应用数学和力学, 第 23 卷 第 2 期(2002 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 02_0188_07

广义倒易定理及其应用*

付宝连

(燕山大学 土木工程与力学系, 秦皇岛 066004)

(唐立民推荐)

摘要: 推广 Betti 倒易定理的概念, 建立了非耦联系统和耦联系统的广义倒易定理, 它们适用于具有不同本构关系的两个变形体• 当该两变形体的本构关系相同且为线弹性时, 该非耦联系统的广义倒易定理即成为 Betti 倒易定理• 同时, 应用该两个广义倒易定理于弹性力学中的模拟计算•

关 键 词: 倒易定理; 广义倒易定理; 非耦联系统; 耦联系统
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

在三维光弹性中, 在光塑性力学中, 在建筑结构模拟实验中和在金属成形过程的物理模拟中, 都存在一个相同的研究课题, 那就是由于假设, 经相似转换计算所得模型体的力学量被认为就等于原型体的相应量, 往往会产生很大的误差• 这主要是由于模型体的本构关系不同于原型体的本构关系所致• 为了解决存在于上述诸学科中的这一共同问题, 在工作[1~ 5] 中建立了模拟变分原理和模拟有限元法•

如我们所知, 在弹性力学中变分原理和 Betti 倒易定理有着密切的联系[6, 7]• 根据这些联系和工作[1~ 5] 的成果, 将建立非耦联系统和耦联系统的广义倒易定理• 这两个倒易定理适用于具有不同本构关系的两个变形体• 我们将会看到, Betti 倒易定理只是非耦联系统广义倒易定理的一个个别情况• 象在工作[1~ 5] 中的模拟变分原理一样, 广义倒易定理也能够应用于上述诸学科中的模拟计算• 有足够的理由相信, 广义倒易定理和模拟变分原理一起将构成模拟能量原理的两个支系•

1 非耦联方程和耦联方程

首先, 我们定义非耦联系统• 所谓非耦联系统是指具有相同形状, 但不具有相同的体力、指定的边界条件和本构关系的两个变形体• 该两个变形体之一称为原型体, 另一个称之为中介体•

对于原型体, 有下述基本方程

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \qquad x_i \in V, \tag{1}$$

* 收稿日期: 1999_11_10; 修订日期: 2001_07_03
基金项目: 塑性成形模拟及模具技术国家重点实验室资助项目(991_6)
作者简介: 付宝连(1934—) , 男, 教授, 从事广义物理模拟能量原理及回弹能量原理的研究.

$$e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0 \qquad x_i \in V, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \qquad x_i \in S_p, \tag{3}$$

$$u_i = \bar{u}_i \qquad x_i \in S_u, \tag{4}$$

$$\frac{\partial A(e)}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} \qquad x_i \in V, \tag{5}$$

$$\frac{\partial B(e)}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij} \qquad x_i \in V. \tag{6}$$

对于中介体,相关方程能够写成

$$\sigma''_{ij,j} + F''_i = 0 \qquad x_i \in V, \tag{7}$$

$$\sigma''_{ij}n_j = \bar{p}''_i \qquad x_i \in S_p, \tag{8}$$

$$u''_i = \bar{u}''_i \qquad x_i \in S_u, \tag{9}$$

其中 u_i、σ_{ij} 和 u''_i、σ''_{ij} 分别表示原型体和中介体的相应力学量.

根据非耦联系统的定义,我们易于得到非耦联方程

$$\sigma_{ij,j} - \sigma''_{ij,j} + \Delta F_i = 0 \qquad x_i \in V, \tag{10}$$

$$\sigma_{ij}n_j - \sigma''_{ij}n_j = \Delta \bar{p}_i \qquad x_i \in S_p, \tag{11}$$

$$u_i - u''_i = \Delta \bar{u}_i \qquad x_i \in S_u, \tag{12}$$

其中 $\Delta F_i = F_i - F''_i$, $\Delta \bar{p}_i = \bar{p}_i - \bar{p}''_i$ 和 $\Delta \bar{u}_i = \bar{u}_i - \bar{u}''_i$, 且它们都为已知.

