Z'(t) + Z^*, \quad (14b)$$

$$Z_i(t) = Z_i^* + Z_i'(t), \quad (14c)$$

其中  $E'(t), Z'(t); E^*, Z^*$  分别是扰动  $(\phi_i', q_i')$ ,  $(\phi_i^*, q_i^*)$  的能量及位涡拟能. 令  $K = \text{diag}(d_1^{1/2}, d_2^{1/2})$ ,  $C = \text{diag}(C_{11}, C_{12})$ ,  $\lambda = \pi^2$  为下列边值问题

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{y=0,1} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{y=0,1} dx = 0 \end{cases}$$

的最小正特征值, 矩阵

$$T = \begin{pmatrix} f_0^2(g_0^{-1} + g_1^{-1}) & -f_0^2 g_1^{-1} \\ -f_0^2 g_1^{-1} & f_0^2 g_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad M = C - (\lambda E + KTK)^{-1},$$

如果矩阵  $M$  正定, 并记它的最小正特征值为  $K_1$ , 则由 Poincare 不等式可得扰动能量与位涡拟能的估计式:

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \left[ (E^*)^{1/2} + \frac{(E^*)^{1/2} + \sqrt{(E^* + K_1 H)}}{K_1 \sqrt{\lambda}} \right]^2, \\ Z(t) &\leq Z^* + \left[ \frac{(E^*)^{1/2} + \sqrt{(E^* + K_1 H)}}{K_1 \sqrt{\lambda}} \right]^2, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $H = E^* - E(0) - A(0) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 C_{1i} d_i q_i^{*2} d\Omega$ ,  $\lambda = \lambda_+ \lambda_1$ ,  $\lambda_1$  为矩阵  $KTK$  的最小正特征值.

特别地, 对于上边界自由的广义 Phillips 模式, 基流为  $\Psi_i = -U_y$ , 并且  $U_i = -\partial\Psi_i/\partial y$  为常数 ( $i = 1, 2$ ), 垂直速度切变  $U_s = U_1 - U_2$ , (假设  $D_1 = D_2$ , 即  $F_1 = F_2 = F$ )

定理 1.1 ([10] 中定理 3) 当 1°~4° 中任一条件被满足时, 基流是非线性稳定的:

$$1^\circ \quad U_s = \frac{\beta}{F} \text{ 且 } \lambda^2 > 2F^2;$$

$$2^\circ \quad U_s = -\frac{\beta}{F(1+\alpha)} \text{ 且 } \lambda^2 > (2+2\alpha+\alpha^2)F^2;$$

$$3^\circ \quad -\frac{\beta}{F(1+\alpha)} < U_s < \frac{\beta}{F};$$

$$4^\circ \quad U_s > \frac{\beta}{F} \text{ 或 } U_s < -\frac{\beta}{F(1+\alpha)}, \quad \lambda^2 - F^2(2+\alpha) + 2F\frac{\beta}{U_s} > 0$$

且  $U_s^2[\lambda^2(\lambda^2 - 4F^2) + \alpha F^2(\alpha F^2 - 2\lambda^2)] + (4 + \alpha^2)\beta^2 F^2 + 2\alpha F\beta U_s(\lambda^2 - \alpha F^2) > 0$ ,  
并且扰动能量及位涡拟能有估计式(15)。

## 2 基流不稳定时扰动演变的上界估计

由前面的稳定性判据(定理 1.1)可知,当  $1^\circ \sim 4^\circ$  中任一条件被满足时,基流是非线性稳定的,因而扰动能量和位涡拟能有上界估计式(15);而当  $1^\circ \sim 4^\circ$  中任一条件被破坏时,基流很可能是非线性不稳定的,下面研究这时扰动能量和位涡拟能的上界问题。

### 2.1 条件 $1^\circ$ 被破坏时扰动演变的上界估计

给定初始流动  $(\Phi_0, P_{i0})$ , 把流函数进行分解:

$$\Phi_0 = \Phi_{i0} + \Phi_0, \quad (16)$$

其中  $i_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_0 dx$ , 并且

$$U_i = -\frac{d i_0}{dy} = \frac{\beta}{F}, \quad U_2 = -\frac{d \Phi_0}{dy} = 0, \quad (17)$$

