

文章编号: 1000-0887(2002) 02_0165_08

一类非线性抛物型分布参数控制系统的研究

周建军¹, 徐燕侯²

(1 中国科学技术大学 火灾科学国家重点实验室, 合肥 230026;

2 中国科学技术大学 力学和机械工程系, 合肥 230026)

(蔡树棠推荐)

摘要: 对一类有广泛应用的活动边界域上非线性抛物型分布参数系统进行建模。采用将系统转化为固定域系统或转化为集中参数系统的方法, 从理论上分析了系统的基本特征, 得出控制变量存在两个临界值, 大者区分边界活动与否, 小者区分边界活动后会自动停止与否。将平面、柱面和球面的一维系统表述成统一形式, 通过计算机仿真研究了系统开环控制和闭环反馈控制的动态特性, 数值结果与理论结果一致。计算机仿真表明系统是适定的、稳定的, 而且是可测的和可控的。

关键词: 分布参数控制; 非线性; 活动边界; 稳定性; 可测性; 可控性

中图分类号: O302 **文献标识码:** A

引言

在航空航天工程防热中^[1,2], 在大型混凝土浇注、化工生产、粉末冶金以及森林火灾和扬沸火灾中^[3,4], 存在一类应用广泛的活动边界域上非线性抛物型分布参数控制系统。这类系统的特点是: 有第三类边界条件、活动边界、还可能有域内活动的间断面; 控制变量一般出现在边界条件中, 在一定的条件下还同时出现在方程中。本文对这类系统进行建模, 从理论上分析了系统的基本特征, 采用两种方法进行数字仿真: 1) 将活动边界域上系统转化为固定域上系统; 2) 将分布参数系统转化为集中参数系统。针对一维系统, 用计算机仿真研究了系统开环控制和闭环反馈控制的动态特性, 数值结果与本文理论公式结果一致。计算机仿真表明系统是适定的、稳定的、可测的和可控的。

1 状态函数和状态方程

本文采用的符号与文献[2]相同, 根据文献[2, 5, 6], 由发汗冷却系统得出一类活动边界域上的分布参数控制系统为

收稿日期: 2000_12_12; 修订日期: 2001_10_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59936140)

作者简介: 周建军(1953), 男, 安徽人, 副研究员, 硕士;

徐燕侯(1933), 男, 浙江人, 教授。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(\rho c_p T)}{t} &= \text{div} \left[k \text{grad} T + \frac{k c_p \rho_L}{L} T \text{grad} p - \rho c_p T \frac{\mathbf{e}}{t} \right], \\ \frac{(\rho L)}{t} &= \text{div} \left[\frac{k}{L} \text{grad} p - \rho L \frac{\mathbf{e}}{t} \right], \\ t = 0: T &= f_1(x, y, z), p = f_2(x, y, z), s = l, \frac{s}{t} = 0, \mathbf{e} = 0, \\ y = 0: p &= p_e(t), k \frac{T}{y} = - \frac{k}{L} \rho L (T - T_e) \frac{p}{y}, \\ y = s(t, x, z): p &= p_0(x, y, z), T = T_a, \frac{s}{t} = 0, (T - T_a) \frac{s}{t} = 0, \\ k \frac{T}{n} + T^4 - \frac{L \frac{s}{t}}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{h_x} \frac{s}{x} \right]^2 + \left[\frac{1}{h_z} \frac{s}{z} \right]^2}} &= q, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