其次,我们将定义相似系统. 相似系统被定义为具有相似形状、体力和指定的边界条件,且具有相同本构关系的两个变形体. 相似系统之一取前述的中介体,另一个称之为模型体. 根据相似系统的这一定义,必有如下关系

$$\frac{\sigma'_{ij}}{\sigma''_{ij}} = k_\sigma, \quad \frac{F'_i}{F''_i} = k_F, \quad \frac{u'_i}{u''_i} = k_u, \quad \frac{x'_i}{x''_i} = k_x \qquad (\text{不求和}), \tag{13}$$

右上角具有“′”的符号的量表示模型体的相应量,而 k_σ, k_F, k_u 和 k_x 表示有关的相似数.

同时,该原型体和模型体构成相似非耦联系统. 注意到式(10)~(13),我们得到相似非耦联方程如下:

$$\sigma_{ij,j} - \frac{1}{k_\sigma}\sigma'_{ij,j} + \Delta F_i = 0 \qquad x_i \in V, \tag{14}$$

$$\sigma_{ij}n_j - \frac{1}{k_\sigma}\sigma'_{ij}n_j = \Delta \bar{p}_i \qquad x_i \in S_p, \tag{15}$$

$$u_i - \frac{1}{k_u}u'_i = \Delta \bar{u}_i \qquad x_i \in S_u. \tag{16}$$

如果中介体的体积力、指定的边界力和位移分别与原型体的相应量相等时,即 $\Delta F_i = \Delta \bar{p}_i = \Delta \bar{u}_i = 0$, 则原型体与中介体构成耦联系统. 与此相应的,必有耦联方程

$$\sigma_{ij,j} - \sigma''_{ij,j} = 0 \qquad x_i \in V, \tag{17}$$

$$\sigma_{ij}n_j - \sigma''_{ij}n_j = 0 \qquad x_i \in S_p, \tag{18}$$

$$u_i - u''_i = 0 \qquad x_i \in S_u. \tag{19}$$

同时,原型体和模型体一起构成相似耦联系统,且得到相似耦联方程为

$$\sigma_{ij,j} - \frac{1}{k_\sigma}\sigma'_{ij,j} = 0 \qquad x_i \in V, \tag{20}$$

$$\sigma_{ij}n_j - \frac{1}{k_\sigma}\sigma'_{ij}n_j = 0 \qquad x_i \in S_p, \tag{21}$$

$$u_i - \frac{1}{k_u}u_i' = 0 \qquad x_i \in S_u. \tag{22}$$

2 广义倒易定理

2.1 非耦联系统的广义倒易定理

对于非耦联系统, 应用格林公式, 则得

$$\begin{aligned}&\iiint_V(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}'')(e_{ij} - e_{ij}'')\,\mathrm{d}V = \iiint_V(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}'')(u_{i,j} - u_{i,j}'')\,\mathrm{d}V = \\ &\quad \iiint_V\left\{[(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}'')(u_i - u_i'')]_{,j} - (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}'')(u_i - u_i'')\right\}\mathrm{d}V = \\ &\quad \iint_{S_p+S_u}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}'')n_j(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}S - \iiint_V(\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}'')(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{23}$$

注意到式(10) ~ (12), 得到

$$\begin{aligned}&\iiint_V(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}'')(e_{ij} - e_{ij}'')\,\mathrm{d}V = \\ &\quad \iiint_V \Delta F_i(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}V + \iint_{S_p}\Delta p_i(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}S + \iint_{S_u}\Delta u_i(p_i - p_i'')\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{24}$$

式(24) 易于改写成

$$\begin{aligned}&\iiint_V F_i(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}V + \iint_{S_p}p_i(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}S + \iint_{S_u}p_i(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}S - \\ &\quad \iiint_V\sigma_{ij}(e_{ij} - e_{ij}'')\,\mathrm{d}V = \\ &\quad -\left\{\iiint_V F_i''(u_i'' - u_i)\,\mathrm{d}V + \iint_{S_p}p_i''(u_i'' - u_i)\,\mathrm{d}S + \right. \\ &\quad \left.\iint_{S_u}p_i''(u_i'' - u_i)\,\mathrm{d}S - \iiint_V\sigma_{ij}''(e_{ij}'' - e_{ij})\,\mathrm{d}V\right\},\end{aligned} \tag{25}$$

式(24) 或(25) 称为非耦联系统的广义倒易定理, 或称为差功倒易定理. 它表明, 原型体的外力在原型体和中介体相应位移差上所做外功的总和减去原型体的应力在原型体和中介体相应应变差上所做内功的总和的差值, 等于中介体的外力在中介体和原型体相应位移差上所做外功的总和减去中介体的应力在中介体和原型体相应应变差上所做内功总和差的负值.