则初始纬向平均流的垂直速度切变  $U_s = U_1 - U_2 = \frac{\beta}{F}$ , 根据定理 1.1, 若  $\lambda^2 \leq 2F^2$ , 则基流  $(\Phi_0, P_{i0})$  可能不稳定。为了寻求任意时刻流  $(\Phi, P_i)$  的波动部分  $(\Phi', P'_i)$  的能量

$$E_{\Phi'} = \int_{\Omega} \frac{d}{2} [|\Phi'_1|^2 + |\Phi'_2|^2 + F(\Phi'_2 - \Phi'_1)^2 + \alpha F \Phi'_1] d\Omega \text{ 及位涡拟能 } Z_{\Phi'} = \int_{\Omega} \frac{d}{2} \sum_{i=1}^2 q_i^2 d\Omega \text{ 的上界估计, 分以下四个步骤来完成:}$$

步骤 1 将初始流分解成人工稳定基流与扰动的叠加

选择人工基流:

$$U_1 = \frac{\beta}{F}(1 - \eta), \quad U_2 = 0, \quad (\eta \text{ 为参数}) \cdot \quad (18)$$

相应流函数

$$\Psi_i = -U_1 y = -\frac{\beta}{F}(1 - \eta)y, \quad \Psi_2 = 0 \cdot \quad (19)$$

位涡分别为  $Q_1, Q_2$ 。

若  $0 \leq U_s = U_1 - U_2 < \frac{\beta}{F}$ , 即  $0 < \eta \leq 1$ , 则  $U_s$  满足非线性稳定性充分条件  $3^\circ$ , 因此基流非线性稳定。

把  $(\Phi, P_i)$  分解成  $\Phi = \Psi + \phi_i, P_i = Q_i + q_i, (\phi_i, q_i)$  为相对于人工基流的扰动, 其初值为:

$$\phi_{i0} = \Phi_0 - \Psi_1 = -\frac{\beta\eta y}{F} + S + \Phi'_{i0}, \quad (20)$$

$$\phi_{20} = \Phi_{20} - \Psi_2 = \Phi'_{20} \cdot \quad (21)$$

下面对扰动作如下的分解:

$$q_i = q_i^* + q'_i, \quad \phi_i = \phi_i^* + \phi'_i, \quad (22)$$

其中  $q_i^* = \frac{\int_{\Omega} q_{10d} d\Omega}{|\Omega|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} q_{10d} d\Omega$

由于

$$\phi_i' = \Phi_i - \Psi_i - \phi_i^* = \Phi_i - \Psi_i - \phi_i^* + \Phi_i' \tag{23}$$

由正交性可得:

$$E_{\phi_i'} \leq E_{\phi_i'}(t) \leq \frac{[(E^*)^{1/2} + \sqrt{|E^* + \mathcal{K}_1 H|}]^2}{K_1^2 \lambda^2} \tag{24}$$

$$Z_{\phi_i'} \leq Z_{\phi_i'}(t) \leq \frac{[(E^*)^{1/2} + \sqrt{|E^* + \mathcal{K}_1 H|}]^2}{K_1^2 \lambda} \tag{25}$$

(24)、(25) 即为波动部分(  $\phi_i', P_i'$  ) 能量及位涡拟能的上界估计式。由于式中含中参数  $\eta$ , 为了求出其最优估计, 因此必须对有关参数进行分析。

步骤 2 有关参数分析

1) 计算  $K_1$

由文献[ 10] 中的推导过程知:

$$C_{11} = \frac{U_s - \gamma}{\beta_+ F(1 + \alpha) U_s}, \quad C_{12} = \frac{-\gamma}{\beta_- F U_s} \tag{26}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} - \frac{\lambda_+ F}{R} & \frac{F}{R} \\ -\frac{F}{R} & C_{12} - \frac{\lambda_+ F(1 + \alpha)}{R} \end{pmatrix},$$

$$R = \lambda^2 + (2 + \alpha) F \lambda + \alpha F^2,$$

故  $K_1 = \frac{1}{2} [M_{11} + M_{22} - \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}^2}]$  \tag{27}

令  $\gamma \rightarrow \infty$ , 则有  $K_1 \sim \frac{-\gamma}{\beta_+ F(1 + \alpha) U_s} \sim C_{11}$ 。

2) 计算  $\lambda$

由于  $KTK = \begin{pmatrix} F(1 + \alpha) & -F \\ -F & F \end{pmatrix}$ , 故  $\lambda_1 = \frac{\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} F$ ,

所以  $\lambda = \lambda_1 + \lambda = \pi^2 + \frac{\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} F$ 。

