

文章编号: 1000-0887(2002) 02-0201-06

# 上覆单相弹性层的饱和地基上刚性基础竖向振动的轴对称混合边值问题

陈胜立<sup>1</sup>, 陈龙珠<sup>2</sup>

(1 清华大学 土木水利学院, 北京 100084; 2 上海交通大学 建筑工程与力学学院, 上海 200030)

(吴家龙推荐)

**摘要:** 运用作者提出的饱和土弹性波动方程, 从理论上研究了上覆单相弹性土层的饱和地基上刚性基础的竖向振动轴对称问题, 即采用 Hankel 积分变换技术并按混合边值条件建立了部分饱和和地基上刚性基础竖向振动的对偶积分方程, 并将其蜕化为完全饱和和地基的情形; 该对偶积分方程可化为易于数值计算的第二类 Fredholm 积分方程。文末的算例给出了地基表面动力柔度系数  $C_0$  随无量纲频率  $\alpha_0$  的变化曲线

**关键词:** 部分饱和地基; 刚性基础; 动力柔度系数

**中图分类号:** TU435 **文献标识码:** A

## 引言

动力半空间理论及土与结构相互作用问题是土木工程中的一个重要课题。自 1971 年 Lurco 等<sup>[1]</sup>全面总结了单相弹性介质半空间体上刚性基础的各类振动特性以来, 国内外一些学者将其注意力转入了对多孔饱和介质的动力响应的研究, 以反映饱和地基中孔隙水的影响。1986 年 Halpem 等<sup>[2]</sup>分析了多孔饱和半空间在表面简谐荷载作用下的动力响应。1989 年 Philippacopoulos<sup>[3]</sup>研究了上层为单相弹性固体, 下层为多孔饱和介质的地基上刚体的垂直振动问题。1993 年 Bougacha 等<sup>[4]</sup>则用有限元方法分析了多孔饱和半空间上刚体的振动问题。最近陈龙珠等<sup>[5]</sup>亦探讨了饱和地基上刚性板的竖向振动问题。实际工程中, 由于地下水的存在, 地下水以下的土可视为饱和土, 而地下水位以上的土可视为弹性干土。因此, 讨论上覆单相弹性土层的饱和地基上刚性基础的竖向轴对称振动就有很大的工程应用价值。本文以作者曾提出的一组饱和土弹性波动方程<sup>[6]</sup>为基础, 用解析的方法求解这一问题。文末的算例将给出地基表面动力柔度系数  $C_0$  随无量纲频率  $\alpha_0$  变化的计算曲线。

## 1 基本动力方程及其求解

上覆单相弹性层的饱和地基上圆柱形刚性基础振动属于轴对称课题, 其力学模型如图 1 所示, 单相弹性层厚度为  $h$ , 刚性基础的半径为  $r_0$ , 其中心承受竖向简谐激振力  $P e^{i\omega t}$

收稿日期: 1999\_12\_14; 修订日期: 2001\_09\_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59579018)

作者简介: 陈胜立(1974), 男, 浙江温岭人, 博士, 主要研究方向为土动力学与地震工程。

根据弹性动力学原理, 圆柱坐标系下弹性层的波动方程为

$$\frac{L+G_L}{G_L} \frac{e}{r} + {}^2 w_r - \frac{w_r}{r^2} = \frac{L}{G_L} w_r, \quad (1)$$

$$\frac{L+G_L}{G_L} \frac{e}{z} + {}^2 w_z = \frac{L}{G_L} w_z, \quad (2)$$

式中  $L, G_L$  为 Lamé 常数;  $L$  为质量密度;  $w_r, w_z$  分别

为径向、竖向位移;  $e = \frac{w_r}{r} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_z}{z}$

应力应变关系为

$$zL = 2G_L \frac{w_z}{z} + L e, \quad zL = G_L \left[ \frac{w_r}{z} + \frac{w_z}{r} \right], \quad (3)$$

