

文章编号: 1000-0887(2002) 02-0179-09

压电陶瓷板中非电渗透型反平面 裂纹的电弹性场

李显方¹, 范天佑²

(1 湖南师范大学 理学院, 长沙 410081; 2 北京理工大学 材料科学研究中心, 北京 100081)

(汤任基推荐)

摘要: 对受 4 种机电载荷的内含裂纹的压电陶瓷板的电弹性行为进行了分析。利用积分变换方法将非电渗透型反平面裂纹问题化为对偶积分方程组, 求解这些方程组可以获得裂纹线上电弹性场的明显解析表达式, 及裂尖处一些量的强度因子和机械应变能释放率。当板的厚度趋近于无穷大时, 所得结果还原为熟知结果。

关键词: 压电陶瓷; 电弹性场; 反平面问题; 非电渗透型裂纹

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

由于压电陶瓷具有良好的机电耦合特性, 即外加载荷不仅能导致弹性变形还能产生电场, 反之, 电场也能一起弹性变形, 这使得压电陶瓷在许多领域有着极为广泛的应用。近年来, 对内含裂纹的压电陶瓷的断裂行为分析已成为一个相当活跃的研究方向。其研究的一个主要任务就是要给出压电陶瓷中的电弹性场和分布规律, 尤其是在裂纹尖端处的电弹性场特征。

反平面变形是一种较为简单的变形问题。对于压电陶瓷中此类问题的研究, Pak^[1] 和 Li 等^[2] 分别考虑了在无穷远处受均匀反平面剪应力和平面内电场作用下的 I 型(反平面)裂纹问题, 获得了电弹性场的解析表达式及一些相关量的强度因子。随后, Dunn^[3] 和 Zhang 等^[4] 对反平面裂纹面上的电边界条件的提法进行了精确的考虑, 侯密山等^[5] 进一步讨论了界面上的反平面裂纹问题。对此类动态问题, Dascalu 等^[6]、陈增涛等^[7]、Li 等^[8,9] 和 Li 等^[10] 都分别作了相应的研究。

在应用上经常遇见的是有限厚的无限带形压电陶瓷板, 因此, 实际工程中对它的分析则更为感兴趣。最近, Shindo 等^[11] 研究了无限带形压电陶瓷板中的电渗透型反平面裂纹问题。使用的方法是将所讨论的问题化为一个第二类 Fredholm 积分方程, 从而给出它的近似解。然而, 当裂纹内部的电介质(如真空)的介电常数与压电陶瓷的介电常数的比率很小时, 我们可以将此裂纹看成是非电渗透型的, 目前, 相当多的文献都采用了此假设(如[1, 2, 7, 9, 10]等)。本文讨论有限厚的压电陶瓷板中的反平面非电渗透型裂纹问题, 利用积分变换和对偶积分方程理论, 获得裂纹线上电弹性场的解析表达式, 及在裂纹尖端处相关量的强度因子和机械应变能释

收稿日期: 2000_06_20; 修订日期: 2001_10_09

作者简介: 李显方(1964), 男, 湖南人, 教授, 博士。

放率的明显表达式

1 基本方程及问题的提出

考虑一其厚度为 $2h$ 的无限长的带形压电陶瓷板 在其中心处有一平行于边界表面的长度为 $2a$ 的 Griffith 裂纹(如图 1) 记 x_3 (或 z) 方向为压电陶瓷的极化方向, 与之垂直的平面(即 Ox_1x_2 或 Oxy 平面) 为各向同性面 在线性电弹性理论的框架下, 其本构方程为^[12]

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} s_{kl} - e_{lij} E_l, \\ D_i = -\epsilon_{il} E_l + e_{ikl} s_{kl}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 C_{ijkl} , ϵ_{il} 和 e_{ij} 分别为压电陶瓷板的弹性常数, 介电常数和压电常数; $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 D_i 分别为应力分量和电位移分量; s_{kl} 和 E_l 分别为应变分量和电场强度分量, 它们可由弹性场位移分量 u_i 和电势确定, 即

$$\begin{cases} s_{ij} = (u_i / x_j + u_j / x_i) / 2, \\ E_i = -\phi / x_i \end{cases} \quad (2)$$

