

文章编号: 1000-0887(2002) 02-0128-07

圆柱壳的轴对称平面应变弹性动力学解^{*}

皓江¹, 王惠明², 陈伟球¹

(1. 浙江大学 建工学院 土木系, 杭州 310027; 2 浙江大学 力学系, 杭州 310027)

(本刊编委 皓江来稿)

摘要: 给出一种圆柱壳的轴对称平面应变弹性动力学问题的解析方法。首先通过引入一特定函数将非齐次边界条件化为齐次边界条件, 然后利用分离变量法将位移减去特定函数的量展开为关于贝塞尔函数和时间函数乘积的级数, 并由贝塞尔函数的正交性, 导出时间函数的方程, 容易求得此方程的解。将两者叠加可得弹性动力学问题的位移解。运用此方法, 可以避免积分变换, 并适宜于各种载荷。文中给出了各向同性和柱面各向同性圆柱壳内表面和实心圆柱外表面受冲击荷载作用以及内表面固定的柱面各向同性圆柱壳外表面受冲击荷载作用的数值结果。

关键词: 轴对称平面应变; 特定函数; 积分变换; 柱面各向同性

中图分类号: O343.8 **文献标识码:** A

引 言

弹性体受动载荷作用的问题的研究已进行多年, 并且提出了多种不同的方法。在薄壳无矩理论基础上, 1955 年, Huth 和 Cole^[1] 研究了在动载荷作用下薄壁球壳中应力波的传播。1966 年, M civor^[2] 讨论了受任意分布形式的径向脉冲作用下的圆柱壳内的弯曲应力和薄膜应力, Baker 等^[3] 进一步研究了在轴对称冲击荷载作用下薄壁球壳的动态响应解。文献[4, 5] 利用特征线方法求解了球壳和柱壳的动态响应问题。运用有限 Hankel 变换和 Laplace 变换, Cinelli^[6] 从理论上给出了柱壳和球壳的弹性动力学响应解, 王熙^[7, 8] 给出了各向同性圆柱壳和正交各向异性圆盘内表面受冲击荷载作用的动应力响应, 王熙^[9] 还研究了有界各向同性实心圆柱外边界受冲击荷载作用的动应力和动应力集中现象。

本文给出一种圆柱壳的轴对称平面应变弹性动力学问题的解析方法。首先通过引入一特定函数将非齐次边界条件化为齐次边界条件, 然后利用分离变量法将位移减去特定函数的量展开为关于贝塞尔函数和时间函数乘积的级数, 并由贝塞尔函数的正交性, 导出时间函数的方程, 利用初始条件确定级数各项的系数, 可求得此方程的解。将两者叠加即得弹性动力学问题的位移解。运用此方法, 可以避免积分变换, 并适宜于各种载荷, 且便于进行数值计算。文中给出了各向同性和柱面各向同性圆柱壳内表面和实心圆柱外表面受冲击荷载作用以及内表面固定的柱面各向同性圆柱壳外表面受冲击荷载作用的数值结果。

* 收稿日期: 2000_02_08; 修订日期: 2001_09_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172075)
作者简介: 丁皓江(1934—), 男, 江苏常州人, 教授。

1 问题的数学公式

在柱坐标系 (r, θ, z) 中, 对于柱面各向同性柱体^[10] 的轴对称问题, 有 $u_\theta = 0, u_r = u_r(r, z, t)$ 和 $u_z = u_z(r, z, t)$; 如果进一步是平面应变轴对称问题, 则有 $u_\theta = u_z = 0, u_r = u_r(r, t)$; 几何方程为

$$\gamma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{zz} = \gamma_{zr} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0; \quad (1)$$

广义虎克定律简化为

$$\sigma_{rr} = c_{11} \gamma_{rr} + c_{12} \gamma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{12} \gamma_{rr} + c_{22} \gamma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{zz} = c_{12} \gamma_{rr} + c_{23} \gamma_{\theta\theta}, \quad (2)$$