3) 简化  $H$

$$A(t) = d \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^2 G_i(Q_i + q_i) - G_i(Q_i) - G_i(Q_i) q_i \right| d\Omega$$

由于  $G_1(\eta) = \int_0^{\eta} \Psi_1^{\eta}(\tau) d\tau = -\frac{C_{11}}{2} \eta^2, \quad G_2(\eta) = \int_0^{\eta} \Psi_2^{\eta}(\tau) d\tau = -\frac{C_{12}}{2} \eta^2$ , 故

$$-A(0) = C_{11} \int_{\Omega} \frac{d}{2} q_{10d}^2 d\Omega + C_{12} \int_{\Omega} \frac{d}{2} q_{20d}^2 d\Omega = C_{11} Z_1(0) + C_{12} Z_2(0) \tag{28}$$

得  $H = E^* - E(0) + C_{11} Z_1'(0) + C_{12} Z_2'(0)$ 。

步骤 3 求上界的最优估计

1) 计算(24)、(25) 式右端

令  $\gamma \rightarrow \infty$ , 对(25) 右端取极限, 有

$$\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \frac{[(E^*)^{1/2} + \sqrt{E^* + \mathcal{K}_1 H}]^2}{\mathcal{K}_1^2} = Z'_1(0) + \frac{\beta_+ F(1+\alpha)U_s}{\beta_- F U_s} Z'_2(0), \quad (29)$$

记 
$$Z_0 = Z'_1(0) + \frac{\beta_+ F(1+\alpha)U_s}{\beta_- F U_s} Z'_2(0), \quad (30)$$

$$E_0 = \frac{Z_0}{\lambda} = \frac{Z_0}{\pi^2 + \frac{\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} F}. \quad (31)$$

则当  $\nu \rightarrow -\infty$  时, (24)、(25) 式右端的极限值分别为  $E_0$  和  $Z_0$ .

2) 下面计算  $Z_0$

由于  $q_1^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} q_{10} d\Omega = (1+\alpha) \left[ \frac{\beta\eta}{2} - F_s \right]$ ,  $q_2^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} q_{20} d\Omega = - \left[ \frac{\beta\eta}{2} - F_s \right]$ . 记

$$T_1 = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\Delta \dot{\Phi}_{10} + F(\dot{\Phi}_{20} - (1+\alpha)\dot{\Phi}_{10})]^2 d\Omega, \quad T_2 = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\Delta \dot{\Phi}_{20} - F(\dot{\Phi}_{20} - \dot{\Phi}_{10})]^2 d\Omega \quad (32)$$

$$\text{则 } Z'_1(0) = Z_1(0) - Z_1^* = T_1 d + \pi d \frac{(1+\alpha)^2 \beta^2 \eta^2}{12},$$

$$Z'_2(0) = Z_2(0) - Z_2^* = T_2 d + \pi d \frac{\beta^2 \eta^2}{12}.$$

(经计算, 积分常数  $S$  对结果没有影响)

而  $\frac{\beta_+ F(1+\alpha)U_s}{\beta_- F U_s} = \frac{\alpha+2}{\eta} - (1+\alpha)$ , 故  $Z_0 = d(T_1 - (1+\alpha)T_2 + F(\eta))$ ,

其中  $F(\eta) = \frac{\alpha(1+\alpha)}{12} \pi \beta^2 \eta^2 + \frac{\alpha+2}{12} \pi \beta^2 \eta + \frac{\alpha+2}{\eta} T_2$ .

3) 求  $Z_0$  的最优上界

即求下面极值问题

$$\begin{cases} F(\eta) = \min! & (0 < \eta \leq 1) \\ F(\eta) = \frac{\alpha(1+\alpha)}{12} \pi \beta^2 \eta^2 + \frac{\alpha+2}{12} \pi \beta^2 \eta + \frac{\alpha+2}{\eta} T_2 \end{cases}$$

令  $G(\eta) = F'(\eta) = \frac{\alpha(1+\alpha)}{6} \pi \beta^2 \eta + \frac{\alpha+2}{12} \pi \beta^2 - \frac{\alpha+2}{\eta^2} T_2$ ,

故  $\min F(\eta) = F(\eta_0)$ , 当  $G(1) > 0$ , 即  $T_2 < \left[ \frac{1}{12} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6(\alpha+2)} \right] \pi \beta^2$ ,  $G(\eta_0) = 0$ ,