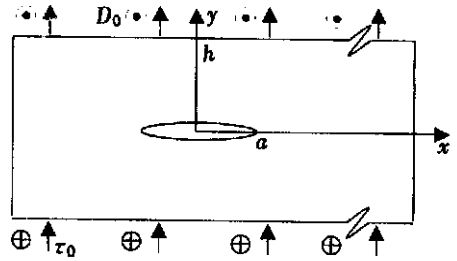


图 1 受反平面剪应力及电场作用的含裂纹的压电陶瓷

由于我们在本文中所研究的问题是反平面变形问题(即沿极化方向的纵向剪切问题), 因而在这种情况下, 所有电弹性场中的物理量均可通过反平面位移 $u_3(x, y)$ 和平面内电势 $\phi(x, y)$ 这两个量来决定, 即对此问题我们有

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{12} = 0, E_3 = 0, \quad (3)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz} &= c_{44} u_3 / x + e_{15} \phi / x, & \sigma_{yz} &= c_{44} u_3 / y + e_{15} \phi / y, \\ D_x &= -\epsilon_{11} \phi / x + e_{15} u_3 / x, & D_y &= -\epsilon_{11} \phi / y + e_{15} u_3 / y, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

于是, 由力的平衡方程和电荷平衡方程得到反平面位移 $u_3(x, y)$ 和平面内电势 $\phi(x, y)$ 满足下列控制微分方程:

$$c_{44} \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi = 0, \quad e_{15} \nabla^2 u_3 - \epsilon_{11} \nabla^2 \phi = 0 \quad (5)$$

对一般的压电陶瓷, 有 $c_{44} \epsilon_{11} + e_{15}^2 > 0$, 所以, 上面的方程可简化为两个独立的调和方程:

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

下面, 考虑压电陶瓷在其边界表面上受以下 4 种组合机电载荷作用, 分别记为问题 A 到问题 D:

问题 A 受反平面剪应力和平面内电位移作用, 即

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = 0, D_y(x, \pm h) = D_0 \quad -a < x < a; \quad (7)$$

问题 B 两个刚性电极板钳夹住压电陶瓷板的边界, 并沿极化方向有一反平面位移, 即两个边界表面存在有一已知的反平面相对位移和一已知的平面内电势差:

$$u_3(x, \pm h) = w_0, \phi(x, \pm h) = 0 \quad -a < x < a; \quad (8)$$

问题 C 受反平面剪应力作用, 及板边界表面上电势为已知, 即

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = 0, \phi(x, \pm h) = \phi_0 \quad -a < x < a; \quad (9)$$

问题 D 受平面内电位移作用, 及板边界表面存在一已知的反平面相对位移, 即

$$u_3(x, \pm h) = w_0, D_y(x, \pm h) = D_0 \quad -a < x < a \quad (10)$$

由于裂纹是非电渗透型的而且是应力自由的,所以,在裂纹面上,我们有

$$y_z(x, 0) = 0, D_y(x, 0) = 0 \quad |x| < a \quad (11)$$

此外,由于我们考虑的裂纹位于带形板的正中央,因此,对称性也给出裂纹线上还应满足下列边界条件:

$$u_3(x, 0) = 0, \quad (x, 0) = 0 \quad |x| > a \quad (12)$$

2 问题的求解

为了求得方程(6)在上述边界条件下的解,从上面的分析可知只需对上半带形的右半部分压电陶瓷进行讨论即可。下面,为了以下书写方便起见,引如下列记号:

$$\left. \begin{aligned} W &= (u_3, \quad)^T, \quad T_y = (y_z, D_y)^T, \quad C_0(x) = (a_0(x), b_0(x))^T, \\ H_1(y) &= (\sinh(y), \cosh(y))^T, \quad H_2(y) = (\cosh(y), \sinh(y))^T, \\ M(\quad) &= (M_1(\quad), M_2(\quad)), \quad M_1(\quad) = (A_1(\quad), B_1(\quad))^T, \\ M_2(\quad) &= (A_2(\quad), B_2(\quad))^T, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中上标 T 表示矩阵的转置