注意到原型体和中介体的应变_位移关系, 并应用格林公式于式(24) 或(25), 我们得到

$$\begin{aligned}&\iiint_V(\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}'' + \Delta F_i)(u_i - u_i'')\,\mathrm{d}V - \\ &\quad \iint_{S_p}[(\sigma_{ij}n_j - \sigma_{ij}''n_j) - \Delta p_i](u_i - u_i'')\,\mathrm{d}S - \\ &\quad \iint_{S_u}[(u_i - u_i'') - \Delta u_i](\sigma_{ij}n_j - \sigma_{ij}''n_j)\,\mathrm{d}S = 0.\end{aligned} \tag{26}$$

由于 $u_i - u_i''$ 和$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}'')n_j$ 是任意的和独立的, 故有

$$\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}'' + \Delta F_i = 0 \qquad x_i \in V, \tag{27}$$

$$\sigma_{ij}n_j - \sigma_{ij}''n_j = \Delta p_i \qquad x_i \in S_p, \tag{28}$$

$$u_i - u_i'' = \Delta u_i \qquad x_i \in S_u. \tag{29}$$

上述证明表明, 如果原型体的应变_位移关系预先得到满足, 则式(24) 或(25) 与(27) ~ (29) 三式是等价的. 如果中介体的解已知, 且式(2) 和(5) 或(6) 预先得到满足, 则由广义倒易

定理式(24)或(25)可得到原型体的真实解•

对于相似非耦联系统，广义倒易定理或差功倒易定理还可以表示为

$$\iiint_V F_i\left(u_i-\frac{1}{k_u}u_i'\right)\mathrm{d}V+\iint_{S_p} p_i\left(u_i-\frac{1}{k_u}u_i'\right)\mathrm{d}S+\iiint_{S_u} p_i\left(u_i-\frac{1}{k_u}u_i'\right)\mathrm{d}S-$$
$$\iiint_V \sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{k_u}e_{ij}'\right)\mathrm{d}V=$$
$$-\left\{\iiint_V \frac{1}{k_F}F_i'\left(\frac{1}{k_u}u_i'-u_i\right)\mathrm{d}V+\iint_{S_p}\frac{1}{k_p}p_i'\left(\frac{1}{k_u}u_i'-u_i\right)\mathrm{d}S+\right.$$
$$\left.\iint_{S_u}\frac{1}{k_u}p_i'\left(\frac{1}{k_u}u_i'-u_i\right)\mathrm{d}S-\iiint_V\frac{1}{k_\sigma}\sigma_{ij}'\left(\frac{1}{k_u}e_{ij}'-e_{ij}\right)\mathrm{d}V\right\}• \tag{30}$$

2.2　耦联系统的广义倒易定理

对于耦联系统，式(24)或(25)成为较简单的形式

$$\iiint_V \sigma_{ij}(e_{ij}-e_{ij}'')\mathrm{d}V=-\iiint_V \sigma_{ij}''(e_{ij}''-e_{ij})\mathrm{d}V, \tag{31}$$

式(31)被称为耦联系统的广义倒易定理或内差功倒易定理•

易于证明，式(31)的等价方程为

$$\sigma_{ij,j}-\sigma_{ij,j}''=0\qquad x_i\in V, \tag{32}$$
$$\sigma_{ij}n_j-\sigma_{ij}''n_j=0\qquad x_i\in S_p, \tag{33}$$
$$u_i-u_i''=0\qquad x_i\in S_u• \tag{34}$$

对于相似耦联系统，式(31)成为

$$\iiint_V \sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{k_u}e_{ij}'\right)\mathrm{d}V=-\iiint_V\frac{1}{k_\sigma}\sigma_{ij}'\left(\frac{1}{k_u}e_{ij}'-e_{ij}\right)\mathrm{d}V, \tag{35}$$

式(35)式称为相似耦联系统的广义倒易定理•

2.3　Betti 倒易定理

从式(25)两端易于得到

$$\iiint_V F_iu_i''\mathrm{d}V+\iint_{S_p}p_iu_i''\mathrm{d}S+\iint_{S_u}p_iu_i''\mathrm{d}S=\iiint_V\sigma_{ij}e_{ij}''\mathrm{d}V, \tag{36}$$
$$\iiint_V F_i''u_i\mathrm{d}V+\iint_{S_p}p_i''u_i\mathrm{d}S+\iint_{S_u}p_i''u_i\mathrm{d}S=\iiint_V\sigma_{ij}''e_{ij}\mathrm{d}V• \tag{37}$$

