文章编号: 1000_0887(2002) 02_0144_13

屈曲特征值问题的边界元方法及收敛性分析*

丁 睿[1],　芮允[2],　张 颖[3]

(1. 苏州大学 数学系, 苏州 215006; 2. 兰州大学 数学系, 兰州 730000;
3. 厦门大学 材料科学系, 厦门 361005)

(王银邦推荐)

摘要: 讨论了屈曲特征值问题的定解条件, 建立了相应的具约束的积分方程组及带 Lagrange 乘子的边界变分方程, 给出了解的存在唯一性定理• 建立了相应的边界元方法并讨论了近似解的误差估计• 文末给出了数值算例•

关 键 词: Lagrange 乘子法; 边界元方法; Sobolev 空间
中图分类号: O175.8　　文献标识码: A

引　言

屈曲特征值问题在工程结构的稳定性分析中具有重要的意义, 因此在计算力学中这类问题的数值计算受到普遍重视• 现有的计算方法主要是有限元方法和差分方法, 但这些方法因计算量过大而不便于实现• 本文从证明屈曲特征值问题的定解条件开始, 给出了解的积分表达式, 边界量的约束条件及其应满足的边界积分方程组和边界变分方程, 证明了这些方程解的存在唯一性• 通常数值求解具约束的积分方程组或变分方程是比较困难的, 为此引进 Lagrange 乘子法, 对具约束的变分方程组证明了解的存在唯一性• 至此完成了使用边界元方法的全部理论工作• 建立了屈曲特征值问题的边界元方法• 为说明具 Lagrange 乘子的变分方程组的边界元方法, 文中以常单元为例, 给出了离散代数方程组的建立过程• 这里所述的过程完全适用于一次以上协调元• 文末讨论了数值解的误差估计并给出了数值算例•

1　边界变分方程

本文将考虑如下边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u - s\Delta u = 0 & \text{在 } \Omega \cup \Omega' \text{ 中}, \\ u|_\Gamma = u_0;\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = g, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是具有光滑边界的有界区域, $\Omega' = \mathbf{R}^2 \setminus \Omega$, $s = k^2$, k 为一实数, u_0、g 是定义在 Γ 上的已知函数, n 为 Γ 的外法向• 对外问题, u 在无穷远处必须满足

$$u = O(|x|^{-2}),\ \mathrm{D}^m u = O(|x|^{-4}) \quad (m = 1, 2)• \tag{2}$$

* 收稿日期: 2000_09_29; 修订日期: 2001_09_11
基金项目: 国家自然科学基金预研项目资助(T4107015)
作者简介: 丁睿(1969—) , 男, 浙江定海人, 副教授, 博士, 已发表论文 20 多篇.

问题的(1)的基本解为

$$u^*(x,y)=2\int_0^{|x-y|}\rho^{-1}\left(\int_0^{\rho}\tau K_0(k\tau)\,d\tau\right)d\rho,$$

其中 $K_0(z)$ 是第二类 0 阶修正 Bessel 函数

$$K_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{2n}\lg z+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^{2n},$$

$a_0=-1$, a_n、b_n 均是常数•

定理 1　若 $u_0\in H^{3/2}(\Gamma)$, $g\in H^{1/2}(\Gamma)$, 则问题(1) 的内外边值问题分别在 $H^2(\Omega)$ 和 $W_0^2(\Omega')$ 中有唯一解•

证明　由迹定理可以找到一个函数 $R(u_0,g)$ 使得

$$\begin{cases}\text{存在 } R(u_0,g)\in H^2(\mathbf{R}^2)\text{ 且具有界支集使得}\\ R(u_0,g)|_\Gamma=u_0,\quad \left.\dfrac{\partial R(u_0,g)}{\partial n}\right|_\Gamma=g\text{•}\end{cases}$$

首先讨论内问题•　令 $w=u-R(u_0,g)$, 则问题(1) 等价于齐次问题:

$$\begin{cases}\text{求 } w\in H_0^2(\Omega)\text{ 使满足}\\ \Delta^2 w-s\Delta w=-\Delta^2 R(u_0,g)+s\Delta R(u_0,g)\qquad\text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma=0,\quad w|_\Gamma=0\text{•}\end{cases}\tag{3}$$

对方程(3) 使用 Green 公式得

$$a(w,v)=\langle f,v\rangle\qquad\forall v\in H_0^2(\Omega),\tag{4}$$

其中

$$a(w,v)=\iint_\Omega \Delta w\,\Delta v\,dx+\iint_\Omega k^2\,\nabla w\cdot\nabla v\,dx,$$

$$\langle f,v\rangle=-\iint_\Omega \Delta R(u_0,g)\,\Delta v\,dx-\iint_\Omega k^2\,\nabla R(u_0,g)\cdot\nabla v\,dx\text{•}$$

$a(w,v)$ 显然是定义在 $H_0^2(\Omega)$ 上的双线性形式, 利用 Cauchy_Schwartz 不等式及 $H_0^2(\Omega)$ 中范数等价定理[1],

$$\begin{aligned}|a(w,v)|&\leqslant\|\Delta w\|_{0,\Omega}\|\Delta v\|_{0,\Omega}+k^2\|\nabla w\|_{0,\Omega}\|\nabla v\|_{0,\Omega}=\\&\quad|w|_{2,\Omega}|v|_{2,\Omega}+k^2|w|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}\leqslant\\&\quad c_1\|w\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega}+k^2c_2\|w\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}\leqslant c\|w\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega}\text{•}\end{aligned}$$

证明过程中用到了[1] 中结果 $\|\Delta w\|_{0,\Omega}=|w|_{2,\Omega}$, 又

$$\begin{aligned}a(w,w)&=\iint_\Omega \Delta w\,\Delta w\,dx+\iint_\Omega k^2\,\nabla w\cdot\nabla w\,dx=\\&\quad|\Delta w|_{0,\Omega}^2+k^2|\nabla w|_{0,\Omega}^2\geqslant|\Delta w|_{0,\Omega}^2=|w|_{2,\Omega}^2\geqslant c\|w\|_{2,\Omega}^2,\end{aligned}$$

故 $a(w,v)$ 是定义在 $H_0^2(\Omega)$ 上连续的具有强制性的双线性泛函•　另外显然 $\langle f,v\rangle$ 也是定义在 $H_0^2(\Omega)$ 上的连续线性泛函, 应用 Lax_Milgram 定理知变分问题(4) 在 $H_0^2(\Omega)$ 中有唯一解•

由于 $R(u_0,g)$ 的选取不唯一, 还需证明(1) 的解 u 与 $R(u_0,g)$ 的选取无关•

设 $R_1(u_0,g)$、$R_2(u_0,g)$ 分别是由 (u_0,g) 根据迹定理得到的 $H_0^2(\Omega)$ 中两个具有有界支集的函数, 对应(3) 的解有两个:

$$u_1=w_1+R_1(u_0,g),\quad u_2=w_2+R_2(u_0,g)\text{•}$$

分别代入(1),再相减得

$$\begin{cases}\Delta^2(w_1-w_2)-s\Delta(w_1-w_2)=-\Delta^2(R_1(u_0,g)-R_2(u_0,g))+\\ \qquad s\Delta(R_1(u_0,g)-R_2(u_0,g)),\\ \left.\dfrac{\partial(w_1-w_2)}{\partial n}\right|_\Gamma=0,\quad (w_1-w_2)\mid_\Gamma=0.\end{cases}$$

该问题有唯一解 $(w_1-w_2)=R_1(u_0,g)-R_2(u_0,g)$,进而 $u_1=u_2$. 即(1)的解唯一.