对方程(6)关于 x 作 Fourier 变换,由谱分析可知函数 $u_3(x, y)$ 和 (x, y) 的 Fourier 变换形式,然后,分别取 Fourier 逆变换,我们可得到 $u_3(x, y)$ 和 (x, y) 以下列形式表出:

$$W(x, y) = \int_0^{\infty} M(\quad) H_2(y) \cos(x \quad) d \quad + y C_0, \quad (14)$$

其中, C_0 为未知常数, $M(\quad)$ 中的 $A_1(\quad), A_2(\quad), B_1(\quad)$ 和 $B_2(\quad)$ 为变量 \quad 的未知函数,它们均由给定的具体边界条件决定

这时,与之相应的反平面剪应力和平面内电位移可由关系式(4)给出。尤其,我们有

$$T(x, y) = \int_0^{\infty} K M(\quad) H_1(y) \cos(x \quad) d \quad + K C_0 \quad (15)$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} \\ e_{15} & - \quad_{11} \end{bmatrix} \quad (16)$$

下面我们将对问题 A 到问题 D 分别予以讨论:

1) 问题 A 的解 在这种情况下,我们可由边界条件(7)以及(11)、(12),经过一些简单的运算,得到下列关系:

$$C_0 = K^{-1} T_0, \quad A_2(\quad) = -A_1(\quad) \tanh(h \quad), \quad B_2(\quad) = -B_1(\quad) \tanh(h \quad), \quad (17)$$

其中 K^{-1} 表示 K 的逆矩阵, $T_0 = (\quad_0, D_0)^T$, 向量 $M_1(\quad) = (A_1(\quad), B_1(\quad))^T$ 满足下列对偶积分方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} M_1(\quad) \tanh(h \quad) \cos(x \quad) d \quad &= K^{-1} T_0 \quad 0 < x < a, \\ \int_0^{\infty} M_1(\quad) \cos(x \quad) d \quad &= 0 \quad x > a \end{aligned} \right. \quad (18)$$

利用文献[13]中介绍的方法,求解方程(18),我们获得解为

$$M_1(\quad) = K^{-1} T_0^{-1} \int_0^a (t) \sin(t \quad) dt, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}
 (t) = \frac{-2b \sinh(2bt)}{2[\sinh^2(ba) - \sinh^2(bt)]^{1/2}} \int_0^a \frac{[\sinh^2(ba) - \sinh^2(bs)]^{1/2}}{\sinh^2(bs) - \sinh^2(bt)} ds \\
 0 < t < a,
 \end{aligned} \quad (20)$$

这里及在后文中, 我们记 $b = \sqrt{2h}$

由此, 将所得结果代入(14), 我们即可给出板内任一点处的反平面位移和平面内电势, 进一步可以决定其它的场变量 下面, 我们给出裂纹线上的反平面剪应力、应变及电位移和电场强度的计算结果 它们分别为

$$\begin{aligned}
 T_y(x, 0) = T_0[1 - m(x)], \quad (\gamma_z(x, 0), -E_y(x, 0))^T = \\
 K^{-1} T_0[1 - m(x)],
 \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned}
 m(x) = \frac{b \sinh(2bx)}{[\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)]^{1/2}} \int_0^a \frac{[\sinh^2(ba) - \sinh^2(bs)]^{1/2}}{\sinh^2(bs) - \sinh^2(bx)} ds = \\
 \frac{\sinh(2bx)}{\cosh(ba)[\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)]^{1/2}} [E(\phi) - K(\phi)] \quad x > a,
 \end{aligned} \quad (22)$$