式中  $zL, zL$  分别为弹性层的正应力和剪应力

根据文献 [5], 在圆柱坐标系下, 不考虑固液间惯性耦合时饱和土的基本动力方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} H + G_H + \frac{E_w}{n} \end{array} \right\} \frac{e}{r} + G_H \left( {}^2 - \frac{1}{r^2} \right) w_r + \frac{E_w}{n} \frac{w_r}{r} = w v_r + H w_r, \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H + G_H + \frac{E_w}{n} \end{array} \right\} \frac{e}{z} + G_H {}^2 w_r + \frac{E_w}{n} \frac{w_r}{z} = w v_z + H w_z, \quad (5)$$

$$\frac{E_w}{n} \frac{e}{r} + \frac{E_w}{n} \frac{w_r}{r} = {}^1 w_r + w v_r + \frac{b}{n} v_r, \quad (6)$$

$$\frac{E_w}{n} \frac{e}{z} + \frac{E_w}{n} \frac{w_r}{z} = {}^1 w_z + w v_z + \frac{b}{n} v_z, \quad (7)$$

这里  $H, G_H$  为饱和土骨架的 Lamé 常数,  $n$  为土的孔隙率,  $E_w$  为水的体变模量;  ${}^1 = n w, {}^2 = (1-n) s, w, s$  分别为水和土颗粒的质量密度 ( $H = {}^1 + {}^2$ , 饱和土的质量密度);  $b = n w g/k, g$  为重力加速度,  $k$  为土的渗透系数;  $v_r = n(u_r - w_r), v_z = n(u_z - w_z)$  为水的相对径向位移和竖向位移, 而  $w_r, w_z$  分别为土骨架的径向、竖向位移,  $u_r, u_z$  分别为水的径向、竖向位移;  $e = w_r/r + w_r/r + w_z/z, {}^1 = v_r/r + v_r/r + v_z/z$

饱和土体的物理方程为

$$z_w = 2G_H \frac{w_z}{z} + H e, \quad z_w = G_H \left[ \frac{w_r}{z} + \frac{w_z}{r} \right], \quad p_w = \frac{E_w}{n} (e + {}^1), \quad (8)$$

式中  $z_w, z_w$  分别为土骨架的正应力和剪应力,  $p_w$  为孔隙水压力

引入无量纲参数及无量纲变量,

$$r = \frac{r}{r_0}, \quad z = \frac{z}{r_0}, \quad w_0 = \frac{w_0}{r_0}, \quad h = \frac{h}{r_0}, \quad w_r = \frac{w_r}{r_0}, \quad w_z = \frac{w_z}{r_0}, \quad v_r = \frac{v_r}{r_0}, \quad v_z = \frac{v_z}{r_0},$$

$${}^1 = \frac{{}^1}{H}, \quad {}^2 = \frac{{}^2}{H}, \quad w = \frac{w}{H}, \quad E_w = \frac{E_w}{G_H}, \quad H = \frac{H}{G_H}, \quad M_H = \frac{M_H}{G_H}, \quad L = \frac{L}{G_L},$$

$$M_L = \frac{M_L}{G_L}, \quad G_L = \frac{G_L}{G_H}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{H}{G_H}} r_0, \quad b = \frac{r_0 b}{\sqrt{H G_H}}, \quad zL = \frac{zL}{G_L},$$

$$zL = \frac{zL}{G_L}, \quad z_w = \frac{z_w}{G_H}, \quad z_w = \frac{z_w}{G_H}, \quad p_w = \frac{p_w}{G_H}$$

这里  $M_L = L + 2G_L, M_H = H + 2G_H, w_0$  为刚性基础的竖向位移幅值 假设系统所有运动都是简谐运动(圆频率为  $\omega$ ), 则式(1) ~ (8) 可化为:

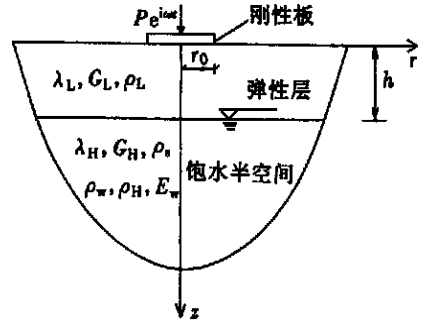


图 1 力学模型

$$\left( L + 1 \right) \frac{e}{r} + {}^2 w_r - \frac{1}{r^2} w_r = - a_0^2 \frac{2}{H} w_r, \quad (1a)$$

$$\left( L + 1 \right) \frac{e}{z} + {}^2 w_z = - a_0^2 \frac{2}{H} w_z, \quad (2a)$$