最后讨论外问题. 记 B 是以 R 为半径,圆心在 Ω 内的一个圆域,$\Omega\subset B$,且当 R 充分大时 $\mathrm{supp}R(u_0,g)\subset B$. 令 $w=u-R(u_0,g)$,则(1)外问题可化为解下述齐次边值问题:

$$\begin{cases}\text{求解 } w\in \mathring{W}_0^2(\Omega')=\left\{u\in W_0^2(\Omega');\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=u\mid_\Gamma=0\right\},\\ \text{使得 } \Delta^2 w-s\Delta w=-\Delta^2R(u_0,g)+s\Delta R(u_0,g),\end{cases}\tag{5}$$

w 在无穷远处满足限制条件(2).

对(5)两端乘 $v\in \mathring{W}_0^2(\Omega')$,在 $B\setminus\Omega$ 上积分,再利用 Green 公式有

$$\iint_{B\setminus\Omega}\Delta w\Delta v\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma\cup\Gamma_R}\left(\frac{\partial(\Delta w)}{\partial n}v-\Delta w\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s-\iint_{B\setminus\Omega}k^2v\Delta w\,\mathrm{d}x=$$
$$-\iint_{B\setminus\Omega}\Delta R(u_0,g)\Delta v\,\mathrm{d}x-\int_{\Gamma\cup\Gamma_R}\left(\frac{\partial(\Delta R(u_0,g))}{\partial n}v-\right.$$
$$\left.\Delta R(u_0,g)\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s+\iint_{B\setminus\Omega}k^2v\Delta R(u_0,g)\,\mathrm{d}x,$$

这里 Γ_R 为 B 的边界,注意到齐次边界条件及 $\mathrm{supp}R(u_0,g)\subset B$,

$$\iint_{B\setminus\Omega}\Delta w\Delta v\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\left(\frac{\partial(\Delta w)}{\partial n}v-\Delta w\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s-\iint_{B\setminus\Omega}k^2v\Delta w\,\mathrm{d}x=$$
$$-\iint_{B\setminus\Omega}\Delta R(u_0,g)\Delta v\,\mathrm{d}x+\iint_{B\setminus\Omega}k^2v\Delta R(u_0,g)\,\mathrm{d}x.$$

再次利用 Green 公式可得

$$\iint_{B\setminus\Omega}\Delta w\Delta v\,\mathrm{d}x+\iint_{B\setminus\Omega}k^2\nabla w\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=-\iint_{B\setminus\Omega}\Delta R(u_0,g)\Delta v\,\mathrm{d}x-$$
$$\iint_{B\setminus\Omega}k^2\nabla R(u_0,g)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}k^2v\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\Gamma_R}\left(\Delta w\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial\Delta w}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

由于

$$v\in W_0^2(\Omega')=\left\{v;\frac{v}{r^2\ln r}\in L^2(\Omega');\right.$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big/(r\ln r)\in L^2(\Omega');\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\in L^2(\Omega'),\quad i,j=1,2\right\}$$

且 w 满足无穷远处限制条件,因此当 $R\to\infty$ 时上式中 Γ_R 上的积分项有

$$\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}s\to 0,\quad \int_{\Gamma_R}\Delta w\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s\to 0,$$

于是得变分方程

$$a(w,v)=\langle f,v\rangle\qquad \forall v\in W_0^2(\Omega),\tag{6}$$

其中

$$a(w, v) = \iint_{\Omega'} \Delta w \, \Delta v \, \mathrm{d}x + \iint_{\Omega'} k^2 \nabla w \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x,$$

$$\langle f, v \rangle = -\iint_{\Omega'} \Delta R(u_0, g) \Delta v \, \mathrm{d}x - \iint_{\Omega'} k^2 \nabla R(u_0, g) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

类似内问题的证明, 不难看出(6) 在空间 $W_0^2(\Omega')$ 中满足 Lax_Milgram 定理的全部条件, 因此(6) 在 $W_0^2(\Omega')$ 中有唯一解, 进而(1) 中的外问题在 $W_0^2(\Omega')$ 中有唯一解。　　证毕。

由定理 1, 结合内外问题, (1) 定义了一个同构映射: $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \to K$, 这里 $K = \left\{ u \in W_0^2(\mathbf{R}^2) \mid \Delta^2 u - s\Delta u = 0, \text{在 } \Omega \cup \Omega' \text{ 中} \right\}$。

对 $u \in K$, $v \in W_0^2(\mathbf{R}^2)$ 应用 Green 公式有

$$\iint_{\Omega} \Delta u \Delta v \, \mathrm{d}x + \iint_{\Omega} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma} v \left(k^2 \frac{\partial u}{\partial n^-} - \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n^-} \right) \mathrm{d}s + \int_{\Gamma} \Delta u^- \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

$$\iint_{\Omega'} \Delta u \, \Delta v \, \mathrm{d}x + \iint_{\Omega'} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma} v \left(-k^2 \frac{\partial u}{\partial n^+} + \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n^+} \right) \mathrm{d}s - \int_{\Gamma} \Delta u^+ \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

再将两式相加

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \Delta u \, \Delta v \, \mathrm{d}x + \iint_{\mathbf{R}^2} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma} \left\{ k^2 v \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - v \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \right] + [\Delta u] \frac{\partial v}{\partial n} \right\} \mathrm{d}s,$$

$$\forall v \in W_0^2(\mathbf{R}^2).$$

记　$\sigma(x) = \left[\dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \right] = \dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial n^-} - \dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial n^+}$, $\varphi(x) = [\Delta u] = (\Delta u)^- - (\Delta u)^+$。

又假设 $g(x)$ 在穿越边界 Γ 时是连续的, 即 $[\partial u / \partial n] = 0$, 则得变分方程

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \Delta u \, \Delta v \, \mathrm{d}x + \iint_{\mathbf{R}^2} k^2 \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = -\int_{\Gamma} v \sigma \mathrm{d}s + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s \qquad \forall v \in W_0^2(\mathbf{R}^2). \tag{7}$$