这里 $K(\phi) = K(\tanh(ba))$, $E(\phi) = \left\{ \sinh^2(ba) / [\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)], \tanh(ba) \right\}$ 分别表示第一类和第三类完全椭圆积分, $\gamma_z = u_3 / y$ 按照下面的强度因子定义

$$\begin{aligned}
 (K, K^D, K^E) = \\
 \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} (\gamma_z(x, 0), \gamma_z(x, 0), D_y(x, 0), E_y(x, 0)),
 \end{aligned} \quad (23)$$

我们可以计算出在此情况下这些量的强度因子分别是

$$\begin{pmatrix} K \\ K^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix} \sqrt{aF_A}, \quad \begin{pmatrix} K \\ K^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix} \sqrt{aF_A},
 \end{pmatrix} \quad (24)$$

其中

$$F_A = \sqrt{\frac{2h}{a} \tanh\left(\frac{a}{2h}\right)} \frac{2K\left[\tanh\left(\frac{a}{2h}\right)\right]}{2h} \quad (25)$$

2) 问题 B 的解 这时, 从边界条件(8)以及(11)、(12), 我们发现

$$\begin{cases} C_0 = (w_0/h, -v_0/h)^T, \\ A_2(\phi) = -A_1(\phi) \coth(h), \\ B_2(\phi) = -B_1(\phi) \coth(h), \end{cases} \quad (26)$$

其中向量 $M_1(\phi) = (A_1(\phi), B_1(\phi))^T$ 满足下列对偶积分方程:

$$\begin{cases} \int_0^a M_1(\phi) \coth(h) \cos(x-\phi) d\phi = C_0 & 0 < x < a, \\ \int_0^a M_1(\phi) \cos(x-\phi) d\phi = 0 & x > a \end{cases} \quad (27)$$

类似于上面的分析, 可以给出它的解为

$$M_1(\phi) = \frac{2C_0}{a} \int_0^a \frac{\sinh(bt) \sin(t)}{[\sinh^2(ba) - \sinh^2(bt)]^{1/2}} dt \quad (28)$$

由此, 容易计算出裂纹线上的反平面剪应力、应变及电位移和电场强度 它们是

$$\begin{pmatrix} \gamma_z(x, 0) \\ D_y(x, 0) \end{pmatrix} = KC_0 n(x), \quad \begin{pmatrix} \gamma_z(x, 0) \\ E_y(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_0 n(x), \quad (29)$$

其中

$$n(x) = \frac{\sinh(bx)}{[\sinh^2(bx) - \sinh^2(ba)]^{1/2}} \quad x > a \tag{30}$$

最后, 这些量在裂纹尖端处对应的强度因子分别可表示为

$$\begin{pmatrix} K \\ K^D \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} w_0/h \\ -v_0/h \end{pmatrix} \sqrt{a}F_B, \quad \begin{pmatrix} K \\ K^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{a}F_B, \tag{31}$$

其中

$$F_B = \sqrt{\frac{2h}{a} \tanh\left(\frac{a}{2h}\right)} \tag{32}$$

3) 问题 C 的解 对这种情况, 由边界条件(9)以及(11)、(12), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} C_0 = \left[\frac{h_0 + e_{15} v_0}{hc_{44}}, -\frac{0}{h} \right]^T, \quad B_2(\cdot) = -B_1(\cdot) \coth(h), \\ c_{44}[A_1 \sinh(h) + A_2 \cosh(h)] + e_{15}[B_1 \sinh(h) + B_2 \cosh(h)] = 0, \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

其中函数 $A_1(\cdot)$ 和 $B_1(\cdot)$ 满足下列对偶积分方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^a [c_{44}A_1(\cdot) + e_{15}B_1(\cdot)] \tanh(h) \cos(x) d\cdot &= 0 \quad 0 < x < a, \\ \int_0^a [c_{44}A_1(\cdot) + e_{15}B_1(\cdot)] \cos(x) d\cdot &= 0 \quad x > a; \\ \int_0^a B_1(\cdot) \coth(h) \cos(x) d\cdot &= -\frac{0}{h} \quad 0 < x < a, \\ \int_0^a B_1(\cdot) \cos(x) d\cdot &= 0 \quad x > a \end{aligned} \right. \tag{34}$$