其中 T 、 T_a 和 l 分别为多孔性热层的温度、烧蚀温度和厚度, ρ_L 是冷却剂的密度, ρ 是发射系数, σ 为 Stefan-Boltzmann 常数 $q = q_0(1 - T(t, x, s, z)/T_r)$, p_0 和 T_r 为外部气流的压力和滞止温度 O_{xyz} 为正交贴体坐标系, 坐标曲面 Oxz 与热层内壁面重合, y 轴向外, h_x 、 h_y 和 h_z 为 Lam 系数, 有 $h_y = 1$ $y = s(t, x, z)$ 为活动边界的位置, $\partial/\partial n$ 为沿活动边界的外法向导数 $T(t, x, s, z) = T_a$ 是边界活动的必要条件 在各热物理系数中, k 和 ρ 随 T 的变化最为重要^[7], 可以表成 $k = 1/(AT) + N$ 和 $\rho = BT^{-n}$, 其余的均可以近似地取为常数 q_0 、 T_r 和 $p_0(t, x, z)$ 为系统的环境输入变量 系统的状态函数为 $T = T(t, x, y, z)$, $p = p(t, x, y, z)$, $s = s(t, x, z)$, 控制变量为 $p_e(t)$, 可变的空间定义域为 $\mathbf{R}^3(0, 1-s)$ \mathbf{R} 上述系统的一个简单情形是冷却剂是不可压缩的, 有 ρ_L 为常数, 在一般情形下, 则冷却剂是完全气体, 有物性方程 $p = R \rho_L T$ (R 为气体常数), 因此方程是封闭的 定解问题(1)中的第一式、第二式和最后一式组成状态方程 前两个方程是二阶抛物型偏微分方程, 最后一个方程是一阶的偏微分方程, 均显含非线性项, 边界条件也是非线性的 系统还可以在域内有活动的弱间断面引起的附加项, 本文不予考虑

系统有两类控制模式 为了使系统的解确定起见, 控制条件写成

- 1) 第一类控制模式(控制边界不活动): 选取 $T_b = T_a$, 则
 当 $t > 0$ 时, $T(t, x, l, z) = T_b$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} \max [T(t, x, l, z)] = T_b$; (2)
- 2) 第二类控制模式(控制边界活动距离): 设定 $t > 0$ 和 $s < l$ 时, 则
 当 $t = t_1$ 时, $s(t, x, z) = s_1$, 且 $\min [s(t, x, z)] = s_1$ (3)

记系统输出为

$$\left\{ \begin{aligned} T_l &= T(t, x, l, z), T_w = T(t, x, s, z), T = T(t, x, s, z), \\ p_l &= p(t, x, l, z), p_w = p(t, x, s, z), p = p(t, x, s, z), \end{aligned} \right. \quad (4)$$

显然, 这些物理量都是可以测量的, 则系统可建模如图 1, 其中反馈控制器() 在第一类控制模式中用以镇定 $T_w = T_b$, 在第二类控制模式中用以镇定边界活动开始的时间 $t_1 = t_1$; 反馈控制器() 在第二类控制模式中用以镇定 $\min [s(t, x, z)] = s_1$

关于系统(1)的适定性问题, 对于固定域上的线性分布参数系统和活动边界域上 Stafen 问题已经证明^[6], 而对于一般性问题还有待解决, 控制模式的稳定性在理论上也有待解决 下面对一维系统进行理论分析, 不考虑热膨胀的影响, 并用计算机仿真研究系统的开环控制和

闭环反馈控制的动态特性, 考察其稳定性, 可测性和可控性

2 化为固定域系统

设一维系统中各系数均为常数, 且 $L = \text{常数}$, 则由定解问题(1)的第二式积分得

$$p(t, y) = p_0 - (p_l(t) - p_0)(1 - y/l) \quad (5)$$

于是定解问题(1)中只剩下两个未知函数 $T(t, y)$ 和 $s(t)$, 以及两方程(定解问题(1)中第一式和最后一式) 对于平面、柱面和球面的一维系统, 分别由笛卡尔坐标、柱坐标和球坐标, 定解问题可以写成统一形式^[7,8] 记 $A = a/l$, 其中 a 为柱面和球面热层的内径, 平时 $a = 0$ 引入特征时间 $= s_c l^2/k$ 和无量纲参数

$$\begin{cases} = q_0 l / (kT), & = L / (c_s (T_a - T_c)), \\ = k / (K L \phi L), & q_r = (T_r - T_c) / (T_a - T_c) \end{cases} \quad (6)$$

作无量纲变换:

$$\begin{cases} = t / \tau, & = (r - a) / s(t), & s = s(t) / l, \\ (,) = (T - T_c) / (T_a - T_c), & C_p() = (p_l(t) - p_0) / p_0, \end{cases} \quad (7)$$