如果原型体的本构关系与中介体的本构关系相同，而且均为线弹性时，从式(36)和(37)我们得到

$$\iiint_V \sigma_{ij}e_{ij}''\mathrm{d}V=\iiint_V\sigma_{ij}''e_{ij}\mathrm{d}V, \tag{38}$$
$$\iiint_V F_iu_i''\mathrm{d}V+\iint_{S_p}p_iu_i''\mathrm{d}S+\iint_{S_u}p_iu_i''\mathrm{d}S=$$
$$\iiint_V F_i''u_i\mathrm{d}V+\iint_{S_p}p_i''u_i\mathrm{d}S+\iint_{S_u}p_i''u_i\mathrm{d}S• \tag{39}$$

式(38)是以内功形式表达的 Betti 倒易定理；而式(39)是以外功形式表达的 Betti 倒易定理•　很明显，Betti 倒易定理只是非耦联系统广义倒易定理或差功倒易定理的一个特殊情况•

3　应　　用

3.1　非耦联系统广义倒易定理的应用

考虑一个中介体长厚壁筒，如图1所示；和一个原型体长厚壁筒，如图2所示• 它们具有相同的内径 a 和相同的外径 b• 但是，在内表面 $r=a$ 上受到不同的压力 q'' 和 q，而在外表面 $r=b$ 上具有不同的已知边界位移 u_b'' 和零• 应该注意的是，中介体厚壁筒和原型体厚壁筒具有不同的弹性常数，它们分别是弹性模量 E''、E 和泊松比 ν''、ν•

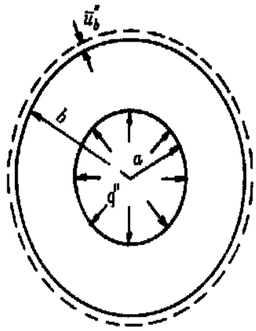

图1 中介体厚壁筒

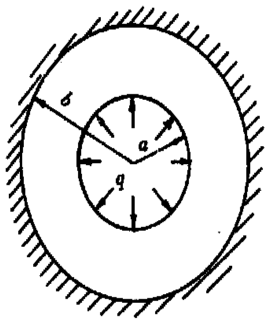

图2 原型体厚壁筒

现在，我们的问题是，根据中介体厚壁筒的已知解，如何应用非耦联系统的广义倒易定理理求出原型体厚壁筒的真实解•

应用最小势能原理，我们易于得到中介体厚壁筒的解为[8]

$$\left\{\begin{aligned}
u'' &= \frac{1}{\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left[\left(\frac{1-2\nu''}{a^2}r+\frac{1}{r}\right)\frac{u_b''}{b}-\frac{q''}{E''}(1+\nu'')(1-2\nu'')\left(\frac{r}{b^2}-\frac{1}{r}\right)\right],\\
e_r'' &= \frac{1}{\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left[\left(\frac{1-2\nu''}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{u_b''}{b}-\frac{q''}{E''}(1+\nu'')(1-2\nu'')\left(\frac{r}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right)\right],\\
e_\theta'' &= \frac{1}{\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left[\left(\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{u_b''}{b}+\frac{q''}{E''}(1+\nu'')(1-2\nu'')\left(\frac{r}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right],\\
\sigma_r'' &= \frac{1}{\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left[\frac{E''}{1+\nu''}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{u_b''}{b}-q''\left(\frac{1-2\nu''}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right],\\
\sigma_\theta'' &= \frac{1}{\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left[\frac{E''}{1+\nu''}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{u_b''}{b}+q''\left(\frac{1-2\nu''}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]•
\end{aligned}\right. \tag{40}$$

原型体的力学量假设为[8]

$$\left\{\begin{aligned}
&u=\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{b^2}\right)A,\quad e_r=-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right)A,\quad e_\theta=\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)A,\\
&\sigma_r=-\left(\frac{1-2\nu}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right)AC,\quad \sigma_\theta=\left(\frac{1-2\nu}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)AC,
\end{aligned}\right. \tag{41}$$