比较(34)和(18)以及(35)和(27), 这两对方程的形式是类似的 因此, 利用前面的结果, 我们可以写出(34)和(35)的解, 为节约篇幅, 解的形式在此省略 经过运算, 我们有以下解答:

$$\left. \begin{aligned} y_z(x, 0) = -v_0 m(x), \quad y_z(x, 0) = -\frac{0}{c_{44}} m(x) + \frac{e_{15} v_0}{hc_{44}} n(x), \\ D_y(x, 0) = -\frac{e_{15}}{c_{44}} v_0 m(x) + \frac{c_{44} v_0 + e_{15}^2}{hc_{44}} v_0 n(x), \quad E_y(x, 0) = \frac{0}{h} n(x), \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

其中 $m(x)$ 和 $n(x)$ 分别由(22)和(30)给出, 这里, 我们已经省略了不产生奇异项的均匀力场和电场 这种情况下这些量在裂纹尖端处的强度因子可表示为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} K = v_0 \sqrt{a}F_A, \quad K^D = \frac{e_{15} v_0}{c_{44}} \sqrt{a}F_A + \frac{(c_{44} v_0 + e_{15}^2)}{hc_{44}} v_0 \sqrt{a}F_B, \\ K = \frac{0}{c_{44}} \sqrt{a}F_A + \frac{e_{15} v_0}{hc_{44}} \sqrt{a}F_B, \quad K^E = \frac{0}{h} \sqrt{a}F_B, \end{aligned} \right\} \tag{37}$$

其中 F_A 和 F_B 分别由(25)和(32)给出

4) 问题 D 的解 类似于问题 C 的讨论, 由边界条件(10)以及(11)、(12), 我们可以得到

$$\left. \begin{aligned} C_0 = \left[\frac{w_0}{h}, -\frac{hD_0 - e_{15}w_0}{h c_{11}} \right]^T, \quad A_2(\cdot) = -A_1(\cdot) \coth(h), \\ e_{15}[A_1 \sinh(h) + A_2 \cosh(h)] - c_{11}[B_1 \sinh(h) + B_2 \cosh(h)] = 0, \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

其中函数 $A_1(\cdot)$ 和 $B_1(\cdot)$ 满足下列对偶积分方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^a A_1(\cdot) \coth(h) \cos(x) d\cdot &= \frac{w_0}{h} \quad 0 < x < a, \\ \int_0^a A_1(\cdot) \cos(x) d\cdot &= 0 \quad x > a; \end{aligned} \right. \tag{39}$$

$$\begin{cases} \int_0^J [e_{15}A_1(\cdot) - e_{11}B_1(\cdot)] \tanh(h) \cos(x) dx = D_0 & 0 \leq x < a, \\ \int_0^J [e_{15}A_1(N) - e_{11}B_1(N)] \cos(xN) dN = 0 & x > a \end{cases} \quad (40)$$

这两个方程的解也可类似给出, 省略不产生奇异项的均匀力场和电场后最后可得其电弹性解为

$$\left. \begin{aligned} R_{yz}(x, 0) &= \frac{e_{15}}{E_{11}} D_0 m(x) + \frac{c_{44} E_{11} + e_{15}^2}{h E_{11}} w_0 n(x), & G_z(x, 0) &= \frac{w_0}{h} n(x), \\ D_y(x, 0) &= -D_0 m(x), & E_y(x, 0) &= -\frac{D_0}{E_{11}} m(x) - \frac{e_{15} w_0}{h E_{11}} n(x), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中 $m(x)$ 和 $n(x)$ 分别由(22) 和(30) 给出# 在裂纹尖端处这些量的强度因子分别为:

$$\left. \begin{aligned} K^R &= -\frac{e_{15} D_0}{E_{11}} \sqrt{Pa} F_A + \frac{c_{44} E_{11} + e_{15}^2}{h E_{11}} w_0 \sqrt{Pa} F_B, & K^D &= D_0 \sqrt{Pa} F_A, \\ K^C &= \frac{w_0}{h} \sqrt{Pa} F_B, & K^E &= \frac{D_0}{E_{11}} \sqrt{Pa} F_A - \frac{e_{15} w_0}{h E_{11}} \sqrt{Pa} F_B \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