$${}_{zL} = 2 \frac{w_z}{z} + L e, \quad {}_{zrL} = \frac{w_r}{z} + \frac{w_z}{r}, \quad (3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H + 1 + \frac{E_w}{n} \end{array} \right\} \frac{e}{r} + \left( {}^2 - \frac{1}{r^2} \right) w_r + \frac{E_w}{n} \frac{1}{r} = - ( {}_w a_0^2 v_r + a_0^2 w_r ), \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H + 1 + \frac{E_w}{n} \end{array} \right\} \frac{e}{z} + {}^2 w_z + \frac{E_w}{n} \frac{1}{z} = - ( {}_w a_0^2 v_z + a_0^2 w_z ), \quad (5a)$$

$$\frac{E_w}{n} \frac{e}{r} + \frac{E_w}{n} \frac{1}{r} = - {}_1 a_0^2 w_r - {}_w a_0^2 v_r + i b a_0 \frac{v_r}{n}, \quad (6a)$$

$$\frac{E_w}{n} \frac{e}{z} + \frac{E_w}{n} \frac{1}{z} = - {}_1 a_0^2 w_z - {}_w a_0^2 v_z + i b a_0 \frac{v_z}{n}, \quad (7a)$$

$${}_{zw} = 2 \frac{w_z}{z} + H e, \quad {}_{xw} = \frac{w_r}{z} + \frac{w_z}{r}, \quad p_w = \frac{E_w}{n} ( e + ), \quad (8a)$$

这里  $H = H/L$ , 而  $H = \sqrt{G_H/H}$ ,  $L = \sqrt{G_L/L}$

对式(1a)~(3a)进行适当的Hankel变换,可得弹性层的位移和应力的Hankel变换解

$$w_z^0 = - {}_1 A_1 e^{-i^2 z} + {}_1 B_1 e^{i^2 z} + p A_2 e^{-i^2 z} + p B_2 e^{i^2 z}, \quad (9)$$

$$w_r^1 = - p A_1 e^{-i^2 z} - p_1 B_1 e^{i^2 z} + {}_2 A_2 e^{-i^2 z} - {}_2 B_2 e^{i^2 z}, \quad (10)$$

$${}_{zL}^0 = (p^2 + {}^2) A_1 e^{-i^2 z} + (p^2 + {}^2) B_1 e^{i^2 z} - 2p {}_2 A_2 e^{-i^2 z} + 2p {}_2 B_2 e^{i^2 z}, \quad (11)$$

$${}_{zrL}^0 = 2p {}_1 A_1 e^{-i^2 z} - 2p {}_1 B_1 e^{i^2 z} - (p^2 + {}^2) A_2 e^{-i^2 z} - (p^2 + {}^2) B_2 e^{i^2 z}, \quad (12)$$

这里  ${}^2 = p^2 - a_0^2 \frac{2}{H} / (L + 2)$ ,  ${}^2 = p^2 - a_0^2 \frac{2}{H}$ , 而  $A_1, B_1, A_2, B_2$  为  $p$  的任意函数

类似地,由式(4a)~(8a),我们可获得饱和土半空间位移和应力的Hankel变换解<sup>[5]</sup>

$$w_z^0 = - c A_0 e^{-\alpha z} - d B_0 e^{-\alpha z} + p^2 C_0 e^{-j^2 z}, \quad (13)$$

$$w_r^1 = - p A_0 e^{-\alpha z} - p B_0 e^{-\alpha z} + p j C_0 e^{-j^2 z}, \quad (14)$$

$$v_z^0 = - {}_1 c A_0 e^{-\alpha z} - {}_2 d B_0 e^{-\alpha z} + {}_3 p^2 C_0 e^{-j^2 z}, \quad (15)$$

$$v_r^1 = - p ( {}_1 A_0 e^{-\alpha z} + {}_2 B_0 e^{-\alpha z} - {}_3 j C_0 e^{-j^2 z} ), \quad (16)$$

$${}_{zw}^0 = (M_H c^2 - H p^2) A_0 e^{-\alpha z} + (M_H d^2 - H p^2) B_0 e^{-\alpha z} - 2p {}_2 j C_0 e^{-j^2 z}, \quad (17)$$

$${}_{xw}^1 = 2p c A_0 e^{-\alpha z} + 2p d B_0 e^{-\alpha z} - p (p^2 + j^2) C_0 e^{-j^2 z}, \quad (18)$$

$$p_w^0 = \frac{E_w}{n} (c^2 - p^2) (1 + {}_1) A_0 e^{-\alpha z} + \frac{E_w}{n} (d^2 - p^2) (1 + {}_2) B_0 e^{-\alpha z}, \quad (19)$$