则定解问题(1)化为

$$\begin{cases} - = \frac{1}{s()^2} \frac{\partial^2}{\partial^2} + \left\{ \frac{[s() + A]^{(-1)} - A}{[s() + A] s()} + \frac{s()}{s()} \right\} -, \\ \frac{ds()}{d} = \left[\frac{1}{s()} - (, 1) - (r - (, 1)) \right], \\ (0,) = 0, & s(0) = 1, & s(0) = 0, & \frac{1}{s()} - (, 0) = (, 0), \\ (, 1) = 1, & s() = 0, & [(, 1) - 1] s() = 0, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $= 0, 1, 2$ 分别为平面、柱面和球面的情形, $= C_p()$ ($C_p()$ 为控制变量) 将由控制条件式(2) 或式(3) 式决定 定解问题(8) 加上控制条件构成一个固定域 $[0, 1]$ 上分布参数的非线性控制系统, 以 $(,)$ 和 $s()$ 为状态变量, $(,)$ 和 $s()$ 为状态函数, 特点是控制变量不仅出现在方程中, 同时还出现在边界条件中 当恒有 < 1 时, 由于 $s() > 0$, 只有一个状态函数 $(,)$, 上述定解问题是固定域上线性变系数抛物型偏微分方程的初边值问题; 而当 $= 1$ 时, $s()$ 也是未知函数, 则上述定解问题成为固定域上非线性抛物型偏微分方程和常微分方程联立的初边值问题

在第一类控制问题中, 令 $= (T - T_c) / (T_b - T_c)$, 则控制条件式(2) 化为

$$(, 1) = 1, \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow \infty} (, 1) = 1 \quad (9)$$

此时 $s() > 0$, 控制变量 $C_p()$ 受控制条件式(9) 的制约, 立即得出平衡状态的温升分布为

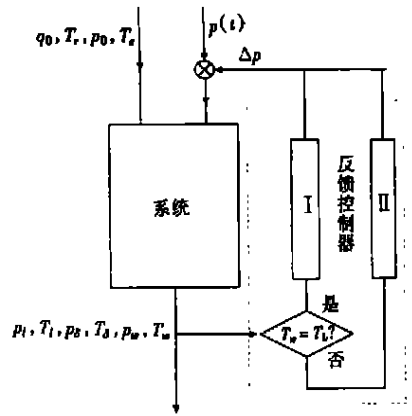


图1 系统控制建模简图

$$\begin{cases} \text{平面:} & = \exp[-(1-\)], \\ \text{轴对称:} & = \left[\frac{+A}{1+A} \right]^A, \\ \text{球对称:} & = \exp \left[A^2 \left[\frac{1}{1+A} - \frac{1}{+A} \right] \right], \end{cases} \quad (10)$$

其中 $C_p(\)$, 相应的控制变量为

$$C_p(\) = \begin{cases} (T_r - T_b)/(T_b - T_c) & (\text{平面}), \\ (1 + 1/A) (T_r - T_b)/(T_b - T_c) & (\text{柱、球}) \end{cases} \quad (11)$$

显然, 控制变量以区分边界是否活动的第一临界值为

$$C_{pC1} = \begin{cases} (T_t - T_a)/(T_a - T_c) & (\text{平面}), \\ (1 + 1/A) (T_t - T_a)/(T_a - T_c) & (\text{柱、球}), \end{cases} \quad (12)$$

