应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002 02_0157_08

二维 RLW 方程的 Cauchy 问题*

黄正洪

(重庆商学院 基础部, 重庆 400067

(张鸿庆推荐

摘要: 通过椭圆积分求出了二维 RLW 方程椭圆余弦波解, 并用先验估计方法证明了该方程 Cauchy 问题关于小 x、y 周期解的若干性质和解的唯一性、稳定性•

关 键 词: 二维 RLW 方程; 椭圆余弦波解; 周期解; 唯一性
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

在非线性色散系统中, 文[1]、[2]研究了长波单向传播的模型方程

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_x - \gamma u_{xxt} = 0 \qquad x \in \mathbf{R},\ t \geqslant 0$$

称为 RLW 方程• 文[3]在此基础上求出了二维 RLW 方程的孤立波解• 本文利用椭圆积分求出了二维 RLW 方程椭圆余弦波解, 并用先验估计方法在 Sobolev 空间证明了该方程 Cauchy 问题关于 x、y 的周期解的若干性质和其解的唯一性•

1 二维 RLW 方程的椭圆余弦波解

对二维 RLW 方程

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u u_x + \delta u u_y - \mu u_{xxt} - \theta u_{yyt} = 0, \tag{1}$$

这里 α、β、γ、μ 和 θ 均为常数, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$ 和 $\mu > 0$, $\theta > 0$•

令

$$u(\xi) = u(x, y, t), \qquad \xi = lx + my - vt, \tag{2}$$

其中 $l > 0$• l、m、v 均为常数•

代(2 代入(1 得

$$(\alpha l + \beta m - v) u' + (rl + \delta m) u u' + (\mu l^2 v + \theta m^2 v) u''' = 0• \tag{3}$$

对(3 积分两次后, 得

$$\frac{(\alpha l + \beta m - v)}{2} u^2 + \frac{1}{6}(rl + \delta m) u^3 + \frac{v}{2}(\mu l^2 + \theta m^2) u' = Au + Bu• \tag{4}$$

利用边界条件, 当 $|\xi| \to \infty$, 则 u、u'、$u'' \to 0$, 得

$$\frac{u'}{2} = \frac{rl + \delta m}{6v(\mu l^2 + \theta m^2)} u^2 \left[\frac{3(v - \alpha l - \beta m)}{rl + \delta m} - u \right]• \tag{5}$$

---

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2001_11_09
作者简介: 黄正洪(1956— , 男, 四川巴中人, 副教授.

令 $p^2=\frac{6v(\mu l^2+\theta m^2)}{rl+\delta m}$, $q=\frac{6(v-\alpha l-\beta m)}{rl+\delta m}$,

方程(5 可变为:

$$\frac{u'^2}{2}=\frac{u^2}{p^2}\left(\frac{q}{2}-u\right)\cdot \tag{6}$$

当 $q>0$, 方程(6) 的解为

$$u(\xi)=\frac{q}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{q}}{2p}(\xi-\xi_0)\right], \tag{7}$$

其中 ξ_0 是积分常数• 即方程(1) 存在非平凡的孤立波解(7)•

当方程(1 存在非平凡的孤立波解时, 由(4 得

$$\frac{u'^2}{2}=\frac{1}{v(\mu l^2+\theta m^2)}\left[-\frac{rl+\delta m}{6}u^3+\frac{v-\alpha l-\beta m}{2}u^2+Au+B\right]=\frac{1}{a^2}F(u),$$

其中

$$a^2=v(\mu l^2+\theta m^2),$$

$$F(u)=-\frac{rl+\delta m}{6}u^3+\frac{v-\alpha l-\beta m}{2}u^2+Au+B,$$

这里 A、B 为积分常数•

假设 $F(u)$ 有三个实根, u_1、u_2、u_3 并且 $u_1>u_2>u_3$、$u_2\leqslant u<u_1$, 有

$$-\frac{\sqrt{2}}{a}(\xi-\xi_1)=\int_u^{u_1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{F(u)}}=\int_u^{u_1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)(u-u_3)}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{u_1-u_3}}\mathrm{sn}^{-1}(\sin\phi,k)=\frac{2}{\sqrt{u_1-u_3}}\mathrm{F}(\phi,k),$$