(7) 式其实定义了广义函数 $\sigma(x) \in H^{-3/2}(\Gamma)$, $\varphi(x) \in H^{-1/2}(\Gamma)$。　记 P_m 是 m 次多项式空间。　因为 $P_1 \subset W_0^2(\mathbf{R}^2)$, 由(7), 若取 $v \in P_0$ 有 $\int_{\Gamma} \sigma \mathrm{d}s = 0$; 若取 $v \in P_1 \setminus P_0$ 时, 有

$$-\int_{\Gamma} v \, \sigma \mathrm{d}s + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s = \iint_{\mathbf{R}^2} k^2 \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

令 B 是以 R 为半径, 包含 Ω 的一个圆域, 在 $B \setminus \Omega$ 和 Ω 上分别采用 Green 公式得

$$\iint_{B \setminus \Omega} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = -\iint_{B \setminus \Omega} k^2 u \Delta v \, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma} k^2 u^+ \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s + \int_{\partial B} k^2 u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s =$$

$$-\int_{\Gamma} k^2 u^+ \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s + \int_{\partial B} k^2 u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

$$\iint_{\Omega} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = -\iint_{\Omega} k^2 u \Delta v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma} k^2 u^- \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} k^2 u^- \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

于是

$$\iint_{B} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \iint_{B \setminus \Omega} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x + \iint_{\Omega} k^2 \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x =$$

$$\int_{\Gamma} k^2 [u] \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s + \int_{\partial B} k^2 u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s.$$

又假设 $u(x)$ 在穿越 Γ 时是连续的, 即 $[u] = 0$, 同时采用无穷远处限制条件 $u = O(|x|^{-2})$, 当 $R \to \infty$ 时,

$$\int_{\partial B} k^2 u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s \to 0.$$

于是得

$$\iint_{\mathbf{R}^2} k^2 \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall v \in P_1 \setminus P_0\text{•}$$

因此 $\sigma(x) \in H^{-3/2}(\Gamma)$, $\varphi(x) \in H^{-1/2}(\Gamma)$ 满足如下边界约束条件:

$$\int_\Gamma \sigma \mathrm{d}s = 0, \ -\int_\Gamma v\sigma \mathrm{d}s + \int_\Gamma \varphi \frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s = 0, \qquad \forall v \in P_1 \setminus P_0\text{•} \tag{8}$$

定义 $\tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) = \left\{(\sigma, \varphi) \in H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \text{ 且满足}(8)\right\}$•

定理 2 若 $(\sigma, \varphi) \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, 则变分方程(7) 在商空间 $W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1$ 有中唯一解•

证明 易证变分方程(7) 左端的双线性形式是连续有界的, 利用空间 $W_0^2(\mathbf{R}^2)$ 中半范数与商空间 $W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1$ 的商范数等价性得

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |\Delta u|^2 \mathrm{d}x = |u|_2^2 \geqslant C \inf_{p \in P_1} \| u + p \|_{2,R}^2 = C \| \dot{u} \|^2_{W_0^2/P_1} \qquad \dot{u} \in W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1\text{•}$$

因此该双线性形式也是 $W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1$_强制的, 应用 Lax_Milgram 定理即得变分问题(7) 在商空间 $W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1$ 中有唯一解• 证毕•

综上所述, 变分问题(7) 定义了 $\tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1$ 的一个同构映射• 因此任给 $u \in K$, 可以确定一对$(\sigma, \varphi) \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$; 反之给出$(\sigma, \varphi) \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, 可以确定(1) 的唯一解 $u(x) \in K$•

下面将给出方程(1) 的解的平面积分表达式, 但需用到如下引理• 记算子

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \sum_{|a| \leqslant m} A_a \mathrm{D}^a u = \sum_{|a| \leqslant m} A_a \mathrm{i}^{-|a|} \partial^a u,$$

其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 分量 a_j 均是非负整数, $|a| = \sum_{j=1}^m a_j$; i 是虚数单位; m 是自然数;

$$\partial^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_m^{a_m}}, \quad \mathrm{D}_j^{a_j} = \mathrm{i}^{-a_j} \frac{\partial^{a_j}}{\partial x_j^{a_j}}, \quad \mathrm{D}^a = \mathrm{D}_1^{a_1} \cdots \mathrm{D}_m^{a_m}\text{•}$$

引理 1[1] 设 $\mathrm{P}(\mathrm{D})$ 是椭圆的, 如果对某个广义函数 $u(x) \in \Phi'(\mathbf{R}^2)$ 有 $\mathrm{P}(\mathrm{D})u = 0$, 则 u 一定是一个多项式• 这里 $\Phi'(\mathbf{R}^2)$ 是速降函数空间

$$\Phi'(\mathbf{R}^2) = \left\{ \varphi \in C^\infty \mid x^k \partial^n \varphi(x) \rightarrow 0, \text{当 } |x| \rightarrow \infty, \text{对任意重指标 } n, k \right\}\text{•}$$

定理 3 若 $u(x) \in C^\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega') \cap \Phi'(\mathbf{R}^2)$, 且满足(1) 中的方程, 则当

(Ⅰ) $y \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ 时,

$$4\pi u(y) = \int_\Gamma \left\{ \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}\right] u^* + \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] \Delta u^* - [\Delta u] \frac{\partial u^*}{\partial n_x} - [u] \frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x} - k^2 \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] u^* + k^2 [u] \frac{\partial u^*}{\partial n_x} \right\} \mathrm{d}s + p(y);$$

(Ⅱ) $y \in \Gamma$ 时,

$$2\pi(u^-(y) + u^+(y)) = \int_\Gamma \left\{ \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}\right] u^* + \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] \Delta u^* - [\Delta u] \frac{\partial u^*}{\partial n_x} - [u] \frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x} - k^2 \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] u^* + k^2 [u] \frac{\partial u^*}{\partial n_x} \right\} \mathrm{d}s + p(y);$$

其中 $p(y)$ 是满足 $\Delta^2 p - s\Delta p = 0$ 的多项式, u^* 是方程(1) 的基本解•

证明 首先证明 $y \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ 的情形•

设 B 是以原点为圆心, R 为半径的圆, 且 $\Omega \subset B$, 当 $y \in B \setminus \Gamma$ 时, 以 y 为圆心, ε 为半径

作圆域 $S(y;\varepsilon)\subset(B\setminus\Omega)\cup\Omega$. 当 $y\in\Omega$ 时, 对 u 和 u^* 在 $\Omega\setminus S(y,\varepsilon)$ 应用 Green 公式得,

$$\iint_{\Omega\setminus S(y,\varepsilon)}(u^*\Delta^2u-u\Delta^2u^*)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\Gamma\cup\partial S}\left\{\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}u^*+\frac{\partial u}{\partial n}\Delta u^*-\Delta u\frac{\partial u^*}{\partial n_x}-u\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s.$$