不难看出, C_{pC1} 是边界不出现活动时所需的控制变量的最小值 此时, 系统最简单的开环控制是取控制变量为常数, 并使

$$C_p = C_{pC1} \quad (13)$$

在第二类控制问题中, 控制条件(3)的无量纲形式为

$$\text{当 } s(\) = s, \text{ 且 } s(\) = s \quad (14)$$

现在来研究无量纲控制变量 $C_p(\)$ 为常数的情形 若存在 $\lim_i s(\) = s = 0$, 则 $\lim_i s(\) = 0$, 由定解问题(1)第二式得

$$\text{当 } \frac{1}{s} \rightarrow (\ , 1) - [r - (\ , 1)] = 0$$

根据此时平衡状态解(参见式(10)和(11)), 得出相应的控制压力系数为

$$C_p = (1 + s/A) (T_r - T_a)/(T_a - T_c) \quad (\text{柱、球}) \quad (15)$$

显然, 控制变量以区分边界活动后是否会停止(物理上显然)的第二临界值为

$$C_{pC2} = (T_r - T_a)/(T_a - T_c) \quad (\text{柱、球}) \quad (16)$$

不难看出, C_{pC2} 即边界出现活动后会停止时所需的控制变量的最小值, 且 $C_{pC2} < C_{pC1}$

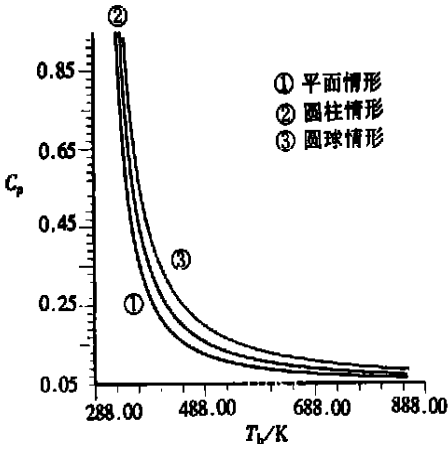
在平面一维系统中, 第二临界压力系数等于第一临界压力系数 此时控制系统边界后退距离最简单的开环控制是取控制变量为常数, 并使

$$C_{pC1} = C_p = C_{pC2} \quad (17)$$

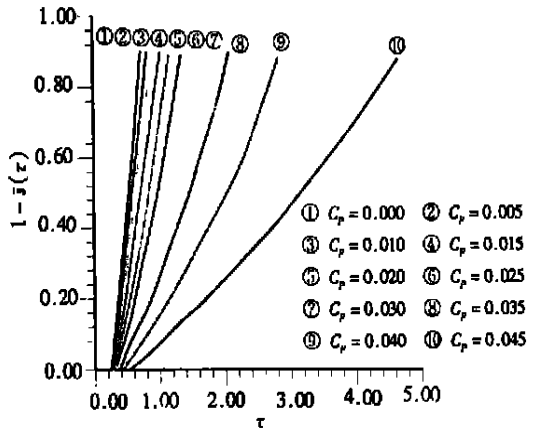
整个系统动态性能的计算机仿真, 分成边界活动前固定域阶段和边界活动后的可变域阶段 本文对抛物型偏微分方程采用二阶精度的 Crank_Nichelson 隐式差分格式, 对常微分方程采用 4 阶精度的 Runge_Kutta 法, 交替迭代 这一数值仿真方法的优点在于网格只需一次生成, 并保证整个计算进程中空间区域总有同样多的网点, 不会出现精度损失 数值结果与理论结果(见公式(9), (11), (14), (15))完全一致, 如图 2 所示 数值仿真表明系统是适定的、稳定的, 而且是可测的和可控的

3 化为集中参数系统

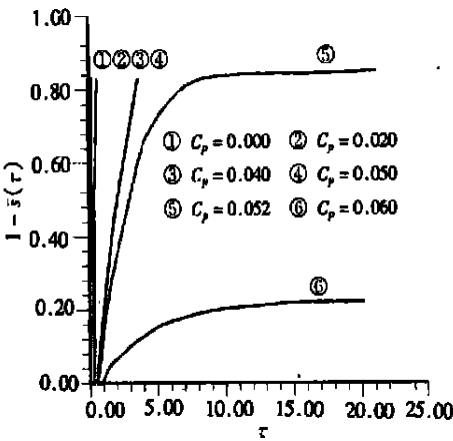
这类活动边界域上分布参数系统在平面一维和 $L = \text{常数}$ 的条件下, 可以通过第二类 Volterra 积分为集中参数系统^[9, 10] 由于在边界活动前, 系统为本征值问题, 有级数解 因此, 这里只讨论边界活动后的情形 取边界活动开始的时间为时间坐标原点, 引入参数