其中 F_A 和 F_B 分别由(25) 和(32) 给出#

3 结果和讨论

上面给出的 4 种情况的解答可以看出, 所有场强度因子在裂纹尖端处一般不为零, 这表明对于非电渗透型的裂纹而言, 在裂纹尖端处的弹性场和电场都呈现平方根奇异性, 而且这些强度因子有以下的依赖关系:

$$K^R = c_{44} K^C - e_{15} K^E, \quad K^D = e_{15} K^C + E_{11} K^E, \quad (43)$$

这些关系与文[1, 4] 中的结论完全一致# 然而, 对于电渗透型的裂纹来说, 其电场强度因子总是非奇异的^[4, 11], 文[11] 中给出了有限厚的压电陶瓷板含反平面电渗透型裂纹的一些数值结果, 显然, 本文的方法可适用于求解此类问题, 这在另外报道# 这里, 我们获得了有限厚的压电陶瓷板含非电渗透型的反平面裂纹的电弹性场解答, 而且, 在求解过程中, 我们回避了用数值方法求近似解, 而是以精确的解析结果给出解答# 特别, 当板的厚度 $h \ll y_0$ 时, 我们发现 $F_A \approx 1$ 和 $F_B \approx 1$, 从而, 上面获得的结果将退化为无限压电陶瓷平面含非电渗透型反平面裂纹的解^[1, 2, 4]# 选用文[14] 中提出的机械应变能释放率

$$G^M = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{2D} \int_0^D R_{yz}(x, 0) [u_3(D-x, 0^+) - u_3(D-x, 0^-)] dx = \frac{1}{2} K^R K^C \quad (44)$$

作为断裂判据, 这里, D 表示裂纹在裂纹尖端处向外扩展的一个虚拟的小距离# 对于 4 种给定的边界条件而言, 利用(44) 计算可分别得到

$$G^M(A) = \frac{S_0(E_{11} S_0 + e_{15} D_0)}{c_{44} E_{11} + e_{15}^2} \frac{4h}{P^2} \tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right) F^2\left[\tan\left(\frac{Pa}{2h}\right)\right], \quad (45)$$

$$G^M(B) = \frac{w_0(c_{44} w_0 - e_{15}^2)}{h} \tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right), \quad (46)$$

$$G^M(C) = \frac{S_0}{c_{44}} \left[\frac{2}{P} S_0 F\left[\tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right)\right] + e_{15} \frac{<0}{h} \frac{2h}{P} \tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right) F\left[\tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right)\right] \right], \quad (47)$$

$$G^M(D) = \frac{w_0}{E_{11}} \left[(c_{44} E_{11} + e_{15}^2) \frac{w_0}{h} - \frac{2e_{15}}{P} D_0 F\left[\tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right)\right] \right] \tanh\left(\frac{Pa}{2h}\right) \quad (48)$$