由于 u 满足 $\Delta^2u-s\Delta u=0$ 并且对 $x\in\Omega\setminus S(y,\varepsilon)$, $\Delta^2u^*-s\Delta u^*=0$, 所以

$$s\iint_{\Omega\setminus S(y,\varepsilon)}(u^*\Delta u-u\Delta u^*)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\Gamma\cup\partial S}\left\{\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}u^*+\frac{\partial u}{\partial n}\Delta u^*-\Delta u\frac{\partial u^*}{\partial n_x}-u\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s.$$

再次利用 Green 公式得

$$\iint_{\Omega\setminus S(y,\varepsilon)}u^*\Delta u\mathrm{d}x+\iint_{\Omega\setminus S(y,\varepsilon)}\nabla u\cdot\nabla u^*\mathrm{d}x=\int_{\Gamma\cup\partial S}\frac{\partial u}{\partial n}u^*\mathrm{d}s,$$
$$\iint_{\Omega\setminus S(y,\varepsilon)}u\Delta u^*\mathrm{d}x+\iint_{\Omega\setminus S(y,\varepsilon)}\nabla u\cdot\nabla u^*\mathrm{d}x=\int_{\Gamma\cup\partial S}\frac{\partial u^*}{\partial n_x}u\mathrm{d}s.$$

然后两式相减得

$$s\int_{\Gamma\cup\partial S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}u^*-\frac{\partial u^*}{\partial n_x}u\right)\mathrm{d}s=$$
$$\int_{\Gamma\cup\partial S}\left(\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}u^*+\frac{\partial u}{\partial n}\Delta u^*-\frac{\partial u^*}{\partial n_x}\Delta u-\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}u\right)\mathrm{d}s.$$

经整理得

$$\int_\Gamma\left(\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n^-}u^*+\frac{\partial u}{\partial n^-}(\Delta u^*-su^*)-\frac{\partial u^*}{\partial n_x}(\Delta u^--su^-)-\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}u^-\right)\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\partial S}\left(\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}u^*+\frac{\partial u}{\partial n}(\Delta u^*-su^*)-\frac{\partial u^*}{\partial n_x}(\Delta u-su)-\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}u\right)\mathrm{d}s\stackrel{\Delta}{=}$$
$$R_\Gamma+R_{\partial S}=0. \tag{9}$$

式中基本解可展开成

$$u^*(r)=-\frac{r^2}{2}\left(\ln r+\frac{1}{2}\ln k^2-1\right)+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^{2n}}{(2n+2)^2}r^{2n+2}\left(a_n\ln r+b_n-\frac{2a_n}{2n+2}+\frac{a_n}{2}\ln k^n\right),$$

这里 $r=|x-y|$. 把 u^* 的表达式代入 $R_{\partial S}$, 经计算得

$$\lim_{\varepsilon\to0}R_{\partial S}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\int_{\partial S}u\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\mathrm{d}s\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\int_{\partial S}u\left(-\frac{2}{r}\right)\mathrm{d}s\right)=$$
$$-\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{2}{\varepsilon}\cdot2\pi\varepsilon\cdot u(y)\right)=-4\pi u(y).$$

于是由前面的积分式(9)得

$$4\pi u(y)=\int_\Gamma\left\{u^*\left(\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n^-}-s\frac{\partial u}{\partial n^-}\right)+\Delta u^*\frac{\partial u}{\partial n^-}+\right.$$
$$\left.\frac{\partial u^*}{\partial n_x}(su^--\Delta u^-)-u^-\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s. \tag{10}$$

对 u 和 u^* 在 $\Omega'\cap B$ 上应用 Green 公式可得

$$-\int_\Gamma\left\{u^*\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n^+}+(\Delta u^*-su^*)\frac{\partial u}{\partial n^+}+\frac{\partial u^*}{\partial n_x}(su^+-\Delta u^+)-u^+\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{\partial B}\left\{u^*\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}+(\Delta u^*-su^*)\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u^*}{\partial n_x}(su-\Delta u)-u\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s\overset{\Delta}{=}$$
$$R_\Gamma+p(y)=0, \tag{11}$$

其中 $p(y)$ 为左端第二个积分式. 将(10), (11) 相加得

$$4\pi u(y)-p(y)=\int_\Gamma\left\{u^*\left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}\right]+\Delta u^*\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[\Delta u]\frac{\partial u^*}{\partial n_x}-\right.$$
$$\left.[u]\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n}-k^2\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]u^*+k^2[u]\frac{\partial u^*}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s.$$

同理, 当 $y\in B\setminus\Omega$ 时, 在 Ω 和 $\Omega'\cap B$ 上应用 Green 公式可得与上式同样的结果.

下面将说明对任意大的区域 B, $p(y)$ 是一个一次的多项式. 令

$$f(y)=\begin{cases}-p(y) & \text{在 } B \text{ 中;}\\ -p(y)+4\pi u(y) & \text{在 } \mathbf{R}^2\setminus B \text{ 中.}\end{cases}$$

由于

$$p(y)=\int_{\partial B}\left\{u^*\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}+(\Delta u^*-su^*)\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u^*}{\partial n_x}(su-\Delta u)-u\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s=$$
$$\iint_B(u^*\Delta^2u-u\Delta u^*)\mathrm{d}x-s\int_{\partial B}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial u^*}{\partial n_x}\right)\mathrm{d}s=$$
$$\iint_B(\Delta^2u-s\Delta u)u^*\mathrm{d}x-\iint_B u(\Delta^2u^*-s\Delta u^*)\mathrm{d}x,$$

当 $y\in B$ 时,

$$\Delta^2u-s\Delta u=0,\quad \iint_B u(\Delta^2u^*-s\Delta u^*)\mathrm{d}x=\iint_B u\delta(x-y)\mathrm{d}x=4\pi u(y),$$

因此 $p(y)=-4\pi u(y)$, 从而 $f(y)=4\pi u(y)$. 当 $y\in\mathbf{R}^2\setminus B$ 时, 由于

$$\Delta^2u-s\Delta u=0,\quad \Delta^2u^*-s\Delta u^*=0,$$

因此 $p(y)=0$, 从而 $f(y)=-p(y)+4\pi u(y)=4\pi u(y)$, 进而 $\Delta^2f-s\Delta f=0$. 又根据定理条件 $u\in\Phi'(\mathbf{R}^2)$, 故 $f\in\Phi'(\mathbf{R}^2)$. 根据引理1, 知 $p(y)$ 是一多项式, 同时注意到 $\Delta^2f-s\Delta f=0$, $P_1\subset W_0^2(\mathbf{R}^2)$, 所以 $p(y)$ 至多是一次多项式.