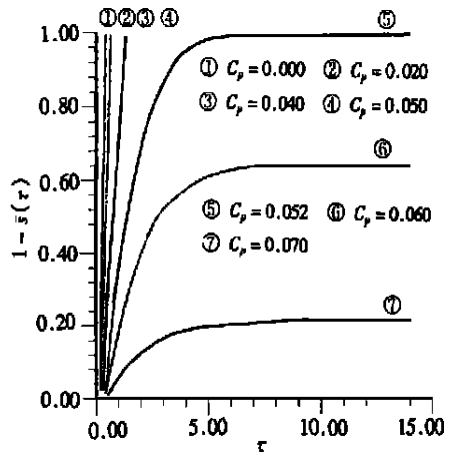
(a) 控制变量随外界目标温度 T_b 的变化



(b) 平面情形的表面烧蚀后退规律



(c) 圆柱情形的表面烧蚀后退规律



(d) 圆球情形的表面烧蚀后退规律

图2 系统特征数值模拟结果

$$\begin{cases} = \frac{k}{sCs}, & = \frac{K L Q_L p l(t) - p_0}{sCs l}, & = \frac{l}{2}, \\ C_1^* = \frac{kT_a}{L}, & C_2^* = \frac{ql(1 - T_a/T_r)}{L}, \end{cases} \quad (18)$$

作无量纲变换:

$$\begin{cases} = y/l, & = t/l^2, & s(\cdot) = s(\cdot)/l, \\ u(\cdot, \cdot) = [-1 + T(l, l^2/\cdot)] \exp(\cdot + \cdot^2)/T_a, \end{cases} \quad (19)$$

则一维定解问题的无量纲形式为:

$$-\frac{u}{2} = \frac{u}{2}, \quad (20a)$$

$$(u + u) |_{=0} = (T/T_a - 1)2 \exp(\cdot^2), \quad (20b)$$

$$u |_{=s(\cdot)} = 0, \quad (20c)$$

$$s(\cdot) = C_1^* \exp(- (s) - \cdot^2) - \frac{u}{2} \Big|_{=s(\cdot)} - C_2^*, \quad s(0) = 1, \quad (20d)$$

$$u |_{=0} = (-1 + f(l)/T_a) \exp(\cdot), \quad (20e)$$

其中 $f(y) = T(y, 0)$ 定解问题(20) 有活动边界, 是一类新的 Stefan 问题 记:

$$\begin{cases} v(\cdot) = -\frac{u}{d} \Big|_{=s(\cdot)}, & h(\cdot) = u(0, \cdot), & w(t) = \frac{dh(\cdot)}{d}, \\ s(\cdot) = \exp(-\lambda s(\cdot)), \\ (\cdot) = u|_{=0} = (-1 + f(l)/T_a) \exp(-\lambda \cdot), \\ g(\cdot) = (T/T_a - 1)2 \exp(C^2 s), \end{cases} \quad (21)$$

则定解问题(20) 可以转化为等价的第二类非线性 Volterra 型积分方程组:

$$\begin{cases} v(S) = 2 \left[\langle(0) - \frac{g(0) - \langle(0)}{C} \right] N(s(S), S; 0, 0) + \\ \int_0^1 \int_0^s \langle(N)N(s(S), S; N, 0) dN - \int_0^S w(X)N(s(S), S; 0, X) dX + \\ \int_0^S G N(s(S), S; s(X), X) dX, \\ w(S) = \frac{1}{\sqrt{P}} \left\{ \int_0^S \frac{w(X)}{\sqrt{S-X}} dX - \int_0^S \frac{gc(X)}{\sqrt{S-X}} dX + \right. \\ \left. \int_0^S \frac{dX}{\sqrt{S-X}} \int_0^X M(X)GN(0, X; s(X), X) dX \right\} + \\ \frac{1}{\sqrt{P}} \int_0^S \left[\langle(l)NN(0, X; l, 0) - \int_0^1 \langle(N)NN(0, X; N, 0) dN \right] \frac{dX}{\sqrt{S-X}}, \\ R(S) = - \int_0^S \alpha_2^* R(X) dX + e^{C_1} + \int_0^S \alpha_1^* M(S) e^{-C^2 s} dX, \end{cases} \quad (22)$$