其中

$$C=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}• \tag{42}$$

根据非耦联系统广义倒易定理的一般公式(25)，该两非耦联厚壁筒的广义倒易定理的表

达式可写成

$$\int_0^{2\pi} aq(u_a - u''_a)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} b\sigma_{rb}(-u''_b)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\int_a^b [\sigma_r(e_r - e''_r) + \sigma_\theta(e_\theta - e''_\theta)]\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = -\left\{\int_0^{2\pi} aq''(u''_a - u_a)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} b\sigma''_{rb}(u''_b)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\int_a^b [\sigma''_r(e''_r - e_r) + \sigma''_\theta(e''_\theta - e_\theta)]\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\right\}. \tag{43}$$

将式(40)和(41)代入到式(43)并对式(43)进行运算,我们得到

$$\left[A - q''\frac{(1+\nu'')(1-2\nu'')}{E''}\frac{1}{\frac{1-2\nu''}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\right]\left[A - q\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{1}{\frac{1-2\nu}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\right] = 0. \tag{44}$$

由于 $A - q''(1+\nu'')(1-2\nu'')/E''[(1-2\nu'')/a^2 + 1/b^2]$ 为不等于零的任意值,故有

$$A = q\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{1}{\frac{(1-2\nu)}{a^2}+\frac{1}{b^2}}. \tag{45}$$

3.2 耦联系统广义倒易定理的应用

在3.1节中,假定 $q'' = q$ 和 $u''_b = 0$,于是该两厚壁筒成为耦联系统. 在这种情况下,广义倒易定理能够写成

$$\int_a^b [\sigma_r(e_r - e''_r) + \sigma_\theta(e_\theta - e''_\theta)]\,r\,\mathrm{d}r = -\int_a^b [\sigma''_r(e''_r - e_r) + \sigma''_r(e''_\theta - e_\theta)]\,r\,\mathrm{d}r. \tag{46}$$

将式(40)和(41)两式中的后4式代入到式(46),并注意到 $q'' = q$ 和 $u''_b = 0$,我们能够得到与式(45)相同的解.

3.3 Betti 倒易定理的应用

在3.1节,假设该两厚壁筒具有相同的弹性常数 E 和 ν,在该两筒之间应用 Betti 倒易定理,我们得到

$$q''a\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{b^2}\right)A = qa\left\{\frac{1}{(1-2\nu)/a^2+1/b^2}\left[\left(\frac{1-2\nu}{a^2}a+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}u'' - \left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}\right)\frac{q''}{E}(1+\nu)(1-2\nu)\right]\right\} - \frac{EAb}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{1-2\nu}{b^2}+\frac{1}{b}\right)u''_b. \tag{47}$$

易于验证,式(45)是方程式(47)的解.

4 结　论

非耦联系统和耦联系统的广义倒易定理是两个新的原理,对于模拟计算是有理论和实际意义的.

[参 考 文 献]

[1] 付宝连. 光测弹性理论的变分原理[J]. 东北重型机械学院学报, 1989, **13**(4): 68—71.

[2] 付宝连, 崔振山, 祖承德. 光测弹性理论中的耦联有限元法[J]. 东北重型机械学院学报, 1991, **15**(3): 259—263.

[3] 付宝连. 光测弹性力学中耦联系统的变分原理[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(1): 37—47.

[4] FU Bao_lian. Simulated variational principles for structural experiments[A]. In: Y K Cheung. A K H Kwan Eds. The Fifth International Conference on Tall Buildings[C]. Hong Kong, December, 9_11, 1998, Hong Kong: China Translation and Printing Services Ltd, 1998, **2**, 564—569.

[5] 付宝连. 金属成形工艺相似非耦联系统的模拟变分原理和广义模拟变分原理[J]. 工程力学, 1999, **16**(2): 52—59.

[6] 钱伟长, 叶开阮. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

[7] 付宝连. 功的互等定理和线弹性变分原理[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(3): 253—258.

[8] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity[M]. Third Edition. McGraw_Hill Book Company, 1990.

Generalized Reciprocal Theorems and Their Applications

FU Bao_lian

(Department of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, P R China)

Abstract: Generalized reciprocal theorems of non_coupled and coupled systems, which are valid for two deformed bodies with different constitutive relations are established by generalizing the idea of Betti's reciprocal theorem. When the constitutive relations of the two deformed bodies are all alike and linear elastic, the generalized reciprocal theorem of non_coupled systems just becomes Betti's. Meanwhile, the generalized reciprocal theorems are applied to simulate calculations in elasticity.

Key words: reciprocal theorem; generalized reciprocal theorem; non_coupled system; coupled system