其次, 当 $y\in\Gamma$ 时, 类似上述方法, 以 y 为圆心, ε 为半径作圆域 $S(y,\varepsilon)$, 此时圆 S 被边界 Γ 分成两半, 因此

$$\lim_{\varepsilon\to0}R_{\partial S}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\int_{\partial S}u\frac{\partial(\Delta u^*)}{\partial n_x}\mathrm{d}s\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\int_{\partial S}u\left(-\frac{2}{r}\right)\mathrm{d}s\right)=-2\pi(u^-(y)+u^+(y)).$$

不难看出定理3结论(II)成立. 证毕.

由定理3, 若 g、u_0 在穿过 Γ 时是连续的, 即 $[\partial u/\partial n]=[u]=0$, 则(1) 的解可表示为

$$u(y)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\left\{\sigma(x)u^*(x,y)-\varphi(x)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s+p(y)\qquad\forall y\in\mathbf{R}^2. \tag{12}$$

当 $y\in\Gamma$ 时, 联系问题(1) 的边界条件可得边界积分方程

$$\begin{cases}u_0(y)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Gamma\left\{\sigma(x)u^*(x,y)-\varphi(x)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s+p(y),\\ g(y)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Gamma\left\{\sigma(x)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_y}-\varphi\frac{\partial^2u^*(x,y)}{\partial n_x\partial n_y}\right\}\mathrm{d}s+\frac{\partial p(y)}{\partial n_y}.\end{cases} \tag{13}$$

记 $W=H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma)$, $W'=H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)$.

定理 4　边界积分方程(13)定义了商空间上的一个同构映射:

$(H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma))/P_1 \to W$.

证明　由(13)式,不难看出

$$\left(u_0 - p(y),\ g - \frac{\partial p(y)}{\partial n}\right) \in (H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma))/P_1 .$$

据定理 1、定理 2 及迹定理,可立即得本定理结论.　　证毕.

分别用 $\sigma'(y)\in H^{-3/2}(\Gamma)$, $\varphi'(y)\in H^{-1/2}(\Gamma)$ 乘(13)中的第一和第二个方程的两端,然后关于 y 在 Γ 上积分得变分方程:

$$\begin{cases} \text{求}(\sigma,\varphi)\in W, \text{使满足} \\ b((\sigma,\varphi),(\sigma',\varphi')) = \langle u_0,\sigma'\rangle - \langle g,\varphi'\rangle \qquad \forall(\sigma',\varphi')\in W, \end{cases} \tag{14}$$

式中

$$b((\sigma,\varphi),(\sigma',\varphi')) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma\left\{\sigma(x)\sigma'(y)u^*(x,y) - \varphi(x)\sigma'(y)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_x}\right\}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y -$$
$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma\left\{\sigma(x)\varphi'(y)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_y} - \varphi(x)\varphi'(y)\frac{\partial^2 u^*(x,y)}{\partial n_x\partial n_y}\right\}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y,$$

$$\langle u_0,\sigma'\rangle = \int_\Gamma u_0(y)\sigma'(y)\mathrm{d}s_y,\quad \langle g,\varphi'\rangle = \int_\Gamma g(y)\varphi'(y)\mathrm{d}s_y .$$

定理 5　变分方程(14)在 W 中有唯一解.

证明　设 u 和 u' 是分别对应于 (σ,φ) 和 (σ',φ'),由变分方程(7)所确定的解,记 $u_0 = u|_\Gamma$, $u_0' = u'|_\Gamma$, $g = \partial u/\partial n|_\Gamma$, $g' = \partial u'/\partial n|_\Gamma$, (σ,φ) 和 (σ',φ') 均满足积分方程组(13).由方程(13)和(7)得

$$b((\sigma,\varphi),(\sigma',\varphi')) = \langle u_0,\sigma'\rangle - \langle g,\varphi'\rangle = \iint_{\mathbf{R}^2}\Delta u\Delta u'\,\mathrm{d}x + s\iint_{\mathbf{R}^2}\nabla u\cdot\nabla u'\,\mathrm{d}x,$$

$$b((\sigma',\varphi'),(\sigma,\varphi)) = -\langle u_0,\sigma'\rangle - \langle g,\varphi'\rangle = \iint_{\mathbf{R}^2}\Delta u\Delta u'\,\mathrm{d}x + s\iint_{\mathbf{R}^2}\nabla u\cdot\nabla u'\,\mathrm{d}x,$$

即 $b((\sigma,\varphi),(\sigma',\varphi'))$ 是对称的双线性形式.　下式说明 $b(\cdot,\cdot)$ 还是 W_强制的,

$$b((\sigma,\varphi),(\sigma',\varphi')) = \iint_{\mathbf{R}^2}\Delta u\Delta u'\,\mathrm{d}x + s\iint_{\mathbf{R}^2}\nabla u\cdot\nabla u'\,\mathrm{d}x =$$
$$|u|^2_{W_0^2(\mathbf{R}^2)} + s|u|^2_{W_0^1(\mathbf{R}^2)} \geqslant C_1\|u\|^2_{W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1} + sC_2\|u\|^2_{W_0^1(\mathbf{R}^2)/P_1} \geqslant$$
$$C_1\|u\|^2_{W_0^2(\mathbf{R}^2)/P_1} \geqslant C(\|\sigma\|^2_{H^{-3/2}(\Gamma)} + \|\varphi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}).$$

另外 $b((\sigma,\varphi),(\sigma',\varphi'))$ 和 $\langle u_0,\sigma'\rangle - \langle g,\varphi'\rangle$ 在 W 上显然是连续泛函.　由 Lax_Milgram 定理知变分方程(14)在 W 中有唯一解.　　证毕.

综上所述,问题(1)的解可以表示为(12)式,其中 (σ,φ) 由方程组(13)解出.　为了解出多项式 $p(y)$.　现采用 Lagrange 乘子法.　记

$$w = (\sigma,\varphi),\quad w' = (\sigma',\varphi'),\ f = (u_0, g);$$

解如下变分问题:

$$\begin{cases} \text{求解}(w,p)\in W\times P_1 \text{使得满足下列两个方程,} \\ b(w,w') + E(p,w') = \langle f,w'\rangle \qquad \forall w'\in W, \\ E(p',w) = 0 \qquad \forall p'\in P_1 . \end{cases} \tag{15}$$

式中

$$\langle f,w'\rangle = -\langle u_0,\sigma'\rangle + \langle g,\varphi'\rangle,$$

$$E(p', w') = -\int_\Gamma \sigma'(y)p'(y)\mathrm{d}s + \int_\Gamma \varphi'(y)\frac{\partial p'(y)}{\partial n_y}\mathrm{d}s.$$

定理 6　变分问题(15)的解 $(w, p) \in W \times P_1$ 存在且唯一. $w = (\sigma, \varphi)$ 恰好是变分方程(14)的解, $p(y)$ 即为(12)中要求的多项式.