式中  $c^2 = p^2 - p_1^2$ ,  $d^2 = p^2 - p_2^2$ ,  $j^2 = p^2 - s^2$ , 而  $p_1, p_2, s$  分别为饱和土中对应第一P波、第二P波、S波的无量纲复波数,其具体表达式可见文<sup>[5]</sup>;

$D_1 = - (n/ib a_0) (Q_2 a_0^2 - M_H p_1^2)$ ,  $j = 1, 2, D_2 = - (n/ib a_0) (Q_2 a_0^2 - s^2)$

## 2 混合边值问题

假定圆柱形刚性基础与弹性层光滑无摩擦接触,且饱和土半空间表面是透水的,则无量纲化后的位移、应力连续条件及边界条件为:

$$R_{Ll}(r, 0) = 0 \quad 1 [ r [ ] ], \quad (20)$$

$$S_{x1l}(r, 0) = 0 \quad 0 [ r [ ] ], \quad (21)$$

$$[w_z(r, h)]_L = [w_z(r, h)]_H \quad 0 [ r [ ] , \tag{22}$$

$$[w_r(r, h)]_L = [w_r(r, h)]_H \quad 0 [ r [ ] , \tag{23}$$

$$G_L\#[R_{zL}(r, h)]_L = G_H\#[R_{zw}(r, h)]_H \quad 0 [ r [ ] , \tag{24}$$

$$G_L\#[S_{zrL}(r, h)]_L = G_H\#[S_{zrw}(r, h)]_H \quad 0 [ r [ ] , \tag{25}$$

$$p_w(r, h) = 0 \quad 0 [ r [ ] \# \tag{26}$$

对式(20) ~ (26) 进行 Hankel 变换并消去  $B_0$ , 写成矩阵形式有

$$Q\#v = f, \tag{27}$$

其中  $v^T = \{A_1 e^{-K_1 h}, B_1 e^{K_1 h}, A_2 e^{-K_2 h}, B_2 e^{K_2 h}, A_0 e^{-ch}, C_0 e^{-jh}\}$ ,  $f^T = \{D_{KL}(p, 0), 0, 0, 0, 0, 0\}^T$ ,

$$Q = \begin{bmatrix} (p^2 + K_2^2)e^{K_1 h} & (p^2 + K_2^2)e^{-K_1 h} & -2pK_2e^{K_2 h} & 2pK_2e^{-K_2 h} & 0 & 0 \\ 2pK_1e^{K_1 h} & -2pK_1e^{-K_1 h} & -(p^2 + K_2^2)e^{K_2 h} & -(p^2 + K_2^2)e^{-K_2 h} & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 & p & p & c + dD_4 & -p^2 \\ -p & -p & -K_2 & -K_2 & p(1 + D_4) & -pj \\ p^2 + K_2^2 & p^2 + K_2^2 & 2pK_2 & 2pK_2 & -\frac{h_x}{G_L} & \frac{2p^2j}{G_L} \\ 2pK_1 & -2pK_1 & -(p^2 + K_2^2) & -(p^2 + K_2^2) & -\frac{2p(c + dD_4)}{G_L} & \frac{p(p^2 + j^2)}{G_L} \end{bmatrix},$$

这里  $h_x = M_H(c^2 + d^2 D_4) - K_1 p^2(1 + D_4)$ , 而  $D_4 = -(c^2 - p^2)(1 + D_1)/(d^2 - p^2)(1 + D_2)\#$