式中 $c_{ij} (i, j = 1, 3)$ 为材料弹性常数. 运动方程简化为

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (3)$$

其中 ρ 是密度. 将式(1)代入式(2), 然后代入式(3) 得控制方程:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\mu^2}{r^2} u_r = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (4)$$

式中

$$\mu = \sqrt{c_{22}/c_{11}}, \quad c_L = \sqrt{c_{11}/\rho}. \quad (5)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} r = a: \quad & c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} = p_1(t) \quad (\text{圆柱壳}); \quad u_r(0, t) = 0 \quad (\text{实心圆柱}), \\ r = b: \quad & c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} = p_2(t) \quad (\text{圆柱壳和实心圆柱}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 a, b 分别为柱壳的内、外半径.

初始条件为

$$t = 0: \quad u_r(r, 0) = u_0(r), \quad \dot{u}_r(r, 0) = v_0(r), \quad (7)$$

式中符号上一点表示对时间求偏导数.

2 柱面各向同性柱壳的求解方法

首先将非齐次边界条件化为齐次边界条件, 令:

$$u_r(r, t) = w_1(r, t) + w_2(r, t), \quad (8)$$

式中 $w_2(r, t)$ 满足非齐次边界条件, 可令

$$w_2(r, t) = A_0(r-a)^m p_2(t) + B_0(r-b)^m p_1(t), \quad (9)$$

式中

$$A_0 = \frac{b^{1-m}}{c_{11}[m(1-s)^{m-1} + \alpha(1-s)^m]}, \quad B_0 = \frac{b^{1-m}}{c_{11}[m(s-1)^{m-1} + \alpha(s-1)^m/s]}, \quad (10)$$

而取 $m \geq 2$ 的任何整数且满足

$$[m(1-s)^{m-1} + \alpha(1-s)^m][m(s-1)^{m-1} + \alpha(s-1)^m/s] \neq 0, \quad (11)$$

和

$$s = a/b, \quad \alpha = c_{12}/c_{11}. \quad (12)$$

将式(8)代入控制方程(4)、边界条件(6)和初始条件(7), 得 $w_1(r, t)$ 应满足的方程

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{\mu^2}{r^2} w_1 = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + g_1(r, t), \quad (13)$$

$$r = a: \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} + \alpha \frac{w_1}{r} = 0, \quad r = b: \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} + \alpha \frac{w_1}{r} = 0, \quad (14)$$

$$w_1(r, 0) = u_1(r), \quad \dot{w}_1(r, 0) = v_1(r), \quad (15)$$

式中

$$g_1(r, t) = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 w_2(r, t)}{\partial t^2} + \frac{\mu^2}{r^2} w_2(r, t) - \frac{1}{r} \frac{\partial w_2(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial^2 w_2(r, t)}{\partial r^2}, \quad (16)$$

$$u_1(r) = u_0(r) - w_2(r, 0), \quad v_1(r) = v_0(r) - \dot{w}_2(r, 0)$$

采用试探法, 将方程(13)的解写成如下形式

$$w_1(r, t) = \sum_i R_i(r) F_i(t), \quad (17)$$

式中 $F_i(t)$ 待定, $R_i(r)$ 如下式所示, 显然这样的 $w_1(r, t)$ 满足边界条件(14),

$$R_i(r) = J_\mu(k_i r) Y(\mu, k_i, a) - Y_\mu(k_i r) J(\mu, k_i, a), \quad (18)$$

而 $J_\mu(k_i r)$ 、 $Y_\mu(k_i r)$ 分别为第一和第二类 μ 阶贝塞尔函数, k_i 是下面方程的正实根(按由小到大顺序排列)

$$J(\mu, k_i, a) Y(\mu, k_i, b) - J(\mu, k_i, b) Y(\mu, k_i, a) = 0, \quad (19)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} J(\mu, k_i, r) &= \frac{dJ_\mu(k_i r)}{dr} + \alpha \frac{J_\mu(k_i r)}{r}, \\ Y(\mu, k_i, r) &= \frac{dY_\mu(k_i r)}{dr} + \alpha \frac{Y_\mu(k_i r)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将式(17)代入式(13), 化简可得

$$-c_L^2 \sum_i k_i^2 F_i(t) R_i(r) = \sum_i R_i(r) d^2 F_i(t) / dt^2 + c_L^2 g_1(r, t) \quad (21)$$