证明　首先注意到 $\mathring{W} = \left\{ w = (\sigma, \varphi) \in W \mid E(p', w) = 0, \forall p' \in P_1 \right\}$, 由定理 5 知 $b(w, w')$ 是对称的连续双线性, 且具 $\mathring{W}$_强制, 任取 $p'(y) = a_0 + a_1y_1 + a_2y_2 \in P_1$, 令 $w' = (-p', 0) \in W$, 则

$$E(p', w') = -\int_\Gamma |p'|^2\mathrm{d}s = \|p'\|^2_{0,\Gamma}.$$

因 $\dim P_1 = 3$, 故 P_1 上所有范数等价.

从而

$$\|w'\|_W = \|p'\|_{-3/2,\Gamma} \leqslant C\|p'\|_{0,\Gamma},$$

这里取 $(\sigma', \varphi') = (-p', 0)$,

$$\sup_{w \in W}\frac{E(p', w)}{\|w\|_W} \geqslant \frac{E(p', w')}{\|w'\|_W} \geqslant \frac{\|p'\|^2_{0,\Gamma}}{C\|p'\|_{0,\Gamma}} \geqslant C^{-1}\|p'\|_{P_1} \qquad \forall p' \in P_1.$$

由 Brezzi 定理[2]知问题(15)在 $W \times P_1$ 中有唯一解 (w, p), $w = (\sigma, \varphi)$, 由于 w 满足(15)的第二个方程, 所以 $w \in \mathring{W}$, 因此保证了 w 适于约束条件(12), 取 $w' \in \mathring{W}$, 则对每个多项式 $p \in P_1$, 有 $E(p, w') = 0(\forall w' \in W)$. 由(15)的第一个方程知 w 恰好是方程(14)的解, 由 w' 的任意性知 $p(y)$ 还满足(12). 证毕.

据此定理, 可由变分方程(15)解出 $(w, p) = ((\sigma, \varphi), p)$, 然后再由(12)式可求得问题(1)的全平面上的解 $u(y)$.

2　边 界 元 方 法

以下总设边界 Γ 是光滑或分片光滑的. 对变分问题(15)进行边界元离散化, 先划分边界 Γ, 即在 Γ 上选取 NE 个分点, 将它们依次用曲线段 Γ_{eh} 连接起来, 本文中 Γ_{eh} 是直线段, 得多边形 $\Gamma_h = \sum_{e=1}^{NE}\Gamma_{eh}$, 以 Γ_h 去逼近边界 Γ. 然后在 Γ_h 上建立边界函数空间:

$$W_h^{(m,n)} = H^{-3/2}_{(m)}(\Gamma_h) \times H^{-1/2}_{(n)}(\Gamma_h).$$

记号 $H^{-3/2}_{(m)}(\Gamma_h)$ 和 $H^{-1/2}_{(n)}(\Gamma_h)$ 分别表示在每个单元 Γ_{eh} 上限制为 m 次和 n 次多项式的分段多项式函数空间. P_{1h} 为 P_1 在 Γ_h 上的限制. 这时边界变分方程(15)的近似问题表述为:

$$\begin{cases} \text{求}(w_h, p_h) \in W_h^{(m,n)} \times P_{1h} \text{ 使满足} \\ b_h(w_h, w_h') + E_h(p_h, w_h') = \langle f_h, w_h'\rangle & \forall w_h' \in W_h^{(m,n)}, \\ E_h(p_h', w_h) = 0 & \forall p_h' \in P_{1h}, \end{cases} \tag{16}$$

式中

$$b_h((\sigma_h, \varphi_h), (\sigma_h', \varphi_h')) =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h}\left(\sigma_h(x)\sigma_h'(y)u^*(x, y) - \varphi_h(x)\sigma_h'(y)\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n_{h_x}}\right)\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y -$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h}\left(\sigma_h(x)\varphi_h'(y)\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n_{h_y}} + \varphi_h(x)\varphi_h'(y)\frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial n_{h_x}\partial n_{h_y}}\right)\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y,$$

$$\langle f_h, w_h'\rangle = -\langle u_{0h}, \sigma_h'\rangle + \langle g_h, \varphi_h'\rangle,$$

$$\langle u_{0h}, \sigma_h' \rangle = \int_{\Gamma_h} u_{0h}(y)\, \sigma_h'(y)\, \mathrm{d}s_y; \ \langle g_h, \varphi_h' \rangle = \int_{\Gamma_h} g_h(y)\, \varphi_h'(y)\, \mathrm{d}s_y,$$

$$E_h(p_h', w_h) = -\int_{\Gamma_h} \left(\sigma_h(y) p_h'(y) - \varphi_h(y) \frac{\partial p_h'(y)}{\partial n_h} \right) \mathrm{d}s_y,$$

这里 u_{0h}、g_h 分别是已知函数 u_0、g 的近似, $b_h(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $W_h^{(m,n)} \times W_h^{(m,n)}$ 上的双线性形式, E_h 是定义在 $P_{1h} \times W_h^{(m,n)}$ 上的双线性形式, n_h 是近似边界 Γ_h 上的单位外法向量• 令

$$\overset{\circ}{W}{}_h^{(m,n)} = \left\{ w_h \in W_h^{(m,n)} \mid E_h(p_h, w_h) = 0, \ \forall p_h \in P_{1h} \right\}•$$

定理 7　离散问题(16) 在 $W_h^{(m,n)} \times P_{1h}$ 中有唯一解•

证明　与定理 5 中证明双线性形式 $b(\cdot, \cdot)$ 具 $\overset{\circ}{W}$_强制性的连续性类似, 可证明 $b_h(\cdot, \cdot)$ 具 $\overset{\circ}{W}{}_h^{(m,n)}$_强制性和连续性, 并且因

$$\sup_{w_h \in W_h^{(m,n)}} \frac{E_h(p_h, w_h)}{\|w_h\|_{W_h^{(m,n)}}} \geqslant \frac{E_h(p_h, w_h')}{\|w_h\|_{W_h^{(m,n)}}} \geqslant \frac{\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2}{c\,\|p_h\|_{0,\Gamma_h}} = c^{-1}\|p_h\|_{0,\Gamma_h} \qquad \forall p_h \in P_{1h},$$

其中 $w_h' = (-p_h, 0)$, 则由[2] 推论 1.1 知定理结论成立•　　证毕•

以下用常单元, 即分段常函数空间 $W_h^{(0,0)}$, 来说明边界元法数值求解问题(16) 的过程•

空间 $W_h^{(0,0)}$ 的基函数可表示为:

$$\begin{cases} \sigma_{hi} = \delta_{hi} \\ \varphi_{hi} = \delta_{hi} \end{cases} \quad h, i = 1, 2, \cdots, NE, \ \text{式中}\ \delta_{hi} = \begin{cases} 1 & \text{当}\ h = i, \\ 0 & \text{当}\ h \neq i• \end{cases}$$