仍记  $Z_0 = d(T_1 - (1+\alpha)T_2 + \min F(\eta))$

步骤 4 比较  $Z_0$  与  $Z_i$ ,  $E_0$  与  $E_i$  为保证  $Z_0, E_0$  有意义, 必须保证  $Z_0, E_0$  分别不大于总相对位涡拟能  $Z_i$  与系统总能量  $E_i$ , 因此要求出  $E_i, Z_i$ .

$$Z_i = \int_{\Omega} \frac{d}{2} P_{10}^2 d\Omega + \int_{\Omega} \frac{d}{2} P_{20}^2 d\Omega = d(T_1 + T_2) + \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 12}{12} \pi d \beta^2, \quad (33)$$

记 
$$E_1 = \int_{\Omega} \frac{d}{2} [|\dot{\Phi}_{10}|^2 + |\dot{\Phi}_{20}|^2 + F(\dot{\Phi}_{20} - \dot{\Phi}_{10})^2 + aF\dot{\Phi}_{10}^2] d\Omega, \quad (34)$$

则 
$$E_i = \int_{\Omega} \frac{d}{2} [|\dot{\Phi}_{10}|^2 + |\dot{\Phi}_{20}|^2 + F(\dot{\Phi}_{20} - \dot{\Phi}_{10})^2 + aF\dot{\Phi}_{10}^2] d\Omega = E_1 + \pi d \left[ \frac{\beta^2}{F} + \frac{1+\alpha}{12F} \pi d \beta^2 \right] = E_1 + \frac{\pi d \beta^2}{F} \left[ \frac{1}{F} + \frac{1+\alpha}{12} \right]. \quad (35)$$

由于  $E_0, Z_0$  有一个自然的界  $E_i, Z_i$ , 因此需要比较  $Z_0$  与  $Z_i, E_0$  与  $E_i$ .

考虑扰动  $(\Phi_0, P_{i0})$  为无穷小的情形,  $T_1, T_2, E_1 \rightarrow 0$ , 此时  $F(\eta) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{12}\pi\beta^2\eta^2 + \frac{\alpha+2}{12}\pi\beta^2\eta$ , 由于  $F(\eta)$  单调上升, 故  $\min F(\eta) \leq F(1) = \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{12}\pi\beta^2$ , 因此

$$Z_0 \leq \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{12}\pi\beta^2 d = Z_t, \tag{*}$$

$$E_0 \leq \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{12\pi^2 + (6(\alpha+2 - \sqrt{\alpha^2+4})F)}\pi d\beta^2. \tag{**}$$

$E_0$  与  $E_t = \pi d\beta^2 \left( \frac{1}{F^2} + \frac{1+\alpha}{12F} \right)$  的比较需要用数值方法, 由于自由表面系数  $\alpha$  对于大尺度海洋运动,  $\alpha = O(10^{-3})$ ; 对于大尺度大气运动  $\alpha = O(10^{-1})$ , 故对  $\alpha = 10^{-3}, \alpha = 10^{-1}$  分别画出  $E_0, E_t$  随  $F$  变化图,  $\lambda^2 \leq 2F^2$  即  $F \geq 6.98$ .

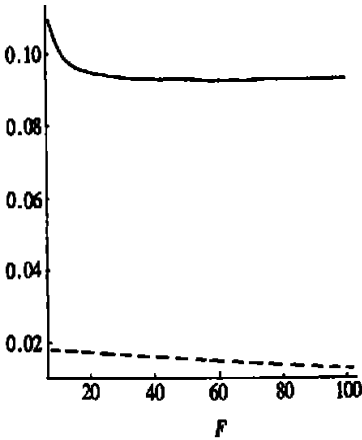


图1  $\alpha = 10^{-3}$  时  $E_0, E_t$  随  $F$  变化图  
(实线代表  $E_t$ , 虚线代表  $E_0$ )

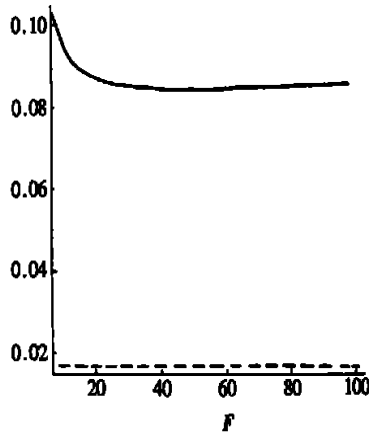


图2  $\alpha = 10^{-1}$  时  $E_0, E_t$  随  $F$  变化图  
(实线代表  $E_t$ , 虚线代表  $E_0$ )

由图 1, 2 显然可见  $E_0 \ll E_t$ . 因此当  $\Phi_0 \rightarrow 0$  时, 扰动上界分别为(\*), (\*\* ) 式.