由贝塞尔函数的性质, 容易证明 $R_i(r)$ 有如下的加权正交性质, 即

$$\int_a^b r R_i(r) R_j(r) dr = N_i \delta_{ij}, \quad (22)$$

式中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号和

$$N_i = \left\{ b^2 \left[\frac{dR_i(b)}{dr} \right]^2 - a^2 \left[\frac{dR_i(a)}{dr} \right]^2 + k_i^2 [b^2 R_i^2(b) - a^2 R_i^2(a)] - \mu^2 [R_i^2(b) - R_i^2(a)] \right\} \frac{1}{2k_i^2}, \quad (23)$$

式中 $dR_i(a)/dr = dR_i(r)/dr |_{r=a}$ 和 $dR_i(b)/dr = dR_i(r)/dr |_{r=b}$

利用式(22)可以由式(21)导出如下方程

$$d^2 F_i(t) / dt^2 + \omega_i^2 F_i(t) = q_i(t), \quad (24)$$

式中

$$\omega_i = k_i c_L, \quad q_i(t) = -c_L^2 \int_a^b r g_1(r, t) R_i(r) dr \frac{1}{N_i}, \quad (25)$$

方程(24)的解为

$$F_i(t) = G_{1i} \cos \omega_i t + G_{2i} \sin \omega_i t + \int_0^t q_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \frac{1}{\omega_i}, \quad (26)$$

式中 G_{1i} 和 G_{2i} 为待定常数, 利用初始条件确定 G_{1i} 和 G_{2i}

$$G_{1i} = \int_a^b r u_1(r) R_i(r) dr \frac{1}{N_i}, \quad G_{2i} = \int_a^b r v_1(r) R_i(r) dr \frac{1}{N_i \alpha_i}, \quad (27)$$

将式(9)和(17)相加,即得位移解 $u_r(r, t)$ 。

对于内半径 $r = a$ 处为固定时,则只需取 $B_0 = 0$,在式(18)和(19)中取 $J(\mu, k_i, a) = J_\mu(k_i a)$ 和 $Y(\mu, k_i, a) = Y_\mu(k_i a)$ 即可。而对于实心圆柱,有 $a = 0$,则只需取 $B_0 = 0, J(\mu, k_i, a) = 0$ 和 $Y(\mu, k_i, a) = 1$ 即可。

当 $c_{11} = c_{22} = E(1 - \nu)/k, c_{12} = c_{23} = E\nu/k$ 和 $k = (1 + \nu)(1 - 2\nu)$,其中 E 和 ν 分别是弹性模量和泊松比,则上述解即为各向同性圆柱壳的弹性动力学解。

3 数值结果

设柱面各向同性圆柱壳材料性质为: $c_{22}/c_{11} = 2.25, c_{12}/c_{11} = 0.675, c_{12} = c_{23}$;各向同性圆柱壳材料性质为: $E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3$ 。数值结果中,坐标、应力和时间按下式进行无量纲化

$$\xi = \frac{r-a}{b-a}, \quad t^* = \frac{cL}{b-a}t, \quad \sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \quad (i = r, \theta, z), \quad (28)$$

式中 σ_0 是一已知应力量,计算时取 $\sigma_0/c_{11} = 10^{-4}$ 。下面用 $H(t)$ 表示 Heaviside 函数。

例题 1 $p_1(t) = -\sigma_0 H(t)$ 和 $p_2(t) = 0$ 情形

情况 1 各向同性柱壳(图 1~ 4)