$w_h = (\sigma_h, \varphi_h) \in W_h$ 中的分量可分别表示为:

$$\sigma_h = \sum_{i=1}^{NE} \lambda_i \sigma_{hi}, \quad \varphi_h = \sum_{i=1}^{NE} \omega_i \varphi_{hi}• \tag{17}$$

又设未知多项式

$$p_h = \xi_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 y_2, \tag{18}$$

分别将

Ⅰ) $\sigma_h'(y) = \sigma_{hi}, \ \varphi_h'(y) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, NE,$

Ⅱ) $\sigma_h'(y) = 0, \ \varphi_h'(y) = \varphi_{hi}, \ i = 1, 2, \cdots, NE$

及(17)、(18) 代入(16) 的第一个方程; 分别将

Ⅲ) $p_h' = 1, p_h' = y_1, p_h' = y_2$

中的各个 p_h' 及(17)、(18) 代入(16) 的第二个方程• 经整理并将它们联立起来可得如下代数方程组:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Omega \\ \Xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

其中

$\boldsymbol{A}_{sk} = (a_{ij}^{sk}), \boldsymbol{C}_s = (c_{im}^{s}), \boldsymbol{B}_s = (b_i^s), \Lambda = (\lambda_i), \Omega = (\omega_i), \Xi = (\xi_s),$

$\boldsymbol{O}$ 是三阶零矩阵, $i, j = 1, 2, \cdots, NE; s, k = 1, 2; m = 1, 2, 3$•

$$a_{ij}^{11} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_{ih}}\int_{\Gamma_{jh}} u^*(x, y)\, \mathrm{d}s_x \mathrm{d}s_y, \quad a_{ij}^{12} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_{ih}}\int_{\Gamma_{jh}} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n_{h_x}} \mathrm{d}s_x \mathrm{d}s_y,$$

$$a_{ij}^{21} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_{ih}}\int_{\Gamma_{jh}} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n_{h_y}} \mathrm{d}s_x \mathrm{d}s_y, \quad a_{ij}^{22} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_{ih}}\int_{\Gamma_{jh}} \frac{\partial^2 u^*(x, y)}{\partial n_{h_x} \partial n_{h_y}} \mathrm{d}s_x \mathrm{d}s_y,$$

$$c_{i1}^1 = -\int_{\Gamma_{ih}} \mathrm{d}s_y,\quad c_{i2}^1 = -\int_{\Gamma_{ih}} y_1 \mathrm{d}s_y,\quad c_{i3}^1 = -\int_{\Gamma_{ih}} y_2 \mathrm{d}s_y,$$

$$c_{i1}^2 = 0,\quad c_{i2}^2 = -\int_{\Gamma_{ih}} \frac{\partial y_1}{\partial n_{h_y}} \mathrm{d}s_y,\quad c_{i3}^2 = -\int_{\Gamma_{ih}} \frac{\partial y_2}{\partial n_{h_y}} \mathrm{d}s_y,$$

$$b_i^1 = -\int_{\Gamma_{ih}} u_{0h}(y)\,\mathrm{d}s_y,\quad b_i^2 = \int_{\Gamma_{ih}} g_h(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

容易看出 $(2NE+3)\times(2NE+3)$ 阶的代数方程组(19) 是对称的. 若 (λ_i)、(ω_i)、(ξ_i) 是方程组(19) 的解, 由(17)、(18) 得近似问题(16) 的数值解 σ_h、φ_h、p_h. 故(1) 的数值解可由下式给定

$$u_h(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\left(\sigma_h(x)\cdot u^*(x,y) - \varphi_h(x)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_{h_x}}\right)\mathrm{d}s_x + p_h(y). \tag{20}$$

3　误 差 估 计

为叙述简明, 本节设边界 Γ 是一凸多边形. 按第 2 节的边界划分总有 $\Gamma_h = \Gamma$. 记 l_e 为几何单元 Γ_{eh} 的长度, $l = \max\limits_{1\leqslant e\leqslant NE} l_e$. 这里还设划分是正则的, 即存在与 l 无关的常数 α 使得

$$\max_{1\leqslant e\leqslant NE}\left(l/l_e\right) \leqslant \alpha.$$

仍采用记号 $W_h^{(m,n)}$ 表示分段多项式函数空间, m 为正整数, n 为非负整数. 记

$$H^{-3/2}(\Gamma_h) = \left\{\sigma_h \mid \sigma_h|_{\Gamma_{eh}} = \sigma_{eh} \in P_m\right\},\quad H^{-1/2}(\Gamma_h) = \left\{\varphi_h \mid \varphi_h|_{\Gamma_{eh}} = \varphi_{eh} \in P_n\right\}.$$

引理 2　设 $((\sigma,\varphi), p_1)$ 是方程(15) 的解, $((\sigma_h,\varphi_h), p_{1h})$ 是方程(16) 的解, 则有如下估计式

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{-3/2,\Gamma} + \|\varphi - \varphi_h\|_{-1/2,\Gamma} \leqslant ch^{3/2}(h^{m+1}\|\sigma\|_{m+3/2,\Omega} + h^n\|\varphi\|_{n+1/2,\Omega}), \tag{21}$$

其中 c 是与 h 无关的常数.

证明　根据[2] 中定理 2.1 知(16) 有唯一解 $(w_h, p_{1h}) = ((\sigma_h,\varphi_h), p_{1h})$ 且

$$\left(\|\sigma-\sigma_h\|_{-3/2,\Gamma}^2 + \|\varphi-\varphi_h\|_{-1/2,\Gamma}^2\right)^{1/2} + \|p_1 - p_{1h}\|_{P_1} \leqslant$$
$$c\left(\inf_{w_h'\in W_h^{(m,n)}}(\|\sigma-\sigma_h'\|_{-3/2,\Gamma} + \|\varphi-\varphi_h'\|_{-1/2,\Gamma}) + \inf_{p_{1h}'\in P_1}\|p_1 - p_{1h}'\|_{P_1}\right) =$$
$$c\left(\inf_{\sigma_h'\in H_{(m)}^{-3/2}}\|\sigma-\sigma_h'\|_{-3/2,\Gamma} + \inf_{\varphi_h'\in H_{(n)}^{-1/2}}\|\varphi-\varphi_h'\|_{-1/2,\Gamma}\right).$$