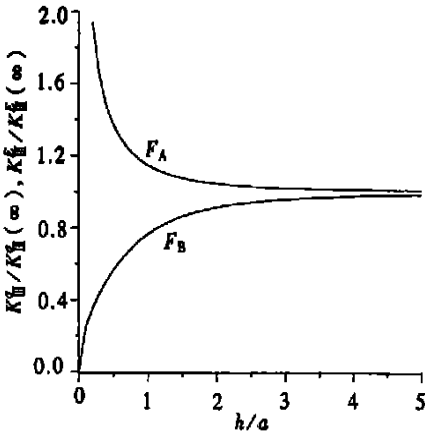


图2 $K^R/K^R(\infty)$ 和 $K^E/K^E(\infty)$ 随 h/a 的变化关系

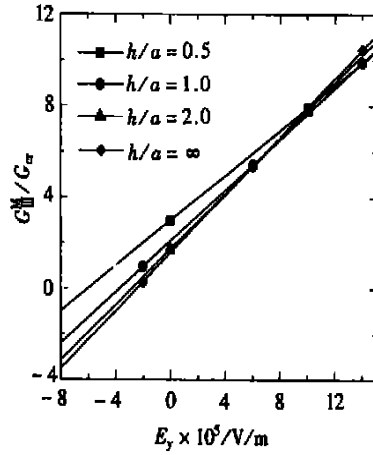


图3 规范机械应变能释放率当 $S_0 = 412 \text{ MPa}$ 时随电场的变化

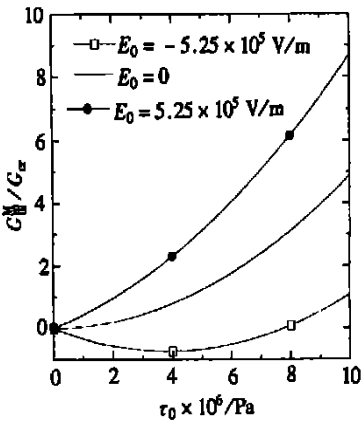


图4 规范机械应变能释放率当 $h/a = 2$ 时随应力的变化

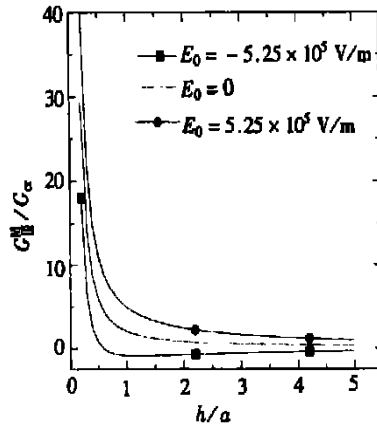


图5 规范机械应变能释放率当 $S_0 = 412 \text{ MPa}$ 时随 h/a 的变化

显然, 对所有情况, 机械应变能释放率 G^M 都与弹性载荷和电载荷有关, 而且, 电载荷只有在非零反平面剪应力或反平面位移的条件下才对 G^M 有贡献, 此时, 对给定反平面剪应力的情况, 正的电场或电位移有促进裂纹扩展的趋势; 而对给定反平面位移的情况, 正的电场或电位移有阻止裂纹扩展的趋势#

作为例子, 考虑受反平面剪应力作用及电压作用的 PZT_5H 压电陶瓷板的中心处有一平行于边界的长度为 $2a = 0102 \text{ m}$ 的线裂纹(即情况 C), 有关的材料常数为 $c_{44} = 3153 @ 10^{10} \text{ N/m}^2$, $e_{15} = 1710 \text{ C/m}^2$, $E_{11} = 151 @ 10^{-10} \text{ C/Vm}$, $G_{cr} = 510 \text{ N/m}^{[1, 11]}$, 这里, G_{cr} 为临界能量释放率# 在此情况下, 我们有 $E_0 = 5 < /5y = < /h\#$ 在图 2 中, 我们给出了规范应力强度因子 $K^R/K^R(\infty) = F_A$ 和规范电场强度因子 $K^E/K^E(\infty) = F_B$ 随比率 h/a 的变化规律, 随着 h/a 的增加, F_A 渐渐减少而 F_B 却逐渐增加, 最后, 都渐渐靠近于 1, 这里, $K^R(\infty)$ 和 $K^E(\infty)$ 分别表示当 $h \rightarrow \infty$ 时的应力强度因子和电场强度因子# 对于 $S_0 = 412 \text{ MPa}$, 图 3 刻画了 G^M/G_{cr} 与电场强度 $E_y = \sigma_0/h$ 的依赖关系# 图 4 给出了当电场强度 $E_0 = \sigma_0/h$ 分别为 -5125 kV/m , 0 , 和 5125 kV/m 时 G^M/G_{cr} 与 S_0 的函数对应关系# 当 $S_0 = 412 \text{ MPa}$ 和 $E_0 = \sigma_0/h$ 分别为