应用分块矩阵的方法, 对式(27) 进行求解, 可得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{R_{22}e^{K_1 h}}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} D_{0RzL}(p, 0), & B_1 = \frac{-R_{21}e^{-K_1 h}}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} D_{0RzL}(p, 0), \\ A_2 = \frac{(-P_{11}R_{22} + P_{12}R_{21})e^{K_2 h}}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} D_{0RzL}(p, 0), & B_2 = \frac{(-P_{21}R_{22} + P_{22}R_{21})e^{-K_2 h}}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} D_{0RzL}(p, 0), \end{cases} \tag{28}$$

这里  $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$  均为  $p$  的函数(限于篇幅, 其表达式略去)\#

由式(9) 我们有

$$w_z(r, 0) = \int_0^l D_0 pw_z(p, 0) J_0(pr) dp = \int_0^l B(p) f(p) J_0(pr) dp, \tag{29}$$

式中

$$f(p) = \left\{ -K_1 R_{22} e^{K_1 h} - K_1 R_{21} e^{-K_1 h} + p(-P_{11} R_{22} + P_{12} R_{21}) e^{K_2 h} + p(-P_{21} R_{22} + P_{22} R_{21}) e^{-K_2 h} \right\} / (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}),$$

$$B(p) = p D_{KL}(p, 0)\#$$

因此, 由  $D_{zL}(r, 0) = \int_0^l B(p) J_0(pr) dp$ , 我们可得一组对偶积分方程

$$\int_0^l p^{-1}(1 + H(p)) B(p) J_0(pr) dp = \frac{w_0}{l} \quad 0 [ r [ 1, \tag{30}$$

$$\int_0^l B(p) J_0(pr) dp = 0 \quad r \setminus 1, \tag{31}$$

其中  $l = \lim_{p \rightarrow j} p\#f(p) = \frac{M_L}{2(1 - M_L)} = -(1 - M_L)$ , 而  $H(p) = \frac{p\#f(p)}{l} - 1\#$

若  $h = 0$ , 本文可退化为完全饱和地基情形\# 此时经过一系列复杂的推导有  $f(p) = G_L(s^2(c + dD_4))/[(2p^2 - s^2)h_x - 4p^2j(c + dD_4)]$ , 该表达式和文[5] 中的  $f(p)$  仅差一因子  $G_L$ ,

这是由于本文中  $R_{zL} = R_L / G_L$ , 而文[5]中  $R_{zw} = R_w / G_H$  所致#

上述对偶积分方程可化为易于数值求解的第二类 Fredholm 积分方程<sup>[7]</sup>, 令

$$B(p) = \frac{2pw_0}{PlQ_0} \int_0^1 H(t) \cos(pt) dt, \tag{32}$$

则有 
$$H(t) + \frac{2}{PQ_0} \int_0^1 K(t, S) H(S) dS = 1, \tag{33}$$

其中 
$$K(t, S) = \int_0^1 H(p) \cos(pt) \cos(pS) dp \#$$

圆柱形刚性基础底面的应力分布还须满足平衡方程

$$P = \int_0^{2P} \frac{dH}{dQ_0} r R_L(r, 0) dr = 2P R_L(0, 0) \# \tag{34}$$

再由式(32), 我们得

$$\frac{w_0}{P} = \frac{1-M}{4Gr_0} \# \frac{1}{Q_0} \int_0^1 H(t) dt = \frac{1-M}{4Gr_0} \int_0^1 H(t) dt \# \tag{35}$$

故部分饱和地基的动力柔度系数  $C_v = 1 \int_0^1 H(t) dt \#$

### 3 算例分析

解第二类 Fredholm 积分方程式(33), 求得  $H(t)$  后, 我们可求得  $C_v = 1 \int_0^1 H(t) dt$  随无量纲频率  $a_0$  的变化曲线#

在本节给出的数值算例中, 地基的物理力学参数为: 对单相弹性层,  $K_L = 313 @ 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $G_L = 1165 @ 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $M = 1/3$ ,  $Q_L = 1625 \text{ kg/m}^3$ ; 饱和半空间,  $K_H = G_H = 1183 @ 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $k > 10^{-6} \text{ m/s}$ ,  $M_H = 1/4$ ,  $Q_S = 2650 \text{ kg/m}^3$ ,  $n = 0.1375$ ,  $E_w = 2110 @ 10^9 \text{ N/m}^2$  其对应的无量纲量为:  $K_L = 2$ ,  $K_H = 1$ ,  $G_L = 0.19$ ,  $Q_L = 0.18$ ,  $Q_w = 0.1492$ ,  $E_w = 11148 \#$  结合工程实际, 这里给出  $b = 2$  时不同弹性层厚度 ( $h = 0, 0.1, 1$ ) 情形下动力柔度系数  $C_v$  随  $a_0$  的变化曲线(见图2)#