### 2.2 条件 2 被破坏时扰动演变的上界估计

完全按照 2.1 的方法来完成:

$(\Phi_i, P_i)$  的位涡拟能与能量上界分别为

$$Z_0 = \frac{d}{1+\alpha}(-T_1 + (1+\alpha)T_2 + F(\eta)), \tag{36a}$$

$$E_0 = \frac{Z_0}{\pi^2 + \frac{\alpha+2 - \sqrt{\alpha^2+4}}{2}F}, \tag{36b}$$

其中  $F(\eta) = -\frac{\alpha}{12(1+\alpha)}\pi\beta^2\eta^2 + \frac{\alpha+2}{12}\pi\beta^2\eta + \frac{\alpha+2}{\eta}T_1$ ,  $T_1, T_2$  定义同前.

为使估计达到最优, 则应对  $F(\eta)$  求极小值:

$$\text{令 } G(\eta) = F'(\eta) = -\frac{\alpha}{6(1+\alpha)}\pi\beta^2\eta + \frac{\alpha+2}{12}\pi\beta^2 - \frac{\alpha+2}{\eta^2}T_1,$$

$$\text{则 } G'(\eta) = -\frac{\alpha}{6(1+\alpha)}\pi\beta^2 + \frac{2(\alpha+2)}{\eta^3}T_1,$$

由于  $\eta \rightarrow 0$  时  $G(\eta) \rightarrow -\infty$ ,  $\eta \rightarrow +\infty$  时  $G(\eta) \rightarrow -\infty$ , 且  $\exists \eta_0, G'(\eta_0) = 0$ , 故  $\eta_0$  为  $G(\eta)$  极大值点定性分析可知,  $G(\eta)$  有两个零点  $\eta_1, \eta_2, 0 < \eta_1 < \eta_2 < +\infty$ , 且  $\min F(\eta) =$

$\min[F(\eta_1), F(1)]$ , 为了简单起见, 不妨记  $Z_0 = \frac{d}{(1+\alpha)}(-T_1 + (1+\alpha)T_2 + F(1))$ ,  $E_0$  依 (36b)•

下面比较  $Z_0, E_0$  与  $Z_t, E_t$  的大小, 记

$$E_1 = \int_{\Omega} \frac{d}{2} [|\dot{\Phi}_{10}|^2 + |\dot{\Phi}_{20}|^2 + F(\dot{\Phi}_{20} - \dot{\Phi}_{10})^2 + \alpha F \dot{\Phi}_{10}^2] d\Omega,$$

$$Z_t = d(T_1 + T_2) + \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 12}{12(\alpha + 1)^2} \pi d \beta^2, \quad E_t = E_1 + \frac{\pi d \beta^2}{F(1 + \alpha)^2} \left( \frac{1}{F} + \frac{1 + \alpha}{12} \right).$$

令  $\dot{\Phi}_{10}, \dot{\Phi}_{20} \rightarrow 0$ , 则  $T_1, T_2, E_1$  均  $\rightarrow 0$ , 故

$$E_t = \pi d \beta^2 \frac{1}{(\alpha + 1)^2} \left( \frac{1}{F^2} + \frac{1 + \alpha}{12F} \right), \quad Z_t = \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 2}{12(\alpha + 1)^2} \pi \beta^2 d, \text{ 因此}$$

$$Z_0 = \min F(\eta) \leq \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 2}{12(\alpha + 1)^2} \pi \beta^2 d, \quad (37)$$

$$E_0 = \frac{1}{(\alpha + 1)^2} \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 2}{12\pi^2 + 6(\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 + 4})F} \pi d \beta^2. \quad (38)$$

显然  $Z_0 \leq Z_t$ , 为了用数值方法比较  $E_0$  与  $E_t$ , 分别对  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 10^{-1}$  画出  $E_0, E_t$  随  $F$  变化图: ( $F \geq 6.98$ )