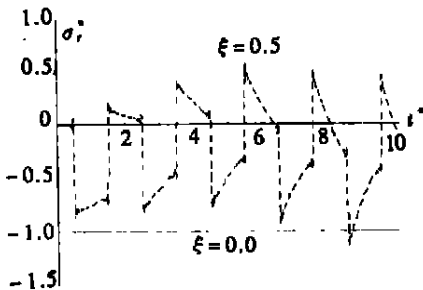


图 1 无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.5$)

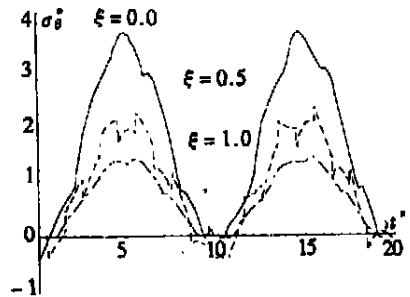


图 2 无量纲应力 σ_θ^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.5$)

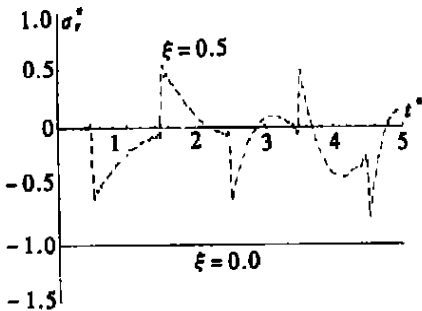


图 3 无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.2$)

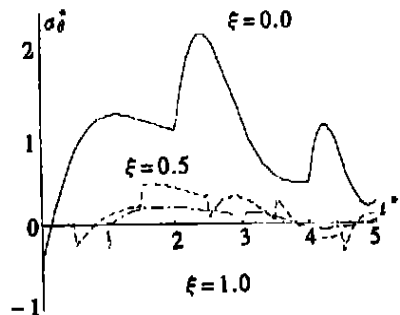


图 4 无量纲应力 σ_θ^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.2$)

情况 2 柱面各向同性柱壳(图 5~ 8)

例题 2 $p_1(t) = 0$ 和 $p_2(t) = -\sigma_0 H(t)$ 情形

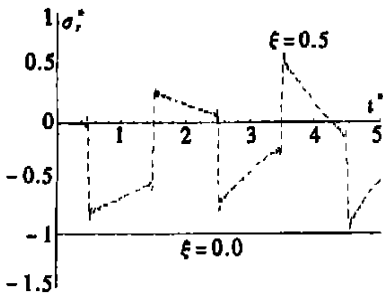


图5 无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.5$)

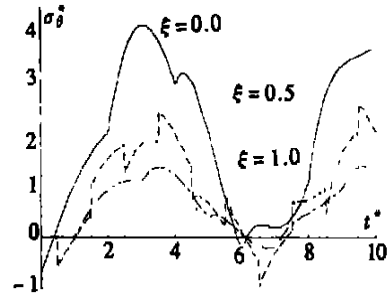


图6 无量纲应力 σ_θ^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.5$)

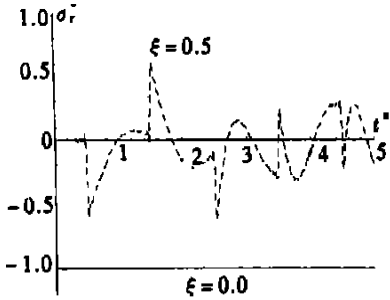


图7 无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.2$)

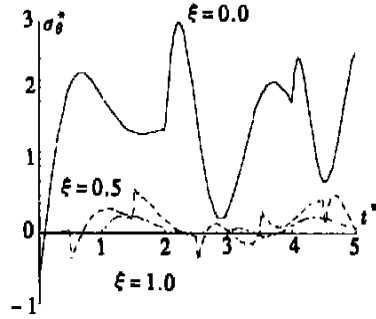


图8 无量纲应力 σ_θ^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($s = 0.2$)