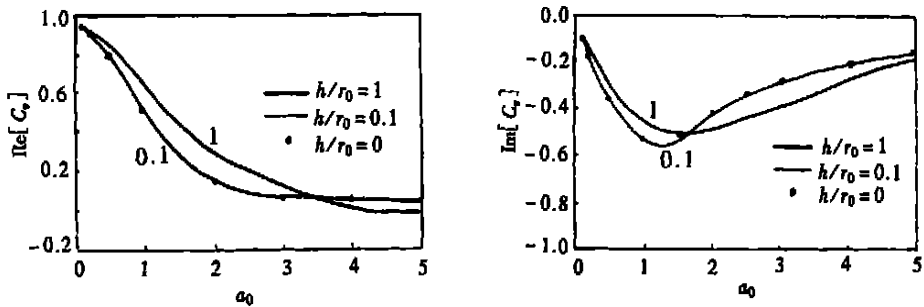


图2  $b = 2$  时  $C_v$  随  $a_0$  的变化曲线

由图2可见,  $h$  值仅在高频段 ( $a_0 > 1$ ) 才对  $C_v - a_0$  曲线有较显著的影响, 而当  $h = 0.1$  时, 此时的  $C_v - a_0$  曲线与完全饱和地基 ( $h = 0$ ) 的基本重合#

### 4 结 语

本文采用 Hankel 积分变换技术研究了上覆单相弹性土层的饱和地基上刚性基础的竖向

振动,并考察了参数  $h$  对动力柔度系数的影响# 本文推导及解答过程严密、简洁,分析结果表明,完全饱和地基上刚性基础的竖向振动即为本文中上覆弹性层厚度  $h = 0$  的特殊情形#

### [参 考 文 献]

- [1] Luco J E, Westmann R A. Dynamic response of circular footings[J]. J Eng Mech, ASCE, 1971, 97(5): 1381) 1395.
- [2] Halpern M R, Christiano P. Response of poroelastic halfspace to steady\_state harmonic surface tractions[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 1986, 10(6): 609) 632.
- [3] Philippacopoulos A J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half\_space[J]. J Eng Mech, ASCE, 1989, 115(10): 2301) 2322.
- [4] Bougacha S, Tassoulas J L, Roesset J M. Analysis of foundation on fluid\_filled poroelastic stratum [J]. J Eng Mech, ASCE, 1993, 119(8): 1632) 1648.
- [5] 陈龙珠, 陈胜立. 饱和地基上刚性基础的竖向振动分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 392) 397.
- [6] 陈龙珠. 饱和土中弹性波的传播速度及其应用[D]. 杭州:浙江大学, 1987.
- [7] Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying\_factor method[J]. Proc Camb Phil Soc, 1963, 59(351): 315) 362.

## The Axisymmetric Mixed Boundary\_Value Problem of the Vertical Vibration of a Rigid Foundation on Saturated Layered Soil Subgrade

CHEN Sheng\_li<sup>1</sup>, CHEN Long\_zhu<sup>2</sup>

(1) School of Civil and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China;  
2) School of Architecture and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University,  
Shanghai 200030, P R China)

Abstract: Based on the theory of elastic wave propagation in saturated soil subgrade established by the author of this paper, the axisymmetric vertical vibration of a rigid circular foundation resting on partially saturated soil subgrade which is composed of a dry elastic layer and a saturated substratum is studied. The analysis relied on the use of integral transform techniques and a pair of dual integral equations governing the vertical vibration of the rigid foundation is listed under the consideration of mixed boundary\_value condition. The results are reduced to the case for saturated half\_space. The set of dual integral equations are reduced to a Fredholm integral equation of the second kind and solved by numerical procedures. Numerical examples are given at the end of the paper and plots of the dynamic compliance coefficient  $C_v$  versus the dimensionless frequency  $\alpha_0$  are presented.

Key words: partially saturated soil subgrade; rigid foundation; dynamic compliance coefficient