其中 $\phi=\arcsin\sqrt{\frac{u_1-u}{u_1-u_2}}$, $k^2=\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}$, $u_1=u(\xi_1)$•

设 T 为关于 ξ 的周期

$$T=\sqrt{2}a\int_{u_2}^{u_1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)(u-u_3)}},$$

$\mathrm{sn}^{-1}(\sin\phi,k)=\mathrm{F}(\phi,k)$ 是关于模 k 的第一类完全椭圆积分•

令 $\eta=\mathrm{sn}^{-1}(\sin\phi,k)$, 得方程(1) 的椭圆余弦波解

$$u(\xi)=u_1-(u_1-u_2)\mathrm{sn}^2(\eta,k)=u_2+(u_1+u_2)\mathrm{cn}^2(\eta,k)=$$

$$u_3+(u_1-u_3)\mathrm{dn}^2(\eta,k)=u_3+(u_1-u_3)\mathrm{dn}^2\left[\frac{\sqrt{u_1-u_3}}{\sqrt{2}a}(\xi-\xi_0),k\right], \tag{8}$$

其中 $\mathrm{sn}(\eta,k)=\sin\phi$, $\mathrm{cn}(\eta,k)=\cos\phi$, $\mathrm{dn}(\eta,k)=\sqrt{1-(k\sin\phi)^2}$•

由 Fourier 级数展开式(见[4] 知:

$$\mathrm{dn}^2(\eta,k)=\frac{2\pi^2}{\mathrm{K}^2}\left[\frac{\mathrm{KE}}{2\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cos n\left(\frac{\eta\pi}{K}\right)\right]=$$

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}+\frac{\pi^2}{\mathrm{K}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi\eta/\mathrm{K})}{\sinh(n\pi K'/\mathrm{K})}=$$

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}+\frac{\pi^2}{2\mathrm{K}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\exp[\mathrm{i}n(\pi\eta/\mathrm{K})]}{\sinh(n\pi K'/\mathrm{K})}+\frac{n\exp[-\mathrm{i}n(\pi\eta/\mathrm{K})]}{\sinh(n\pi K'/\mathrm{K})}\right\}=$$

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}-\frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{KK}'}+\frac{\pi^2}{2\mathrm{K}^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(2n\pi), \tag{9}$$

其中

$$\mathrm{K}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(k\sin\phi)^2}}$$

是关于模 k 的第一类完全椭圆积分,

$$\mathrm{K}'=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(k'\sin\phi)^2}}$$

是关于模 k' 的第一类完全椭圆积分, 其中 $k'=\sqrt{1-k^2}$,

$$\mathrm{E}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(k\sin\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi$$

是关于模 k 的第二类完全椭圆积分, $q=\exp(-\pi\mathrm{K}'/\mathrm{K})$•

定义 $g(2\pi n)$ 为

$$g(2n\pi)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{K}}{\pi\mathrm{K}'} & 当\ n=0,\\ \dfrac{2n\pi\exp[2n\eta\pi i/2K]}{2\pi\sinh[2n\pi\mathrm{K}'/2\mathrm{K}]} & 当\ n\neq 0•\end{cases}$$

易见 $g(\zeta)$ 关于 ζ 是连续可微的, 并且 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(2n\pi+\tau)$ 和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}g'(2n\pi+\tau)$ 关于 τ 绝对一致收敛• 对 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(2n\pi)$ 使用 Poisson's 求和公式(见文[5]),

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}g(2n\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}G(m),\tag{10}$$

其中 $$G(m)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)\exp(-\mathrm{i}mz)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}'^2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\pi}{2\mathrm{K}'}(\eta-2m\mathrm{K})\right]•\tag{11}$$

代(10)~(11)入(9),得

$$\mathrm{dn}^2(\eta,k)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}-\frac{\pi}{2\mathrm{K}\mathrm{K}'}+\frac{\pi^2}{4\mathrm{K}'^2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\pi}{2\mathrm{K}'^2}(\eta-2m\mathrm{K})\right],$$