其中 $G(N, S; G, X)$ 和 $N(N, S; G, X)$ 的定义如下: 设

$$K(N, S; G, X) = \frac{1}{2 \sqrt{P(S-X)}} \exp \left[-\frac{(N-G)^2}{4(S-X)} \right] \# \quad (23)$$

令

$$\begin{cases} G(N, S; G, X) = K(N, S; G, X) - K(-N, S; G, X), \\ N(N, S; G, X) = K(N, S; G, X) + K(-N, S; G, X), \end{cases} \quad (24)$$

上述积分方程组中的 G_N, N_N, G_N, N_N 指相应函数对各下标的偏导数 #

于是, 平面一维活动边界域上分布参数系统(20) 化为集中参数系统(22) # 这一方法的优点是极为明显的: 1) 活动边界域无需特殊处理, 而且不必计算热层的温度分布就可以直接得到热层表面的烧蚀量和烧蚀速率随时间的变化规律, 确定出表面烧蚀的开始时间和终了时间、以及它们各自随控制压力的变化, 这正是工程应用中关心的焦点; 2) 集中参数系统的研究要比分布参数系统的研究成熟得多, 便于引用集中参数系统中的研究成果 #

同样地, 本文将整个系统动态特性的研究分成边界活动前固定域阶段和边界活动后的可变域阶段 # 在平面一维边界活动前的固定域阶段, 平面一维系统可以通过本征值问题求得级数解, 由此给出定解问题(20) 的初始条件 # 在边界活动后的计算机仿真中采用迭代法, 对第二类 Volterra 型积分方程采用均匀时间步推进的多步法; 对常微分方程采用 4 阶 Runge_Kutta 法 # 计算中将遇到 Dirac 函数的积分, 奇点在 $S = 0$ 处, 通过变换转移奇点的方法, 可以顺利解决 #

4 系统的反馈控制

设系统是无条件稳定的, 由于环境输入的干扰因素变化的特征时间(秒量级) 远大于系统

本身的特征时间(毫秒量级),因此我们可以用平衡状态来设计反馈控制器^[5]。当环境输入变化时,得出修正的压力增量为

$$p = A \left\{ p_0 \sqrt{1 + \frac{2lRm_L T_c l}{K p_0^2} \left[1 + \frac{(T_w - T_a)}{K T_c} (G - \exp(-K)) \right]} - p_l \right\}, \quad (25)$$

其中 A 为放大系数。不加阻尼器以及不计伺服机构的影响,方程(25)就是简单的反馈控制的动态方程。闭环反馈控制的方框图见图1。简单反馈控制的计算机仿真很快地得到了稳定的结果。数值结果见图3。

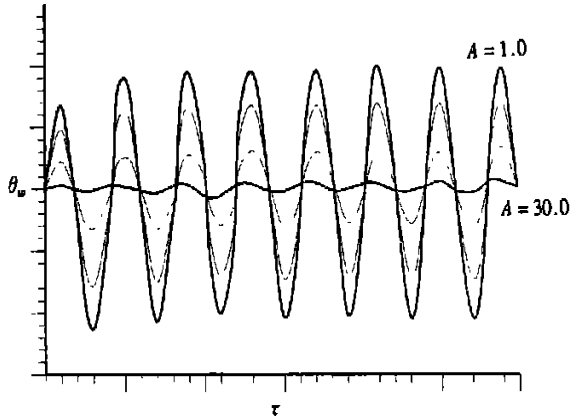


图3 在 $q_0 = a[1 + 0.125\sin(5Pt)]$ 的条件下,第一类控制模型通过反馈控制器()对加热面温度的动态控制 (H_w 为无量纲温度, S 为无量纲时间)