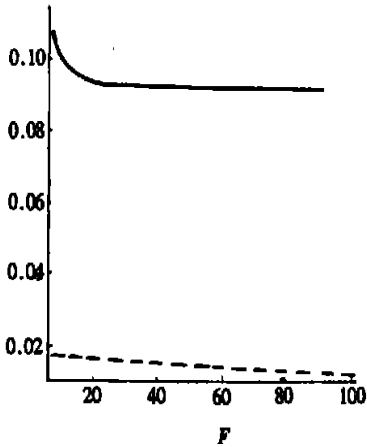


图 3  $\alpha = 10^{-3}$  时  $E_0, E_t$  随  $F$  变化图

(实线代表  $E_t$ , 虚线代表  $E_0$ )

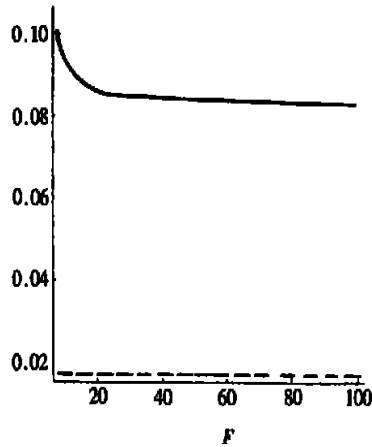


图 4  $\alpha = 10^{-1}$  时  $E_0, E_t$  随  $F$  变化图

(实线代表  $E_t$ , 虚线代表  $E_0$ )

由图显然可见  $E_0 \ll E_t$ . 因此当  $\dot{\Phi}_{10} \rightarrow 0$  时, 扰动上界分别为 (37) 和 (38) 式•

致谢 本文得到解放军理工大学黄思训教授和上海大学戴世强教授的指导和帮助, 在此表示衷心的感谢!

### [参 考 文 献]

- [1] Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part\_one: the two\_layer model [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1988, Vol. 45(14): 2014—2025.
- [2] Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability. part\_two: Continuously stratified fluid [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1989, 46(7): 888—907.
- [3] Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part\_Three: bounds on the energy [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1993, Vol. 50(16): 2697—2709.



- [4] ZENG Qing\_cun. Variational principle of instability of atmospheric motions[J]. Adv Atmos Sci, 1989, 6(2): 137—172.
- [5] MU Mu. Nonlinear stability theorem of two dimensional quasi-geostrophic motions geophys astroph [J]. Fluid Dynamics, 1992, 65: 57—76.
- [6] Paret J, Vanneste J. Nonlinear saturation of baroclinic instability in a three-layer model[J]. J Atmos Sci, 1996, 53(20), 2905—2917.
- [7] Cho H R, Shepherd T G, Vladimirov V A. Application of the direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere[J]. J Atmos Sci, 1993, 50(6): 822—334.
- [8] MU Mu, Shepherd T G, Swanson K. On nonlinear symmetric stability and the nonlinear saturation of symmetric instability[J]. J Atmos Sci, 1996, 53(20): 2918—2923.
- [9] MU Mu, ZENG Qing\_cun, Shepherd T G, et al. Nonlinear stability of multilayer quasi-geostrophic flow[J]. J Fluid Mech, 1994, 264: 165—184.
- [10] 张瑰. 广义 Phillips 模式的非线性稳定性判据[J]. 空军气象学院学报, 1999, 20(2): 133—143.

## Nonlinear Saturation of Baroclinic Instability in the Generalized Phillips Model ( I ) —the Upper Bound on the Evolution of Disturbance to the Nonlinearly Unstable Basic Flow

ZHANG Gui<sup>1</sup>, XIANG Jie<sup>2</sup>, LI Dong\_hui<sup>3</sup>

(1. Department of Mathematics and Physics, Institute of Science, University of Science and Technology, P. L. A., Nanjing 211101, P R China;

2. Department of Meteorology, P. O. Box 003, Nanjing 211101, P R China;

3. Institute of Meteorology, University of Science and Technology,

P. L. A., Nanjing 211101, P R China)

**Abstract:** On the basis of the nonlinear stability theorem in the context of Arnold's second theorem for the generalized Phillips model, nonlinear saturation of baroclinic instability in the generalized Phillips model is investigated. By choosing appropriate artificial stable basic flows, the upper bounds on the disturbance energy and potential enstrophy to the nonlinearly unstable basic flow in the generalized Phillips model are obtained, which are analytic completely and without the limitation of infinitesimal initial disturbance.

**Key words:** nonlinear saturation; baroclinic instability; generalized Phillips model