则椭圆余弦波解(8)可表为:

$$u(\xi)=P+Q\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^2(\xi-\xi_1+mT),\tag{12}$$

其中

$$P=u_3+(u_1-u_3)(\mathrm{E}/\mathrm{K}-\pi/2\mathrm{K}\mathrm{K}'),\quad Q=(u_1-u_3)\frac{\pi^2}{4\mathrm{K}'^2},$$

$$T=\frac{4}{\sqrt{u_1-u_3}}\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\frac{4\mathrm{K}}{\sqrt{u_1-u_3}},\quad R=\pi\mathrm{K}/T\mathrm{K}'•$$

从(12)知, u 是关于 ξ 周期为 T 的周期函数, 无穷级数的每一项就是一孤立子并得如下结论:

若 $v\neq 0$ 为任意给定的行波速度, 当 $u_1>u_2$ 时, 二维 RLW 方程存在关于 ξ 有界非平凡椭圆余弦波解:

$$u(\xi)=u(lx+my-vt)•$$

2 Cauchy 问题周期解的若干估计

不失一般性, 对方程(1)令 $\alpha=\beta=\gamma=1$, 则其变为

$$\begin{cases}u_t+u_x+u_y+uu_x+\delta uu_y-\mu u_{xxt}-\theta u_{yyt}=0, & (13)\\ u=g(x,y), & (14)\end{cases}$$

其中 $u(x+P, y, t)=u(x, y+P, t)=u(x, y, t)$, x、y 是实数, $t\geqslant 0$[事实上, 对(1) 施行变换: $x'=\alpha x$, $t'=\alpha^2 t$, $y'=(\alpha^2/\beta)y$,

$$v(x', y', t')=\frac{r}{\alpha}u\left(\frac{x'}{\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta}y', \frac{t'}{\alpha^2}\right)=\frac{r}{\alpha}u(x, y, t),$$

则(1 可变为

$$v_{t'}+v_{x'}+v_{y'}+vv_{x'}+\delta' vv_{y'}-\mu' v_{x'x't'}-\theta' v_{y'y't'}=0,$$

其中 $\delta'=\dfrac{\delta}{r\beta}\alpha$, $\mu'=\mu\alpha^2$, $\theta'=\dfrac{\alpha^4}{\beta}\theta$•

这是方程(13 形式], δ、μ、θ 是常数, $\delta\neq 0$、$\mu>0$、$\theta>0$• u 是关于 x、y 周期为 P 的函数, 并要求

$$\int_0^P u(x, y, t)\mathrm{d}x=0 \qquad \text{对任何 } y, t\geqslant 0 \text{ 均成立•}$$

引理 1 若 $g(x, y)\in L_2$, 且对任意有限数 $T\in(0, \infty)$, 问题(13) ~ (14) 的周期解 $u(x, y, t)$ 满足•

$$E(T)=\frac{1}{2}\int_0^P\int_0^P u(x, y, T)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^P\int_0^P u^2(x, y, 0)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^P\int_0^P g^2(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=E(0)•$$

证明 以 $u(x, y, t)$ 乘以方程(13) 两端得

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t+\left(\frac{u^2}{2}\right)_x+\left(\frac{u^2}{2}\right)_y+\left(\frac{u^3}{3}\right)_x+\delta\left(\frac{u^3}{3}\right)_y-\mu uu_{xxt}-\theta uu_{yyt}=0, \tag{15}$$

在区域 $D=\left\{(x, y, t): 0\leqslant x\leqslant P,\ 0\leqslant y\leqslant P,\ 0\leqslant t\leqslant T\right\}$ 上, 对(15) 积分•

由于

$$\iiint_D (u^2)_x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t=0,\quad \iiint_D uu_{xxt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t=-\iiint_D uu_{xxt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t,$$

得

$$E(T)=\frac{1}{2}\int_0^P\int_0^P u^2(x, y, T)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^P\int_0^P g^2(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=E(0)=E_0•$$