情况1 各向同性实心圆柱(图9~12)

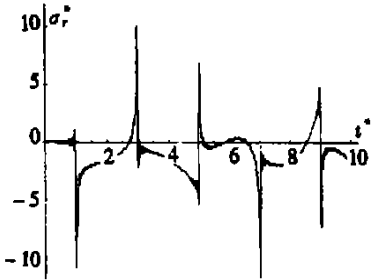


图9 中心处无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线

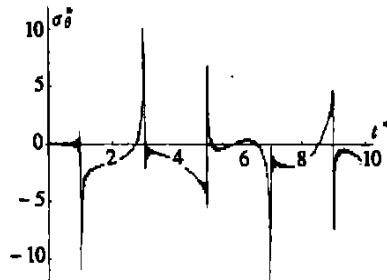


图10 中心处无量纲应力 σ_θ^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线

情况2 内表面固定的柱面各向同性圆柱壳 ($s = 0.01$) (图13~15)•

4 结 论

1) 本文提供的方法不须积分变换, 适宜各种载荷, 便于数值计算, 同样也适用于圆盘等平面应力问题•

2) 图1和图2给出了内外径比 $s = 0.5$ 的各向同性圆柱壳内表面作用冲击荷载时柱壳内的动应力响应, 文献[5]给出了同样问题的内表面环向应力 σ_θ^* 的响应解, 我们的结果与文献

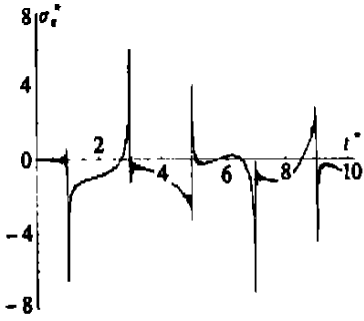


图 11 中心处无量纲应力 σ_z^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线

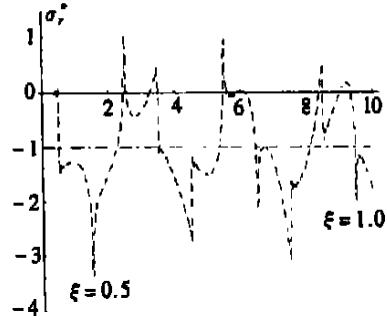


图 12 无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线 ($\xi = 0.5$ 和 $\xi = 1.0$)

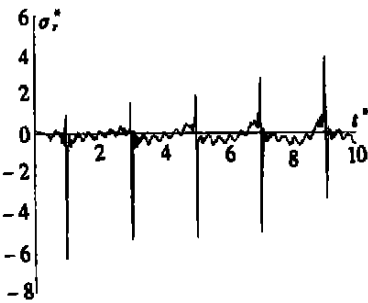


图 13 孔边无量纲应力 σ_r^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线

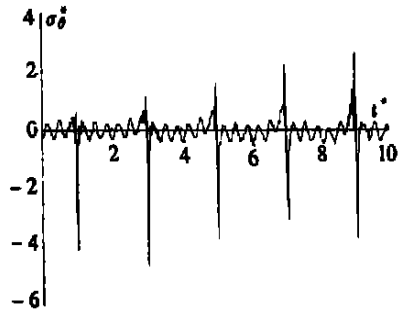


图 14 孔边无量纲应力 σ_θ^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线

[5] 完全相同, 证明本文的计算方法是成功的。

3) 图 3 和图 4 给出了内外径比 $s = 0.2$ 时各向同性柱壳内表面作用冲击荷载时柱壳内的动应力响应, 从图 2 和图 4 可以看出, 柱壳内表面环向应力的动应力峰值随内外径比的变化而改变, $s = 0.5$ 时内表面环向拉应力峰值为冲击荷载值的 3.7 倍, $s = 0.2$ 时则为 2.3 倍。