- 5125 kV/m, 0, 和 5125 kV/m, 图 5 则给出了 G^M/G_{cr} 与比率 h/a 的变化关系 #

4 结 论

本文考虑了压电陶瓷板中含有非电渗透型的反平面裂纹问题# 利用积分变换和对偶积分方程, 获得了在边界上受 4 种机电组合载荷情况下, 裂纹线上电弹性场的明显解析表达式, 及裂纹尖端处一些量的强度因子和机械应变能释放率公式#

[参 考 文 献]

- [1] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. J Appl Mech , 1990, 57(3) : 647) 653.
- [2] Li S P, Cao W, Cross L E. Stress and electric displacement distribution near Griffith. s type crack tips in piezoceramics[J]. Mater Lett , 1990, 10(6) : 219) 222.
- [3] Dunn M L. The effects of crack face boundary conditions on the fracture mechanics of piezoelectric solids[J]. Eng Frac Mech , 1994, 48(1) : 25) 39.
- [4] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for mode crack in a piezoelectric material[J]. Int J Solids Structures , 1996, 33(3) : 343) 359.
- [5] 侯密山、梅甫良. 不同压电材料反平面应变状态下的电渗透型界面裂纹[J]. 科学通报, 1998, 43(2) : 216) 221.
- [6] Dascalu C, Maugin G A. On the dynamic fracture of piezoelectric materials[J]. Quart J Mech Appl Math, 1995, 48(2) : 237) 255.
- [7] 陈增涛, 余寿文. 反平面冲击下压电介质的裂纹尖端场[J]. 科学通报, 1997, 42(15) : 1413) 1427.
- [8] Li S F, Mataga P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials_part Electrode solution [J]. J Mech Phys Solids , 1996, 44(11) : 1799) 1830.
- [9] Li S F, Mataga P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials_part Vacuum solution [J]. J Mech Phys Solids , 1996, 44(11) : 1830) 1866.
- [10] Li X F, Fan T Y, Wu X F. A moving mode_ crack at the interface between two dissimilar piezoelectric materials[J]. Int J Eng Sci , 2000, 38(11) : 1219) 1234.
- [11] Shindo Y, Tanaka K, Narita F. Singular stress and electric fields of a piezoelectric ceramic strip with a finite crack under longitudinal shear[J]. Acta Mech , 1997, 120(1) : 31) 45.
- [12] Parton V Z, Kudryavstev B A. Electromagnetoelasticity [M]. New York: Gordon and Breach, 1988.
- [13] Singh B M, Moodie T B, Haddow J B. Closed_form solutions for finite length crack moving in a strip under anti_plane shear stress[J]. Acta Mech , 1981, 38(2) : 99) 109.
- [14] Park S, Sun C T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics[J]. J Am Ceram Soc, 1995, 78(6) : 1475) 1480.

¹, FAN Tian_you²

(11 College of Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, P R China;

21 Research Center for Materials Science, Beijing Institute of Technology,
Beijing 100081, P R China)

Abstract: Electroelastic behavior of a cracked piezoelectric ceramics plate subjected to four cases of combined mechanical_electrical loads was analyzed. The integral transform method was applied to convert the problem involving an impermeable anti_plane crack to dual integral equations. Solving the resulting equations, the explicit analytic expressions for electroelastic field along the crack line and the intensity factors of relevant quantities near the crack tip and the mechanical strain energy release rate were obtained. The known results for an infinite piezoelectric ceramics plane containing an impermeable anti_plane crack are recovered from the present results only if the thickness of the plate h y] .

Key words: piezoelectric ceramics; electroelastic field; anti_plane shear problem; impermeable crack