引理 2(Sobolev 不等式 对任意实数 $\varepsilon>0$ 和正整数 n, 一定存在只与 ε、n 有关的常数 C, 使得

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_\infty\leqslant\varepsilon\|u\|_2+C\left\|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|_2 \qquad (k<n),$$
$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_2\leqslant\varepsilon\|u\|_2+C\left\|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|_2 \qquad (k\leqslant n),$$

其中 $\|u\|_\infty=\sup\limits_{x, y}|u(x, y, t)|$, $\|u\|^2=\|u\|_2^2=\displaystyle\int_0^P\int_0^P u^2(x, y, t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$•

引理 3 对任意有限数 $T\in(0, \infty)$, 当 g_x、$g_y\in L_2$, 则一定存在 Q_1, 使问题(13) ~ (14) 关于 x、y 的周期解 $u(x, y, t)$ 有估计

$$\|u\|^2+\frac{\mu}{2}\|u_x\|^2+\frac{\theta}{2}\|u_y\|^2\leqslant Q_1, \tag{16}$$

这里 Q_1 仅与 μ、θ、T、g_x、g_y 有关•

证明 对方程(13 两端乘以 $u(x, y, t)$, 并在 $D_0=\left\{(x, y, t): 0\leqslant x\leqslant P,\ 0\leqslant y\leqslant P\right\}$ 上积分

$$\iint_{D_0} uu_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_0} uu_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_0} u^2u_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \delta\iint_{D_0} u^2u_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mu\iint_{D_0} uu_{xxt} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \theta\iint_{D_0} uu_{yyt} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{17}$$

因 $\iint_{D_0} u^2u_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ \iint_{D_0} uu_{xxt} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0} u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

则(17 可变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0}\left[u^2+\frac{\mu}{2}u_x^2+\frac{\theta}{2}u_y^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_0}\left[u^2+\frac{\mu}{2}u_x^2+\frac{\theta}{2}u_y^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 Gronwall 不等式, 有

$$\|u\|^2+\frac{\mu}{2}\|u_x\|^2+\frac{\theta}{2}\|u_y\|^2 \leqslant \left(\|g\|^2+\frac{\mu}{2}\|g_x\|^2+\frac{\theta}{2}\|g_y\|^2\right)\exp(2T) = Q_1,$$

其中 $Q_1 > 0$ 并且只与 T、θ、g_x、g_y 有关.

推论　若引理 3 条件满足, 则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_\infty \leqslant Q_0,$$

这里 Q_0 与 u 无关.

证明　使用 Sobolev 不等式, 存在常数 C, 有

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \|u(t)\| + C\|u_x(x)\|.$$

由引理 1、引理 3, 有

$$\sup\|u(t)\|_\infty \leqslant \sqrt{2E_0} + CQ_1 = Q_0.$$

引理 4　对任意有限数 $T\in(0,\infty)$, 当 $g_{xx}, g_{xy}\in L_2$, 则一定存在 Q_2 使问题(13) ~ (14) 关于 x、y 的周期解 $u(x,y,t)$, 有估计

$$\|u_x\|^2+\mu\|u_{xx}\|^2+\theta\|u_{xy}\|^2 \leqslant Q_2, \tag{18}$$

其中 Q_2 只与 T、μ、δ、θ、g_{xx}, g_{xy} 有关.

证明　对方程(13 两端同时对 x 微分,

$$u_{xt}+u_{xx}+u_{yx}+u_x^2+uu_{xx}+\delta(u_xu_y+uu_{xy})-\mu u_{xxxt}-\theta u_{yytx}=0, \tag{19}$$

令 $v = u_x$.