4) 比较图 2 和图 6 及图 4 和图 8, 看到了材料的各向异性性质的影响, 当内外径比分别为 $s = 0.5$ 和 $s = 0.2$ 时, 柱面各向同性柱壳内表面环向拉应力的峰值分别为冲击荷载值的 4.1 和 2.8 倍, 比相应各向同性材料的大。

5) 图 9~ 12 给出了各向同性实心圆柱外表面受冲击荷载时的动应力响应, 数值结果表明, 在中心处 σ_r^* 、 σ_θ^* 和 σ_z^* 均出现动应力集中现象, 但应力并非是奇异的, 而是有限的。图 9 和图 10 的一致是公式和计算正确性的又一佐证。图 13~ 15 给出了轴向有小圆孔的柱面各向同性圆柱壳外表面作用冲击荷载, 孔边固定时孔边的动应力, 发现在孔边 σ_r^* 、 σ_θ^* 和 σ_z^* 也均有动应力集中现象。

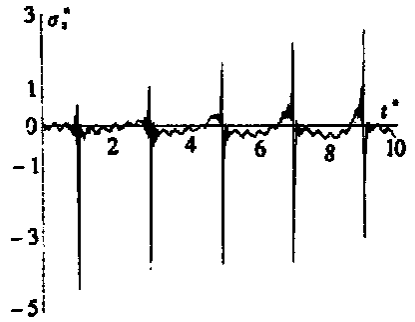


图 15 孔边无量纲应力 σ_z^* 随无量纲时间 t^* 变化曲线

[参 考 文 献]

- [1] Huth J H, Cole J D. Elastic stress waves produced by pressure loads on a spherical shell[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, 22(4): 473—478.
- [2] Mcivor I K. The elastic cylindrical shell under radial impulse[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(4): 831—837.
- [3] Baker W E, Hu W C L, Jackson T R. Elastic response of thin spherical shells to axisymmetric blast loading[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(4): 800—806.
- [4] Chou P C, Koenig H A. A unified approach to cylindrical and spherical elastic waves by method of characters[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(1): 159—167.
- [5] Rose J L, Chou S C, Chou P C. Vibration analysis of thick walled spheres and cylinders[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1973, 53(3): 771—776.
- [6] Cinelli G. Dynamic vibrations and stresses in elastic cylinders and spheres[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(4): 825—830.
- [7] WANG Xi, GONG Yu_ning. A theoretical solution for axially symmetric problem in elastodynamics [J]. Acta Mechanica Sinica, 1991, 7(3): 275—282.
- [8] 王熙. 各向异性轴对称问题的弹性动力学解[J]. 力学学报, 1997, 29(5): 606—610.
- [9] 王熙. 有界圆柱体的动应力和动应力集中现象[J]. 振动与冲击, 1995, 14(1): 23—29.
- [10] 丁皓江, 陈伟球, 邹道勤, 等. 横观各向同性弹性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997.

A Theoretical Solution of Cylindrical Shells for Axisymmetric Plain Strain Elastodynamic Problems

DING Hao_jiang¹, WANG Hui_ming², CHEN Wei_qiu¹

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P R China;

2. Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P R China)

Abstract: A method is developed for the transient responses of axisymmetric plain strain problems of cylindrical shells subjected to dynamic loads. Firstly, a special function was introduced to transform the inhomogeneous boundary conditions into the homogeneous ones. Secondly, using the method of separation of variables, the quantity that the displacement subtracts the special function was expanded as the multiplication series of Bessel functions and time functions. Then by virtue of the orthogonal properties of Bessel functions, the equation with respect to the time variable was derived, of which the solution is easily obtained. The displacement solution was finally obtained by adding the two parts mentioned above. The present method can avoid the integral transform and is fit for arbitrary loads. Numerical results are presented for internally shocked isotropic and cylindrically isotropic cylindrical shells and externally shocked cylinders, as well as for an externally shocked, cylindrically isotropic cylindrical shell that is fixed at the internal surface.

Key words: axisymmetric plain strain problem; special function; integral transform; cylindrically isotropic