5 结 束 语

本文研究了一类活动边界域上分布参数的非线性控制系统,给出数值仿真方法,数值结果与理论结果完全一致。数值仿真表明系统是适定的、稳定的,而且是可测的和可控的。计算图中物性参数:

$$\begin{aligned} Q &= 2707 \text{ kg/m}^3, \quad c_s = 938 \text{ W}\cdot\text{s/kg}\cdot\text{K}, \quad T_a = 93313 \text{ K}, \quad k = 238 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \\ T_c &= 288 \text{ K}, \quad Q_0 = 0.1906 \text{ kg/m}^3, \quad p_0 = 11013.25 \text{ N/m}^2, \\ c_{pL} &= 512 \cdot 10^3 \text{ W}\cdot\text{s/kg}\cdot\text{K}, \quad \leq 0.1, \quad q_0 = 11884 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2, \\ K &= 41277 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad T_r = 14000 \text{ K}, \quad l = 0.102 \text{ m} \end{aligned}$$

[参 考 文 献]

- [1] Curry D M, Cox J E. Transient, compressible heat and mass transfer in porous media using the strongly implicit iteration procedure[Z]. AIAA No 72-23, 1972.
- [2] 徐燕侯,杨学实. 发汗冷却控制系统及其特性[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(11): 993-1001.
- [3] 周建军,童盛,刘幸东,等. 树冠火蔓延的一维模型及其应用[J]. 中国科学技术大学学报, 1996, 26(增刊): 218-222.
- [4] 吴清松,童盛,周建军,等. 树冠火蔓延模型和计算分析[J]. 火灾科学, 1996, 5(2): 29-34.
- [5] 徐燕侯. 控制热防护层温升的发汗冷却系统[J]. 上海建材学院学报, 1994, 7(3): 259-264.
- [6] 弗里德曼. 抛物型偏微分方程[M]. 夏宗伟译,姜礼尚校,科学出版社,1984.
- [7] 徐燕侯,吴广钰,弓广辉,等. 有烧蚀的发汗冷却控制系统动态性能的分析 and 数值模拟[J]. 系统

- 工程和电子技术, 1993, 15(10): 75) 81.
- [8] 徐燕侯, 吴广钰, 弓广辉, 等. 旋成体表面防热的发汗冷却控制及其数值模拟[J]. 计算物理, 1995, 12(1): 71) 78.
- [9] 杨兆吉, 徐燕侯, 杨学实. 发汗冷却系统的第二类 Volterra 积分方程及其数值解[J]. 中国科学技术大学学报, 1993, 23(3): 100) 107.
- [10] XU Yang_hou, YANG Zhao_ji. Numerical analysis for heat shield ablation law in transpiration cooling system[J]. J Thermal Science, 1993, 2(4): 260) 265.

T h e S t u d y o n a K i n d o f C o n t r o l S y s t e m W i t h N o n l i n e a r
P a r a b o l i c D i s t r i b u t e d P a r a m e t e r s

Z H O U J i a n _ j u n ¹, X U Y a n _ h o u ²

(11 State Key Laboratory of Fire Science, University of Science
and Technology of China, Hefei 230026, P R China;

21 Department of Mechanic Engineering, University of Science and Technology of
China, Hefei 230026, P R China)

Abstract: The modelling of one kind of nonlinear parabolic distributed parameter control system with moving boundary, which had extensive applications was presented. Two methods were used to investigate the basic characteristics of the system: 1) transforming the system in the variable domain into that in the fixed domain; 2) transforming the distributed parameter system into the lumped parameter system. It is found that there are two critical values for the control variable: the larger one determines whether or not the boundary would move, while the smaller one determines whether or not the boundary would stop automatically. For one-dimensional system of planar, cylindrical and spherical cases the definite solution problem can be expressed as a unified form. By means of the computer simulation the open_loop control system and close_cycle feedback control system have been investigated. Numerical results agree well with theoretical results. The computer simulation shows that the system is well posed, stable, measurable and controllable.

Key words: distributed parameter control system; nonlinear; moving boundary; stability; measurability; controllability