对(19 两端同乘以 $v(x,y,t)$ 并且在 D_0 上积分. 由

$$\iint_{D_0} vv_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

$$\iint_{D_0} uvv_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_{D_0} v^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{D_0} uvu_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_{D_0} u_yv^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则(19 可变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0}(v^2+\mu v_x^2+\theta v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_0} v^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \delta\iint_{D_0} v^2u_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0}(v^2+\mu v_x^2+\theta v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_0}\left(v^3+\delta u_yv^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{20}$$

由 Nirenbery_Gagliard 不等式

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{L^p} \leqslant C\left\|\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right\|_{L^r}^{\theta}\|v\|_{L^q}^{1-\theta},$$

其中 $1 \leqslant q、r < \infty, 0 \leqslant k \leqslant n, k/n \leqslant \theta < 1,$

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{q} - (n\theta - k)·$$

令 $k = 0、n = 2、p = 4、r = 2、q = 2、\theta = 1/4$, 得

$$\iint_{D_0} |v^4| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C\|v_x\|\|v\|^3 \leqslant C\|v_x\|^2 + \frac{C}{4}\|v\|^6,$$

$$\iint_{D_0} |v|^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}\iint_{D_0} |v^4| \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\iint_{D_0} |v^2| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$
$$\frac{C}{2}\left(\|v_x\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^6\right) + \frac{1}{2}Q_1,$$

则(20 为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|^2 + \mu\|v_x\|^2 + \theta\|v_y\|^2) \leqslant \|v\|^3 + |\delta| \|u_y\|\|v\|^2 \leqslant$$
$$\frac{1}{2}(1+|\delta|)C_1[\|v\|^2 + \mu\|v_x\|^2 + \theta\|v_y\|^2] +$$
$$\frac{1}{8}(1+|\delta|)C_1Q_1^3 + \frac{1}{\mu}Q_1 + \frac{|\delta|}{\theta}Q_1·$$

由Gronwall's 不等式可得(18 , C_1 为常数·

引理 5 对任意有限数 $T \in (0, \infty)$, 当 $g_{xxx}、g_{xxy} \in L_2$, 则一定存在 Q_3 使问题(13) ~ (14) 关于 $x、y$ 的周期解 $u(x, y, t)$ 有估计

$$\|u_{xx}\|^2 + \mu\|u_{xxx}\|^2 + \theta\|u_{xxy}\|^2 \leqslant Q_3, \tag{21}$$

其中 Q_3 只与 $T、\mu、\delta、\theta、g_{xxx}、g_{xxy}$ 有关·

证明 对(13 微分两次, 并令 $\omega = u_{xx}$ 得

$$\omega\omega_t + \omega\omega_x + \omega\omega_y + (3u_x\omega + u\omega_x)\omega + \delta\omega(\omega u_y + 2u_xu_{xy} + u\omega_y) -$$
$$\mu\omega\omega_{xxt} - \theta\xi_{yyt} = 0· \tag{22}$$

对(22 在 D_0 上积分:

$$\iint_{D_0} u\omega\omega_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_{D_0} u_x\omega^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{23}$$

$$\iint_{D_0} u\omega\omega_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_{D_0} u_y\omega^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{24}$$

$$\iint_{D_0} \omega\omega_{xxt} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0} \omega^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y· \tag{25}$$

由(23 ~ (25 , 则(22 可变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0}(\omega^2 + u\omega_x^2 + \theta\omega_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$2\delta\iint_{D_0} u_xu_{xy}\omega^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_0}\omega^2\left(\frac{5}{2}u_x + \frac{\delta}{2}u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$
$$2|\delta| \iint |u_x||u_{xy}||\omega^2| \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint |\omega|^2\left|\frac{5}{2} + \frac{\delta}{2}u_y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y· \tag{26}$$

令
$$M = \max_{D_0}\left|\frac{5}{2}u_x + \frac{\delta}{2}u_y\right|, \tag{27}$$

$$\iint_{D_0} |u_x||u_{xy}||\omega^2| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}\|u_x\|^2\|u_{xy}\|^2 + \frac{1}{2}\|\omega\|^2, \tag{28}$$

代(27 ~ (28 入(26 ,则(26 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{D_0}(\omega^2+\mu\omega_x^2+\theta\omega_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M\iint_{D_0}(\omega^2+\mu\omega_x^2+\theta\omega_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ \frac{|\delta|}{\mu\theta}(2Q_1Q_2+\theta Q_2)\cdot$$