记正交投影算子 $\gamma_h: H^{-3/2}(\Gamma) \to H_{(m)}^{-3/2}(\Gamma_h)$, $\gamma_h': H^{-1/2}(\Gamma) \to H_{(n)}^{-1/2}(\Gamma_h)$; 插值算子 Π_h: $C(\Gamma)(\subset H^{-3/2}(\Gamma)) \to H_{(m)}^{-3/2}(\Gamma_h)$, Π_h': $C(\Gamma)(\subset H^{-1/2}(\Gamma)) \to H_{(n)}^{-1/2}(\Gamma_h)$, 则有

$$\inf_{\sigma_h'\in H_{(m)}^{-3/2}}\|\sigma-\sigma_h'\|_{-3/2,\Gamma} = \|\sigma-\gamma_h\sigma\|_{-3/2,\Gamma} = \|\sigma-\Pi_h\sigma\|_{-3/2,\Gamma},$$

$$\inf_{\varphi_h'\in H_{(n)}^{-1/2}}\|\varphi-\varphi_h'\|_{-1/2,\Gamma} = \|\varphi-\gamma_h'\varphi\|_{-1/2,\Gamma} = \|\varphi-\Pi_h'\varphi\|_{-1/2,\Gamma}.$$

又

$$\|\sigma-\Pi_h\sigma\|_{-3/2,\Gamma} \leqslant ch^{m+3/2}\|\sigma\|_{m+3/2,\Omega},\quad \|\varphi-\Pi_h'\varphi\|_{-1/2,\Gamma} \leqslant ch^{n+1/2}\|\varphi\|_{n+1/2,\Omega}.$$

将上述推导连接起来, 引理得证.　　证毕.

引理 3　对充分大的正数 L, 当 $|y| \leqslant L$ 时, 存在 $M = M(L) > 0$, 使得

$$\|u^*\|_{3/2,\Gamma} \leqslant M,\quad \left\|\frac{\partial u^*}{\partial n_x}\right\|_{1/2,\Gamma} \leqslant M. \tag{22}$$

证明　由[1, 7] 经仔细计算可得所述结果.　　证毕.

定理 8　设 $u(y)$ 是方程(1) 的解, $u_h(y)$ 是由(20) 所定义的方程(1) 的数值解, 对充分大

的正数 L, 当 $|y| \leqslant L$ 时

$$|u(y) - u_h(y)| \leqslant c h^{3/2}(h^{m+1} \|\sigma\|_{m+3/2,\Omega} + h^n \|\varphi\|_{n+1/2,\Omega}), \tag{23}$$

其中 c 是与 h 无关的常数•

证明　对任意给定的正数 L, 当 $|y| \leqslant L$ 时, 由(20) 式及引理 3, 有

$$|u(y) - u_h(y)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left|\int_\Gamma (\sigma(x) - \sigma_h(x)) u^*(x, y) \mathrm{d}s_x - \int_{\Gamma_h} (\varphi(x) - \varphi_h(x)) \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n_{h_x}} \mathrm{d}s_x + p(y) - p_h(y)\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\|\sigma - \sigma_h\|_{-3/2,\Gamma} \|u^*\|_{3/2,\Gamma} + \|\varphi - \varphi_h\|_{-1/2,\Gamma} \left\|\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n_x}\right\|_{1/2,\Gamma}\right) \leqslant$$

$$c h^{3/2}(h^{m+1} \|\sigma\|_{m+3/2,\Omega} + h^n \|\varphi\|_{n+1/2,\Omega})•$$

证毕•

注　当 $H^{-3/2}_{(m)}(\Gamma_h)$ 和 $H^{-1/2}_{(n)}(\Gamma_h)$ 中指标 $m = k - 1$, $n = k$ 时

$$|u(y) - u_h(y)| \leqslant c h^{k+3/2}(\|\sigma\|_{k+3/2,\Omega} + \|\varphi\|_{k+1/2,\Omega})• \tag{24}$$

从收敛阶数上讲, 估计式(21) 式是最佳的•

4　数 值 算 例

为了核验数值方法的正确性, 我们给出如下算例:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - s\Delta u = 0 \qquad \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \\ u|_{\Gamma_1} = \mathrm{e}^{-x}, \ u|_{\Gamma_2} = \mathrm{e}^{-(y+1)}, \ u|_{\Gamma_3} = \mathrm{e}^{-(x+1)}, \ u|_{\Gamma_4} = \mathrm{e}^{-y}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = \mathrm{e}^{-x}, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = -\mathrm{e}^{-(y+1)}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_3} = -\mathrm{e}^{-(x+1)}, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_4} = \mathrm{e}^{-y}, \end{cases} \tag{25}$$

其中

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y = 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y) \mid y \in [0, 1], x = 1\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y = 1\}, \quad \Gamma_4 = \{(x, y) \mid y \in [0, 1], x = 0\}•$$

令 $s = 2$•　问题(25) 的精确解为 $u(x, y) = \mathrm{e}^{-(x+y)}$•　对问题(25) 采用本文中的边界元方法求解, 各边界划分为 4 个单元, 则计算结果如下表所示:

表 1

(x, y)	数值解	精确解
(1/3, 1/3)	0.497 321 9	0.513 417 1
(1/3, 2/3)	0.358 860 1	0.367 879 4
(2/3, 1/3)	0.358 860 1	0.367 879 4
(2/3, 2/3)	0.277 483 6	0.263 597 1

[参　考　文　献]

[1]　祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[2] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problem arising from Lagrange multiplier[J]. RAIRO, 1974, **4**(2): 129—151.

[3] 温希重, 李荣华. 求解平面双调合方程的边界元方法的误差分析[J]. 计算数学, 1990, **12**(3): 270—278.

[4] 丁方允, 吕涛涛. 二维 Helmholtz 方程非线性边值问题的边界元分析[J]. 兰州大学学报, 1994, **30**(2): 25—30.

[5] 丁方允. 三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 问题的边界元方法及其收敛性分析[J]. 兰州大学学报, 1995, **31**(3): 30—38.

[6] 丁睿, 朱正佑, 程昌钧. 粘弹性板动力响应的边界元方法(Ⅱ)——理论分析[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(2): 95—103.

[7] 丁睿, 张颖, 丁方允. 屈曲特征值问题的边界元分析[A]. 见: 程昌钧, 戴世强, 刘宇陆 主编. 现代数学和力学(Ⅶ)[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997.

Boundary Element Method for Buckling Eigenvalue Problem and Its Convergence Analysis

DING Rui[1], DING Fang_yun[2], ZHANG Ying[3]

(1. Department of Mathematics, Soochou University, Suzhou 215006, P R China;
2. Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P R China;
3. Department of Material Science, Xiamen University, Xiamen 361005, P R China)

Abstract: The conditions for determining solution of buckling eigenvalue problem are discussed. The corresponding system of integral equations with constraint conditions and boundary variational equations with Lagrange multiplier are established. The theorems on the existence and uniqueness of the solution for these problems are given. The corresponding boundary element method is constructed and the error estimation for the approximation solution is obtained. Finally the numerical example is given.

Key words: Lagrange multiplier; BEM; Sobolev space