由 Gronwall's 不等式知,(21 式成立•

3 Cauchy 问题周期解的唯一性

定理 1 对任意固定常数 $T>0$, 若初值 $g(x,y)\in L_2$, 则 Cauchy 问题整体解 $u(x,y,t)$ (13) ~ (14) 在 $[0,T]$ 上是唯一的•

证明 设满足方程(13 ~ (14 的两个解分别为 u、v• 令 $w=u-v$, 则 w 满足

$$\begin{cases} w_t+w_x+w_y+(u_xw+vw_x)+\delta(u_yw+vw_y)-\mu w_{xxt}-\theta w_{yyt}=0, & (29)\\ w\mid_{t=0}=0, & (30)\end{cases}$$

这里 $\quad w(x+P,y,t)=w(x,y+P,t)\qquad t\geqslant 0$, x、y 为任意常数•

对(29 两端同乘以 $w(x,y,t)$ 并在 D 上积分

$$\iiint_D ww_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\iiint_D ww_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\iiint_D ww_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+ \iiint_D w(u_xw+vw_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\delta\iiint_D w(u_yw+vw_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t- \mu\iiint_D ww_{xxt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\theta\iiint_D ww_{yyt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=0, \tag{31}$$

因

$$\iiint_D ww_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\iiint_D ww_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=0, \tag{32}$$

$$\iiint_D vww_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\iiint_D v_xw^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t, \tag{33}$$

由(32 ~ (33 ,则(31 变为

$$\iiint_D\left(\frac{1}{2}w^2\right)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\iiint_D\left(u_x-\frac{v_x}{2}\right)w^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t+ \delta\iiint_D\left(u_y-\frac{v_x}{2}\right)w^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=0\cdot$$

有

$$\iint_{D_0}\frac{1}{2}w^2(x,y,T)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint_{D_0}\frac{1}{2}w^2(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ \iiint_D\left|\frac{v_x+\delta v_y}{2}-u_x-\delta u_y\right|w^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

令 $\quad M=\max\left|\dfrac{v_x+\delta v_y}{2}-u_x-\delta u_y\right|$,

由引理 3 知, 这里常数 M 是与 u、v 无关•

由 Gronowall's 不等式估计

$$E(T)=\iint_{D_0}\frac{1}{2}W^2(x,y,T)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant E(0)\mathrm{e}^{2MT}\cdot$$

因 $E(0)=0$, T 为任意固定常数, 当 $t\geqslant 0$ 有 $E(t)=0$• 又因 w 是连续函数并且 $w^2\geqslant 0$,

只要 $w = 0$, 得 $u = v$• 即问题(13) ~ (14) 的整体解 $u(x, y, t)$ 在$[0, T]$ 上是唯的一的•

推论 若定理 1 条件满足, 问题(13 ~ (14 的整体解 $u(x, y, t)$ 在 L_2 意义下关于初值是稳定的•

感谢 本文受兰州大学李志深教授的热情关注, 特此深表谢意•

[参 考 文 献]

[1] Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long wave in nonlinear dispersive systems [J]. Philos Trans Roy Soc London Ser A, 1972, **272**: 47—78.

[2] Albert J. Dispersion of low_energy waves for the generalized Benjamin_Bora_Mahong equation[J]. J Differential Equations, 1986, **63**: 117—134.

[3] 尚亚东. 二维 RLW 方程 SRLW 方程的显式精确解[J]. 应用数学, 1998, **11**(3): 1—5.

[4] Oberhettinger F. Fourier Expansions [M]. New York/London: Academic Press, 1973.

[5] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics [M]. Vol Ⅰ, New York: Interscience, 1953.

On Cauchy Problems for the RLW Equation in Two Space Dimensions

HUANG Zheng_hong

(Department of Foundation, Chongqing Institute of Commerce, Chongqing 400067, P R China

Abstract: A cnoidal wave solution of the two dimensional RLW equation of are obtained by elliptic integral method, and the some estimations the uniqueness and the stability of the periodic solution with both x, y to the Cauchy problem are proved by the priori estimations.

Key words: two dimensions RLW equation; cnoidal wave solution; periodic solution; uniqueness